Föreläsning 5/3
Associerade Legendre-funktioner och klotytefunktioner

Ulf Torkelsson

1 Laplaces ekvation i sfäriska koordinater

I sfäriska koordinater kan vi skriva Laplaces ekvation som

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}=0. \tag{1}$$

Vi kan separera denna ekvation genom att ansätta

$$\Psi\left(r,\theta,\varphi\right)=R\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\varphi\right). \tag{2}$$

Detta ger oss ekvationen

$$\frac{\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\varphi\right)}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R\left(r\right)\Phi\left(\varphi\right)}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{R\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)}{r^2\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=0. \tag{3}$$

Vi multiplicerar denna ekvation med $r^2/R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, så att vi får

$$\frac{1}{R\left(r\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{\Theta\left(\theta\right)\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\left(\varphi\right)\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=0. \tag{4}$$

Vi börjar med att sätta

$$\frac{1}{R\left(r\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=n\left(n+1\right), \tag{5}$$

så att vi för den vinkelberoende delen får

$$\frac{1}{\Theta\left(\theta\right)\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\left(\varphi\right)\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi\left(\varphi\right)}{\mathrm{d}\varphi^2}+n\left(n+1\right)=0. \tag{6}$$

Den azimutala delen av den här ekvationen blir

$$\frac{1}{\Phi\left(\varphi\right)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi\left(\varphi\right)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-m^2, \tag{7}$$

som har lösningarna

$$\Phi\left(\varphi\right)=e^{-im\varphi}\,\mathrm{och}\,e^{im\varphi}, \tag{8}$$

där m är ett heltal. Dessa lösningar uppfyller ortogonalitetsvillkoret

$$\int_0^{2\pi}e^{-im_1\varphi}e^{im\varphi_2}\mathrm{d}\varphi=2\pi\delta_{m_1,m_2}. \tag{9}$$

Lägg märke till att i skalärprodukten har vi $\Phi^*_{m_1}\Phi_{m_2}$. Vi kan nu normera funktionen genom att sätta

$$\Phi_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}. \tag{10}$$

Vi har redan tidigare sett att lösningen för den radiella funktionen i detta fall blir

$$R_n\left(r\right)=A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}. \tag{11}$$

2 Associerade Legendre-funktioner

Nu återstår ekvationen i θ-led. Om vi ersätter $\Theta(\theta)$ med $P_n^m(\cos\theta)$ så är den en lösning till den associerade Legendre-ekvationen

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_n^m(\cos\theta)=0. \tag{12}$$

Om man sätter $x=\cos\theta$ så kan vi skriva den som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_n^m(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x)=0. \tag{13}$$

Lägg märke till att om $m^2=0$ så har vi den vanliga Legendre-ekvation.

För att hitta lösningen till den associerade Legendre-ekvationen startar vi med Legendres ekvation

$$\left(1-x^2\right)P_n''-2xP_n'+n(n+1)P_n=0. \tag{14}$$

Vi deriverar den m gånger, och enligt Leibniz formel får vi

$$\left(1-x^2\right)u''-2x(m+1)u'+(n-m)(n+m-1)u=0, \tag{15}$$

där

$$u=\frac{\mathrm{d}^mP_n}{\mathrm{d}x^m}. \tag{16}$$

För att göra den här differentialekvationen självadjungerad så sätter vi

$$v(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}u(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^mP_n}{\mathrm{d}x^m}. \tag{17}$$

Vi kan lösa ut

$$u=\frac{v(x)}{\left(1-x^2\right)^{m/2}}, \tag{18}$$

och derivera

$$u'=\frac{v'}{\left(1-x^2\right)^{m/2}}+\frac{mxv}{\left(1-x^2\right)^{(m+2)/2}}=\left(v'+\frac{mxv}{1-x^2}\right)\left(1-x^2\right)^{-m/2}, \tag{19}$$

$$u''=\left[v''+\frac{2mxv'}{1-x^2}+\frac{mv}{1-x^2}+\frac{m(m+2)x^2v}{\left(1-x^2\right)^2}\right]\left(1-x^2\right)^{-m/2}. \tag{20}$$

Vi sätter sedan in dessa i differentialekvationen och får

$$\left(1-x^2\right)v''-2xv'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]v=0, \tag{21}$$

som är den associerade Legendre-ekvationen. Alltså är dess lösningar

$$v=P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x). \tag{22}$$

Det framgår att $m\le n$. En noggrannare analys visar att $-n\le m\le n$.

En viktig egenskap hos en funktion är dess paritet. Jämna funktioner har positiv paritet och udda funktioner har negativ paritet. De vanliga Legendre-funktionerna har pariteten $(-1)^n$. För att beräkna P_n^m deriverar vi m gånger så det tillkommer $(-1)^m$ och vi har

$$P_n^m(-x)=(-1)^{n+m}P_n^m(x). \tag{23}$$

De associerade Legendre-funktionerna är ortogonala och vi har

$$\int_{-1}^{1}P_p^m(x)P_q^m(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2q+1}\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\delta_{p,q}. \tag{24}$$

Lägg märke till att $\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$. Vi kan nu normalisera den associerade Legendre-funktionen

$$\mathcal{P}_n^m(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(\cos\theta). \tag{25}$$

3 Klotytefunktioner

Vi kan nu multiplicera ihop de båda funktionerna som beskriver Ψ:s vinkelberoende och skapa klotytefunktionen

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}. \tag{26}$$

För $m = 0$ har vi speciellt

$$Y_n^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_0(\cos\theta)\,. \tag{27}$$

För dessa funktioner gäller ortogonalitetskravet

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1 *}(\theta,\varphi)\, Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\varphi)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \delta_{n_1,n_2}\delta_{m_1,m_2}. \tag{28}$$

Klotytefunktionerna är ett fullständigt set av basfunktioner så vi kan utveckla en funktion $f(\theta,\varphi)$ som är definierad på en sfär som

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{m,n} a_{mn} Y_n^m(\theta,\varphi)\,, \tag{29}$$

där

$$a_{mn} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_n^{m*}(\theta,\varphi)\, f(\theta,\varphi)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi. \tag{30}$$

För $\theta = 0$ försvinner termerna med $m \neq 0$, och då kan vi skriva serieutvecklingen som

$$f(\theta = 0,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} a_{0l}. \tag{31}$$

där

$$a_{0l} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int P_l(\cos\theta)\, f(\theta,\varphi)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi. \tag{32}$$

Sammanfattningsvis har vi alltså kommit fram till att lösningen till Laplaces ekvation i sfäriska koordinater är

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_{mn} r^n + \frac{B_{mn}}{r^{n+1}}\right) Y_n^m(\theta,\varphi)\,. \tag{33}$$

Om Ψ är känd på en sfärisk yta, kan man bestämma A_{mn} och B_{mn}.

4 Additionssatsen för klotytefunktionerna

Två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{x}'$ har de sfäriska koordinaterna (r,θ,φ) och (r',θ',φ'), och vinkeln mellan dessa vektorer är γ. Enligt additionssatsen gäller då att

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n} Y_n^{m*}(\theta',\varphi')\, Y_n^m(\theta,\varphi)\,, \tag{34}$$

där $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

Betrakta $\mathbf{x}'$ som fix, så att vi kan se $P_n(\cos\gamma)$ som en funktion av θ och φ. Den har då en serieutveckling

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m=-n'}^{n'} A_{m'n'}(\theta',\varphi')\, Y_{n'}^m(\theta,\varphi)\,. \tag{35}$$

Om $\mathbf{x}'$ är parallell med z-axeln, så är γ den vanliga polvinkeln, och $P_n(\cos\gamma)$ uppfyller ekvationen

$$\nabla'^2 P_n(\cos\gamma) + \frac{n(n+1)}{r^2} P_n(\cos\gamma) = 0, \tag{36}$$

men skillnaden mellan denna riktning och en godtycklig riktning (θ', φ') är endast en rotation som inte påverkar r'. Därför måste $P_n(\cos\gamma)$ fortfarande uppfylla denna ekvation, och den är en klotytefunktion av ordning n. Därför måste dess utveckling vara

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=-n}^{n} A_m(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi), \tag{37}$$

där

$$A_m(\theta', \varphi') = \int Y_n^{m*}(\theta, \varphi) P_n(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi. \tag{38}$$

Den här koefficienten kan nu ses som $m' = 0$ koefficienten i utvecklingen av

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}} Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \tag{39}$$

i funktionerna $Y_n^{m'}(\gamma, \beta)$, där γ och β är sfäriska koordinater kring $\mathbf{x}'$-axeln. Då vi bara har ett värde på n så gäller att

$$A_m(\theta', \varphi') = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{m*}\left[\theta(\gamma, \beta), \varphi(\gamma, \beta)\right]\big|_{\gamma=0}, \tag{40}$$

men i gränsen att $\gamma \to 0$ så $\theta \to \theta'$ och $\varphi \to \varphi'$, och additionssatsen följer. I de modifierade Legendre-funktionerna kan man skriva satsen som

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos\left[m(\varphi - \varphi')\right]. \tag{41}$$

Om $\gamma \to 0$ så ger oss additionssatsen att

$$\sum_{m=-n}^{n} \left|Y_n^m(\theta, \varphi)\right|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \tag{42}$$

Potentialen

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta), \tag{43}$$

men med additionssatsen kan vi skriva denna som

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_l^{m*}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi). \tag{44}$$

Exempel: En elektrisk dipol består av en laddning $+q$ i punkten $(0, 0, d/2)$ och en laddning $-q$ i punkten $(0, 0, -d/2)$. Uttryck potentialen i klotytefunktioner.

Lösning: Vi kan skriva potentialen som

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{r} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}\right|} - \frac{1}{\left|\mathbf{r} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{z}}\right|} \right). \tag{45}$$

För $r > 2d$ kan vi utveckla potentialen som

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{d}{2r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n(\cos\theta) \left(\frac{d}{2r}\right)^n \right] =$$
$$\frac{q}{2\pi\epsilon r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n-1}(\cos\theta) \left(\frac{d}{2r}\right)^{2n-1} = \frac{q}{2\pi\epsilon r} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n-1}^0(\theta, \varphi) \left(\frac{d}{2r}\right)^{2n-1}. \tag{46}$$

I det motsatta fallet att $r < 2d$ så får vi istället

$$\Phi = \frac{q}{\pi\epsilon d} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2n-1}^{0}\left(\theta, \varphi\right) \left(\frac{2r}{d}\right)^{2n-1} . \tag{47}$$