NUMERISK VÄRDERING AV AMERIKANSKA OPTIONER

Av Herman Peterson

10 poäng

Abstrakt

Det här är en genomgång av olika existerande numeriska metoder för att värdera amerikanska optioner. Arbetet omfattar endast amerikanska köp- och säljoptioner där den underliggande tillgången är en aktie. Först sker en kort genomgång av Black och Scholes modell. Sedan beskrivs den olika modellerna som jag har valt. Slutligen görs en genomgång av de numeriska resultaten för de olika metoderna.

Innehållsförteckning

NUMERISK VÄRDERING AV AMERIKANSKA OPTIONER

Inledning

Syftet med det här arbetet är att gå igenom de olika numeriska lösningsmetoder som finns i litteraturen för prissättning av en amerikansk option. Jag börjar kortfattat med att ta upp Black och Scholes - formeln och de antaganden som görs angående marknaden. I det sammanhanget beskriver jag också de allmänna prisgränser som finns för en amerikansk option och när det kan vara lönsamt att utnyttja optionen före slutdagen. Som andra punkt beskriver jag olika numeriska lösningstekniker för prissättning av en amerikansk option. I punkt tre beskriver jag Sullivans artikel (2000) ”Valuing American Put Options Using Gaussian Quadrature,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 13, No. 1, 75-94 mer ingående. Avslutningsvis gör jag jämförelser mellan de olika metoderna med avseende på snabbhet och tillförlitlighet.

Till att börja med några basfakta inför kommande framställning.

Köpoption: innehavaren av en sådan äger rättighet att köpa ett bestämt antal aktier eller annan underliggande tillgång till ett förutbestämt pris. Utställaren av köpoptionen är skyldig att sälja aktierna eller annan underliggande tillgång till det förutbestämda priset om innehavaren av optionen vill utnyttja rätten.

Säljoption: ger innehavaren rättighet att sälja ett bestämt antal aktier eller annan tillgång till ett förutbestämt pris och utställaren av säljoptionen är skyldig att köpa tillgången till det förutbestämda priset om innehavaren vill sälja. Den underliggande tillgången kan vara vilken finansiell tillgång som helst.

Om optionen är av europeisk typ kan innehavaren bara utnyttja optionens lösenrätt vid optionens slutdag, medan en amerikansk option ger innehavaren rättighet att utnyttja optionsrätten när som helst under optionens löptid. Det existerar också andra typer av optioner, t ex sådana som ger innehavaren av optionen rätt till ett bestämt belopp om aktien håller sig inom ett förutbestämt kursintervall under optionens löptid.

I uppsatsen kommer jag att utgå ifrån att den underliggande tillgången är en aktie. Vad gäller optioner av europeisk typ visade Black och Scholes (1973) att det finns en analytisk lösning till värderingsproblemet. För en amerikansk säljoption finns däremot ingen analytisk lösning. Värderingsproblemet för en amerikansk köpoption är beroende av om aktien ger utdelning eller inte under optionens löptid. Om tillgången inte ger någon utdelning är det aldrig ”optimalt” att lösa en amerikansk köpoption i förtid. Vilket ger att värdet är detsamma som för en europeisk köpoption. Då aktien ger utdelning finns i visa fall analytiska lösningar. Men i Black-Scholes modellen existerar ett unikt värde för optionen, fast värdet inte alltid går att uttrycka i en sluten formel. Men det finns ett antal numeriska metoder för att prissätta amerikanska optioner. En antal av dessa kommer att beskrivas i uppsatsen.

I uppsatsen använder jag likhetstecken fast att det är en approximativ relation som gäller, men jag tror att det framgår av texten när det är en approximativ relation respektive då likhet råder.

BLACK AND SCHOLES PARTIELLA DIFFERENTIALEKVATION

Jag tar här upp Black och Scholes modell och dess antaganden, beskriver när det är ”optimalt” att utnyttja en amerikansk option före slutdagen och ger en beskrivning av värdet för en amerikansk option som ett optimeringsproblem. Anledningen till att jag beskriver Black och Scholes modell är att de andra numeriska metoderna bygger helt eller delvis på samma antaganden. En av komponenterna i vissa numeriska metoder är värdet för en europeisk option givet av Black och Scholes formel.

Black och Scholes (B-S) modell bygger på antagandena att aktörerna på marknaden är vinstmaximerande, marknaden är friktionslös d.v.s. det existerar inga transaktionskostnader, inga skatter, ingen restriktion för korta positioner[1] och alla tillgångar är delbara. Modellen förutsätter också att varje investerare tror han kan sälja och köpa hur många andelar av en tillgång han vill utan att detta påverka priset, d.v.s. ”competitive” marknad. Vidare görs antagandet att aktien S_t, subscript *t* är tiden, följer följande prisprocess, en så kallad geometrisk/exponentiell brownsk rörelse (GBM)

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

där W_t är en standard brownsk rörelse. Vidare existerar en obligation som följer prisprocessen

$$d\beta_t = r\beta_t dt$$

där ingen slumpterm finns med så obligationen följer en deterministisk prisprocess. Vad Black-Scholes visade var att en options värde $F(S,t)$ satisfierar följande partiella differential ekvation, PDE,

$$-rF(S,t) + F_t(S,t) + rSF_S(S,t) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS}(S,t) = 0$$

och löste den med avseende på randvärdesvillkoren för en europeisk option. Där värdet *F* är en funktion av aktiekursen *S* vid tidpunkten *t* och löptiden. Slutdagen *T* antas vara fixt, givet av optionskontraktet, medan värderingstidpunkten *t* kan variera. Då löptiden ges av slutdagen *T* minus värderingstidpunkten *t*, där $t \le T$, användes endast värderingstidpunkten som indata, men underförstått finns en fix slutdag för kontraktet som inte uttrycks explicit. Värdet för optionen kommer genomgående att uttryckas på detta sätt om inget annat anges. Anledningen till att inte aktiekursens tidpunkt skrivs ut är att den överensstämmer med värderingstidpunkten, så subscript *t* har rationaliserats bort. (Vilket också är det vanliga skrivsätt i de här sammanhangen.)

Det finns ingen känd analytisk lösning för en amerikansk säljoption $P(S,t)$ med randvärdesvillkoren 1-5 (se Cox-Rubinstein (1985), kap 4 eller Merton (1973))

[1] En kort position har investeraren då han har en negativ exponering av tillgång, så om tillgångens pris går ner tjänar han på positionen och det om vända om den går upp.

1. $P(S_T, T) = \max(K - S_T, 0)$;
2. $P(S_t, t) \geq \max(K - S_t, 0)$;
3. $P(S_t, t) \leq K$;
4. $P(S_t, t) \geq 0$;
5. $\lim_{S_t \to \infty} P(S_t, t) = 0$

där K är optionens lösenpris, t värderingstidpunkten, S är aktiekursen vid tidpunkten t och T är optionens slutdag. Någon form av numerisk lösningsteknik måste begagnas för att lösa PDE:n. För de ovanstående fem vilkoren har tiden för aktiekursen angivits. Detta kommer inte att göras generellt i den nedanstående texten.

För en amerikansk köpoption $C(S,t)$ är situationen annorlunda. Om aktien inte ger någon utdelning under optionens löptid är det aldrig optimalt, för en investerare som är vinstmaximerande, att utnyttja lösenrätten före tidpunkten T. Vilket framgår av följande proposition, tagen från (Cox-Rubinstein, (1985), kap 4-2). Värdet av en köpoption är aldrig mindre än det största av följande tal

a) noll,
b) aktiekursen minus lösenpriset,
c) aktiekursen minus nuvärdet av lösenpriset minus nuvärdet av de maximala utdelningarna D^+ som sker under optionens löptid.

Dessutom är värdet aldrig större än aktiekursen,

$$S_t \geq C(S,t) \geq \max\left(0,\ S_t - K,\ S_t - Kr^{-t} - D^+\right).$$

Där D^+ är nuvärdet av de uppskattade maximala utdelningarna under optionens löptid. Propositionen leder fram till att priset för en amerikansk köpoption är detsamma som för en europeisk köpoption, om aktien ej ger någon utdelning. I de fall då utdelningen är känd på förhand finns det också analytiska lösningar till den amerikanska köpoptionen se Hull, (1993), sid. 244-246.

Cox-Rubinstein ((1985), kap 4-2) bevisar också när det är optimalt att lösa en amerikansk köpoption.

a) En köpoption ska aldrig utnyttjas förrän vid optionens slutdag eller just innan utbetalningen av en utdelningen.
b) Om nuvärdet av de maximala utdelningarna D^+ är mindre än det, med avseende på tid, motsvarande nuvärdet av räntan som kan tjänas på lösenpriset vid varje tidpunkt fram till slutdagen är det aldrig optimalt att utnyttja optionen före slutdagen.

En amerikansk säljoption är svårare att värdera än en amerikansk köpoption eftersom det kan vara optimalt att utnyttja säljoptionen när som helst under löptiden. I princip, måste vid varje tidpunkt villkoret $P(S,t) \geq \max\left(0,\ S_t - K\right)$ kontrolleras. I kap. 4-3 visar Cox-Rubinstein inom vilka gränser som säljoptionens pris måste hålla sig inom, för det inte ska existera möjligheter till arbitrage. Priset för en säljoption är aldrig mindre än det största av talen

a) noll.
b) lösenpriset minus aktiekursen,
c) nuvärdet av lösenpriset plus nuvärdet av de minsta utdelningarna D^- som betalas ut under optionens löptid minus aktiekursen,

Värdet är aldrig större än lösenpriset, så följande olikhet gäller

$$K \geq P(S,t) \geq \max\left(0,\ K - S_t,\ D^- + Kr^{-t} - S_t\right)$$

Där D^- är nuvärdet av de minimala uppskattade utdelningarna under optionens löptid. De bevisar också: Om det existerar en period $[t,t']$, där $t' \leq T$ och nuvärdet av de minsta utdelningarna som betalas ut under perioden, vid varje tidpunkt, är större än nuvärdet av räntan som intjänas på lösenpriset under perioden, då ska säljoptionen aldrig utnyttjas mellan tidpunkterna *t* och t'.

Detta resultat kommer att hänvisas till i uppsatsen.

Nedanstående notation kommer att användas i uppsatsen.

$C(S,t)$ är värdet på en amerikansk köpoption;
$c(S,t)$ är värdet på en europeisk köpoption;
$P(S,t)$ är värdet på en amerikansk säljoption;
$p(S,t)$ är värdet på en europeisk säljoption;
S är aktiekursen;
T är optionens slutdag;
t är tidpunkt för värderingen av optionen;
σ är volatiliteten för optionen;
r är den riskfria räntan;
S_t är aktiekursen vid tidpunkten *t*.

Black och Scholes prissättingsformel för en europeisk köpoption är

$$c(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

och $N(\cdot)$ är normalfördelningsfunktionen. Värdet för den europeiska säljoptionen ges av sälj-köp paritetet $p = S + c + e^{-r(T-t)}$ där räntan är uttryckt som kontinuerlig ränta.

Värderingsproblemet för en amerikansk option går också att betrakta som ett optimeringsproblem. Låt X_t vara utbetalningsfunktionen/processen för en amerikansk option, i säljoptionsfallet är $X_t = (K - S_t)^+$ och $\Xi_{t,T}$ är mängden av stopptider som antar sina värden i intervallet $[t,T]$. Då ges värdet för den amerikanska optionen av

$$F_t^{\tau} = \sup_{\tau \in \Xi_{t,T}} \mathrm{E}_t^Q \left(\varphi_{t,T} X_{\tau} \right)$$

där **Q** är martingalemåttet, $\varphi_{t,T} = \exp\left(\int_t^T - r_s ds \right)$ och r_s är den riskfria räntan. Se Duffie (1992) för vilka tekniska villkor som måste vara uppfyllda för att det ska existera en unik stopptid τ^* som löser optimeringsproblemet och att X_{τ^*} har ändligt väntevärde under måttet **Q**.

Ovanstående formulering av värderingsproblemet leder också fram till att $\mathbf{R} \times [t,T]$ går att dela upp i två delmängder, lösenregionen och fortsättningsregionen. Om aktiekursen S_t är i lösenregionen ska optionen utnyttjas direkt. I annat fall ska den inte utnyttjas. Problemet är bara att i de flesta fallen är det väldigt svårt att bestämma dessa regioner. Men för en amerikansk säljoption skiljs dessa regioner åt av den optimala lösengränsen S_t^*. Om $S_t > S_t^*$ ska inte säljoptionen utnyttjas och om $S_t \le S_t^*$ ska den utnyttjas direkt. Vidare är S^* en växande kontinuerlig differentierbar funktion för en amerikansk säljoption. Återigen är problemet att det i praktiken är svårt att bestämma S^*. Nedan kommer jag att redovisa några av de förslagna approximationerna av S^*. En väsentlig del av värderingsproblemet är att bestämma om optionen ska utnyttjas direkt eller inte.

Oberoende av varandra visade Carr m. fl. (1992), Kim (1991) och Jacka (1991) att en amerikansk säljoption går att dela upp i två olika delar, dels det motsvarande värdet av en europeisk säljoption och dels premien för möjligheten att kunna utnyttja optionen innan slutdagen.

Om aktiekursen befinner sig i fortsättningsregionen för den amerikanska säljoptionen ges värdet för säljoptionen av

$$P(S,t) = p(S,t) + rK \int_t^T e^{-rs} N\left(\frac{\ln(S_s^* / S) - \rho_2 s}{\sigma \sqrt{s}} \right) ds,$$

där $\rho_2 = r - \frac{\sigma^2}{2}$ och $N(\cdot)$ är normalfördelningen. Den ovanstående uppdelningen är tagen från Carr m. fl. (1992). Problemet med den här formel är att man inte i förhand fårhand vet om aktiekursen befinner sig i fortsättningsregionen eller inte.

NUMERISKA METODER

Här tar jag kortfattat upp ett antal artiklar, som beskriver numerisk värdering av amerikanska optioner. Några lite mer ingående. Vissa av artiklarna beskriver bara värdering av amerikanska säljoptioner, eftersom det inte existerar någon analytisk lösning för en amerikansk säljoption.

Jag har gjort en egenhändig klassificering av metoderna i tio klasser. Inom varje klass beskriver jag metoderna i kronologisk ordning. Men utvecklingen inom varje klass beror delvis på att man har anammat idéer från de andra teknikerna. Så ibland nämner jag en artikel vilken kommenteras längre fram i texten.

Träd Modeller

Cox-Ross-Rubinstein (1979) (C-R-R)

Cox-Ross-Rubinstein modellen kan betraktas på två olika sätt. Antingen som en diskret approximation av B-S modell eller som en egen modell av en akties prisprocess och/eller en options prisprocess. Processerna är diskreta och mellan varje tidpunkt kan processen bara anta ett av två möjliga tillstånd. Om $S_{t_{i-1}}$ är aktiens pris vid t_{i-1} kan aktiekursen S_{t_i} anta värdet $uS_{t_{i-1}}$ med sannolikheten p och värdet $dS_{t_{i-1}}$ med sannolikheten $1-p$ vid tidpunkten t_i. Villkoret $u > r > d$, där r är räntan, måste vara uppfyllt för att inte en trivial möjlighet till arbitrage ska existera. En aktie kan anta ett av följande pris vid olika tidpunkter.

Tid	Pris
t_0	S_{t_0}
t_1	dS_{t_0}, uS_{t_0}
t_2	$d^2S_{t_0}$, duS_{t_0}, $u^2S_{t_0}$
t_3	$d^3S_{t_0}$, $d^2uS_{t_0}$, $du^2S_{t_0}$, $u^3S_{t_0}$
:	: :

En option följer en liknande prisprocess.

Antag att C är en köpoption vars lösenpris är K och att slutdagen är om en period, alltså $t = t_0 < t_1 = T$. Jag skriver inte ut tiden explicit här. Om investeraren är vinstmaximerande, så antar optionens värde vid periodens slut, ett av de två värdena $C_u = \max(uS - K, 0)$ respektive $C_d = \max(dS - K, 0)$. Det är möjligt att konstruera en portfölj bestående av den underliggande aktien och av riskfria obligationer. Där Δ är antalet aktier, B är antalet obligationer. Portföljens vikter måste uppfylla följande lineära system, vid periodens slut.

$$\Delta uS + rB = C_u$$
$$\Delta dS + rB = C_d$$

vilket ger följande portföljvikter

$$\Delta = \frac{(C_u - C_d)}{(u-d)S} \quad \text{och} \quad B = \frac{(uC_d - dC_u)}{(u-d)r}.$$

Vid tidpunkten t_0 kan inte $C < (\Delta S + B)$, för om så är fallet existerar det en möjlighet till arbitrage. Detta följer av arbitragestrategin sälj portföljen och köp optionen. Det går ej att sätta likhetstecken mellan C och $\Delta S + B$ vid tidpunkten noll. Om $(\Delta S + B) < C < (S - K)$ går det ej att göra en arbitragevinst genom att sälja optionen och köpa portföljen, eftersom den som köper optionen kommer att utnyttja den direkt. Innehavaren erhåller beloppet $S - K$ om han säljer aktien direkt och kan köpa portföljen $\Delta S + B$ och får dessutom pengar över. Utställaren är den som skapar möjligheten till arbitrage. Optionens pris vid tidpunkten noll är därför $\max(\Delta S + B,\ S - K)$. Om räntan är positiv, så är $(S - K) \le (\Delta S + B)$.

Definiera

$$q := \frac{r-d}{u-d}$$

och

$$C^* := \frac{1}{r}(qC_u + (1-q)C_d) = \Delta S + B.$$

Om $uS \le K$ så är $S < K$ och $C^* = 0 \Rightarrow C^* > (S - K)$ och om $K \le dS$ är $C^* = \frac{1}{r}(quS + (1-q)dS) - (K/r) = \frac{1}{r}((\frac{r-d}{u-d}u + \frac{u-r}{u-d}d)/S) - (K/r) = S - (K/r) > S - K$. Då $uS > K > dS$ är $C^* = q(uS - K)/r$ och när är $C^* > (S - K)$. Antag att $r > 1$, olikheten går då att skriva om till formen $(r-q)K > (rS - quS) = (r(u-d) - u(r-d))S/(u-d) = \frac{u-r}{u-d}dS = (1-q)dS$ då $K > dS$ följer att $C^* > (S - K)$, så olikheten $(S - K) \le (\Delta S + B)$ gäller.

Utvidgning till flera perioder sker på analogt sätt genom att man vet optionens värde vid de olika tillstånden på slutdagen. Dessa värden använder man för att beräkna optionens värde vid de olika tillstånden vid nästa tidpunkt ”i trädet”. Detta upprepas tills dess att startdagen nås.

Om aktien ger utdelning antar C-R-R, att företaget följer en utdelningspolicy som ger en konstant avkastning δ. Detta medför att en uppgång följd av en nedgång resulterar i samma tillstånd ”i trädet” som vid en nedgång följd av en uppgång.

Under antagandet att företaget istället delar ut ett konstant belopp under optionens löptid, ger i allmänhet inte en uppgång, följd av en nedgång samma tillstånd ”i trädet” som en nedgång följd av en uppgång. Antalet tillstånd ökar vid konstant utdelning och resulterar således i en mer beräkningsintensiv algoritm. En optionsvärderingen går att göra efter samma princip som ovan.

Antag att δ och v_k är kända på förhand, där $v_k = 1$ om aktien ger utdelning under perioden *k*, annars är $v_k = 0$, samt att *n* perioder återstår för optionen. Låt $V(n,i)$ vara antalet utdelningar under de $n - i$ nästa perioderna, så $V(n,i)$ uppfyller följande relation

$$V(n,i) := \sum_{k=0}^{n-i} v_k$$

$C(n,i,j)$ är värdet för köpoptionen för $n-i$ perioder från värderingstidpunkten givet att aktiens nuvarande pris *S* har ändrats till $u^j d^{n-i-j}(1-\delta)^{V(n,i)} S$ där $j = 0,1,2,...,n-i$. Värdet för optionen beräknas sedan genom att man bestämmer optionsvärdena vid slutdagen i de olika tillstånden, så

$$C(n,0,j) = \max(0,\ u^j d^{n-j}(1-\delta)^{V(n,0)} S - K) \qquad \text{för} \quad j = 0,1,.....,n .$$

Och generellt erhålls värdet för *i* perioder innan slutdagen av

$$C(n,i,j) = \max\left(u^j d^{n-i-j}(1-\delta)^{V(n,i)} S - K,\ \tfrac{1}{r}\left[pC(n,i-1,j+1) + (1-p)C(n,i-1,j)\right]\right)$$
$$\text{för} \quad j = 0,1,....,n-1 .$$

Man börjar vid slutdagen och arbetar sig tillbaka till starttidpunkten. Alla värden som behövs vid nästa period får man från föregående förutom *u, d* och r. C-R-R delar upp löptiden i *n* stycken lika långa tidsperioder $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, *i* = 1,….,*n*, och sätter *u, d* och *r* till

$$d := \frac{1}{u} \qquad u := \exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right) \qquad r := (r_{års})^{\Delta t}$$

σ är aktiens volatilitet, $r_{års}$ är räntan uttryckt på års basis och *r* är period räntan. Om parametrarna väljs på det här viset erhålls konvergens mot B-S modell i det asymptotiska fallet.(Obs, parametrarna kan väljas på andra sätt också för att få konvergens mot B-S modell). Är den första termen större i maxuttrycket är det optimalt att lösa optionen direkt.

Säljoptionen värderas enligt samma princip, men vid slutdagen blir optionens värde i de olika tillstånden lika med

$$P(n,0,j) = \max(0,\ K - u^j d^{n-j}(1-\delta)^{V(n,0)} S) \quad \text{för} \quad j = 0,1,2,....,n .$$

Liknande förändring vid de andra $P(n,i,j)$.

Rendleman – Bartter (1979) (R-B)

Ungefär samtidigt med C-R-R kom R-B på samma teknik för att värdera optioner. Men R-B härledde sin modell på ett annat sätt, och jag anser att deras härledning är på sätt och vis generellare än C-R-R:s modell. Fast R-B:s parameterestimering är omständigare. De förutsätter också att optionen redan handlas så att de kan köpa och sälja optionen när de dynamiskt ändrar replikeringsportföljen. C-R-R:s metod går att generalisera så att den gäller för samma process som i R-B modellen. Det är också enkelt att ändra i R-B:s modellen så att den dynamiska förändringen i portföljen görs genom att man handlar i aktien istället för optionen. Slutsatsen blir att jag tycker att de är mer eller mindre samma modell. Jag kommer ändå att beskriva R-B:s härledning.

R-B antar att aktien ändrar sig bara vid diskreta tidpunkter t_i. Under perioden $[t_i, t_{i+1}]$ kan aktiens kurs anta ett av två möjliga tillstånd. Då aktien värde ökar respektive minskar är avkastningen $\mathrm{H}_{t_i}^{+}$ respektive $\mathrm{H}_{t_i}^{-}$. Analogt gäller samma för optioner, där optionens värde vid periodens slut är antingen $V_{t_i}^{+}$ om aktien går upp och $V_{t_i}^{-}$ om den går ner. Vad R-B insåg, givet antagandena om processerna, var att det går att skapa en riskfri portfölj. Den har samma värde vid de båda tillstånden. Arbitrageprissättningens mantra ger att avkastningen för portföljen måste vara lika med den riskfria räntan.

R-B konstruerar sin portfölj genom att investera en krona i aktien och köper α enheter av optionen till priset $P_{t_{i-1}}$, α väljs så att

$$\mathrm{H}_{t_i}^{+} + \alpha V_{t_i}^{+} = \mathrm{H}_{t_i}^{-} + \alpha V_{t_i}^{-} \qquad (*)$$

Vilket ger

$$\alpha = \frac{\mathrm{H}_{t_i}^{-} - \mathrm{H}_{t_i}^{+}}{V_{t_i}^{+} - V_{t_i}^{-}}$$

och om $\alpha < 0$ har optioner utställts. Vid tidpunkten t_i är portföljens värde $1 + \alpha P_{t_{i-1}}$ och portföljens värde vid periodens slut ges av en av sidorna i ekvationen ovan (*). Då portföljens avkastning är lika med den riskfria räntan *r*, medför det att

$$(1 + \alpha P_{t_{i-1}})r = \mathrm{H}_{t_i}^{+} + \alpha V_{t_i}^{+}$$

och

$$P_{t_{i-1}} = \frac{V_{t_i}^{+}(r - \mathrm{H}_{t_i}^{-}) + V_{t_i}^{-}(\mathrm{H}_{t_i}^{+} - r)}{(\mathrm{H}_{t_i}^{+} - \mathrm{H}_{t_i}^{-})r}.$$

P_{t_i} är kostnaden för att ska replikeringsportföljen vid de olika noderna, vilken nod det är framgår inte av funktionen. Då en amerikansk option kan utnyttjas vid varje tidpunkt t_i ges värdet för optionen av $V_t = \max(P_t, S_t - K)$ för en köpoption och $V_t = \max(P_t, K - S_t)$ för en säljoption. Sedan används samma metod som i C-R-R modellen. Algoritmen börjar vid optionens slutdag, där värdet för optionen är känt för de olika tillstånden. Sedan arbetar man sig bakåt ”i trädet” tills startpunkten nås.

Om antagandet görs att den relativa prisförändringen för aktien är konstant under optionens löptid, föreslår R-B att H^{+} och H^{-} väljs på följande sätt

$$\mathrm{H}^{+} = \exp\left(\frac{\mu}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

och

$$H^{-} = \exp\left(\frac{\mu}{N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

Där $\mu = r - \sigma^2/2$, σ är aktiens volatilitet och N är antalet perioder.

Breen ”Accelerated Binomial” (1991)

Breen använder sig av samma teknik som Geske - Johnson (G-J) (1984) (beskrivs nedan), fast han tillämpar den på C-R-R modellen. Han antar att aktien inte ger någon utdelning och att den binomiala modellen består av *n* perioder. Breen konstruerar sedan en följd av optionsvärden $\{P_i\}_{i=1}^{n}$. Där P_1 går endast att utnyttja vid tidpunkten *T*, P_2 har två lösendagar vid $(T-t)/2$ och *T*, P_3 har tre lösendagar $(T-t)/3,\ 2(T-t)/3$ och *T* och så vidare. Sedan använder Breen Richardsons extrapolation för att approximera värdet för en amerikansk option. Richardsons extrapolation är en teknik för att snabba upp konvergensen av en följd mot det korrekta värdet. Exempelvis om endast tre värden från följden används fås approximationen

$$P = P_3 + \tfrac{7}{2}(P_3 - P_2) - \tfrac{1}{2}(P_2 - P_1)\,.$$

C-R-R:s binomial modell kräver att $(n+1)^2$ stycken nodvärden beräknas, medan ”Accelerated Binomial” kräver att endast 4*n*+10 värden beräknas. Detta värde är antingen värdet för lösen vid noden eller det riskneutrala väntevärdet från föregående period.

För en option, utställd på en aktie med utdelning under optionens löptid, föreslår Breen samma teknik som G-J vid motsvarande fall (se nedan).

Tian (1993) Trinomial modell

Boyle (1986) var den första som beskrev en options värderingsmodell där den underliggande tillgången och optionen följer en trinomial process (beskrivs nedan). Jag beskriver endast Tians två modeller. Men de bygger på samma princip som Boyles modellen. Det som skiljer de åt är hur parmetrarna väljs för trädet.

Trinomial modell: I en sådan modell antar aktiekursen ett av tre möjliga tillstånd vid nästa period mot två i binomial fallet. Optionens löptid delas in i n stycken intervall, där varje intervall har lika längd Δt. Givet S_{t_i} $(i = 0,1,....,n-1)$ antar aktiekursen ett av följande tre värden i nästa period, antingen upp till uS_{t_i}, mellan värdet mS_{t_i} eller ner till dS_{t_i}. Där $u > m > d > 0$, $u > 1$ och $d < 1$.

Modellen har sex stycken parametrar u, m, d, p_1, p_2 och p_3 där p_i är sannolikheterna för de olika rörelserna i trädet, alltså p_1 är sannolikheten att nästa rörelse blir uppåt i trädet osv. För att trinomial processen ska konvergera mot B-S modellens prisprocess i gränsfallet då $n \to \infty$ måste följande villkor vara uppfyllda

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \qquad 0 < p_1, p_2, p_3 < 1$$
$$up_1 + mp_2 + dp_3 = M, \qquad M = \exp(r\Delta t)$$
$$u^2 p_1 + m^2 p_2 + d^2 p_3 = M^2 V, \qquad V = \exp(\sigma^2 \Delta t).$$

Ett annat naturligt villkor är att

$$ud = m^2$$

för att minska antalet noder som trädet antar från $(3^{n+1} - 1)/2$ till $(n+1)^2$.

Vidare föreslår Tian i sin första modell också att villkoret $p_1 = p_2 = p_3$ ska vara uppfyllt. Vilket ger att parametrarna får följande form

$$p_1 = p_2 = p_3 = \tfrac{1}{3}$$
$$u = K + \sqrt{K^2 - m^2}$$
$$d = K - \sqrt{K^2 - m^2}$$
$$m = \frac{M(3-V)}{2} \qquad \text{där} \quad K = \frac{M(V+3)}{4}.$$

I sin andra modell föreslår han att trinomial processen ska ha samma tredje och fjärde moment som den motsvarande kontinuerliga processen har i B-S modellen. De två andra villkoren blir då

$$u^3 p_1 + m^3 p_2 + d^3 p_3 = M^3 V^3$$

och

$$u^4 p_1 + m^4 p_2 + d^4 p_3 = M^4 V^6.$$

Jag skriver inte ner uttrycken för parametrarna i det andra fallet. För de olika testerna av de båda modellerna, som Tian gör, visar att den andra modellen är mindre exakt än den första.

Tian föreslår också i sin artikel att parametrarna i binomial modell väljs så att den diskreta och kontinuerliga processen (B-S modell) har samma tredje moment. Första och andra momenten måste vara lika för att binomial processen ska konvergera mot den kontinuerliga. Se nedan, för parmetrarnas explicita form.

Leisen-Reimer (1996) (L-R)

De undersöker först konvergensen mot det ”korrekta värdet” för tre andra binomiala modeller. Alla bygger på C-R-R metoden men författarna har konstruerat trädet på olika vis. Priset på en europeisk köpoption enligt C-R-R ges av

$$c_n(S,t) = S_t \Phi[a; n, p'] - K r_n^{-n} \Phi[a; n, p] \qquad (*)$$

där $\Phi[a;n,p] = \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{j}(1-p)^{n-j}$ är binomial fördelningsfunktionen, *n* är antalet perioder, $r_n = \exp(r\Delta t)$

$$p = \frac{r_n - d_n}{u_n - d_n}\ , \qquad p' = \frac{u_n}{r_n} p_n\ , \qquad a = \left\lfloor \frac{\ln(K/S_t) - n\ln d_n}{\ln u_n - \ln d_n} \right\rfloor,$$ där $\lfloor\cdot\rfloor$ är heltalsdelen av talet.

De olika binomiala modellerna skiljer sig åt hur u_n och d_n väljs. L-R undersöker följande modeller.

C-R-R	**Jarrow-Rudd**	**Tian**
$u_n = \exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$	$u_n = \exp\left(\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$	$u_n = \frac{r_n v_n}{2}\left(r_n + 1\sqrt{v_n^2 + 2v_n - 3}\right)$
$d_n = \exp\left(-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$	$d_n = \exp\left(\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$	$d_n = \frac{r_n v_n}{2}\left(r_n + 1 - \sqrt{v_n^2 + 2v_n - 3}\right)$
	$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$	$r_n = \exp(r\Delta t)$ $v_n = \exp\left(\sigma^2\Delta t\right)$

L-R visar att de binomiala modellerna oscillerar runt motsvarande pris så som fastställs av B-S formeln, när antalet perioder ökar. Anledningen till det är att lösenprisets plats i trädet är oberoende av trädets utseende och att sannolikhetsmassan, som är koncentrerad till de olika slutnoderna, ändras vid varje ökning av antalet perioder.

De undersöker med vilken ”hastighet” de olika modellerna konvergerar mot B–S värde. Konvergensen sker med ordning $\rho > 0$ om det existerar en konstant $k > 0$ så att

$$\forall n \in \mathbf{N} : e_n \le \frac{k}{n^{\rho}} \quad \text{och}$$

där

$$e_n := \left| C - C_n(S,t) \right| .$$

e_n är felet för binomial modellen med *n* perioder mot B-S värde *C*.

De bevisar därefter att alla tre modellerna konvergerar med ordning 1.

L-R föreslår en metod för att förbättra konvergensen och beräkningsprestanda. I stället för att beräkna binomial fördelningen i (*) med någon av de redan föreslagna sannolikheterna, föreslår L-R att sannolikheterna ska approximeras med hjälp av normalfördelningen. De använder sig av De Moivre-Laplace sats som ”grovt” säger att $1 - \Phi[a;n,p] \approx N(h(a,n,p))$, där $N(z)$ är normal fördelningsfunktionen vars variabeln *z* bestäms av en justeringsfunktion $z = h(a,n,p)$, där a är antalet förflyttningar uppåt i trädet, *n* antalet perioder och *p* är martingale måttet. Så givet fixa a och n kan h betraktas som en funktion av p och då existerar inversen $h^{-1}(z)$ till h. Det existerar ett antal föreslagna justeringsfunktioner L-R undersöker följande tre inverser.

(A) Camp-Paulson-invers

$$h^{-1}(z) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(\frac{(9x-1)(9y-1) + 3z\left(x(9y-1)^2 + y(9x-1)^2 - 9xyz^2\right)^{-2}}{(9y-1)^2 - 9yz^2}\right)^{1/3}$$

med $x = n - a$, $y = a + 1$, z är variabel för normalfördelningen.

(B) Peizer-Pratt-Metod-1-invers (fall: $a + \frac{1}{2} = n - (a - \frac{1}{2})$, $n = 2a + 1$)

$$h^{-1}(z) = 0{,}5\,\mu\left[0{,}25 - 0{,}25\exp\left(-\left(\frac{z}{n+\frac{1}{3}}\right)^2\left(n + \frac{1}{6}\right)\right)\right]^{1/2}$$

(C) Peizer-Pratt-Metod-2-invers (fall: $a + \frac{1}{2} = n - (a - \frac{1}{2})$, $n = 2a + 1$)

$$h^{-1}(z) = 0{,}5\,\mu\left[0{,}25 - 0{,}25\exp\left(-\left(\frac{z}{n+\frac{1}{3}+\frac{0{,}1}{n+1}}\right)^2\left(n + \frac{1}{6}\right)\right)\right]^{1/2}$$

L-R använder en av ovanstående funktioner $h^{-1}(z)$ och tar som indata d_1 och d_2 från B-S formeln för att bestämma p och p'. Därefter tillämpar de villkoret $p = (r-d)/(u-d)$, som måste vara uppfyllt för att ingen arbitrage ska existera och definitionen $p' = (u/r)p$ för att bestämma u och d och får resultatet

$$p' = h^{-1}(d_1),\quad p = h^{-1}(d_2),\quad u = r(p'/p) \quad \text{och} \quad d = (r - pu)/(1-p)$$

Parametern $a(n)$ kan väljas ex ante så att lösenpriset ligger mitt i trädet. Används Camp-Paulson:s metod erhålls konvergens av ordning 1, men med konstanten ungefär lika med ett. De tre binomiala modellerna har konstanten fyra. Konvergensen för Camp-Paulson:s metod sker också monotont istället för att oscillera som fallet är med binomial metoderna.

De olika Peizer-Pratt metoderna (B och C) är i stort sätt likvärdiga. Till skillnad från de andra metoderna ger simulering resultaten att konvergensen ske med ordning två. Men deras sats för övre konvergenshastighet säger att metoderna konvergerar av ordning 1.

Binomial modell med slumpmässig tid

I en artikel från (1998) beskriver bland annat Leissen hur man konstruerar ett träd där lösenpriset alltid ligger vid en nod i trädet. Det leder till att konvergensen mot B-S värde i det europeiska fallet sker med monoton konvergens. Extrapolationsteknik är då fördelaktig att använda. Men konvergensen sker fortfarande med oscillation för den amerikanska optionen, så jag beskriver inte det trädet. Då ingen direkt förbättring erhålls i förhållande till det andra träden för den amerikanska optionen.

Leissen (1999) beskriver ett annat träd, där tidsavståndet mellan två handelsdagar i modellen är slumpmässigt. Det är ekvivalent med att de olika perioderna har slumpmässiga längder. Periodernas längd bestäms av en Poisson process.

Låt $\{\Delta x_m\}$ och $\{\lambda_m\}$ vara två reella följder där $\Delta x_m \xrightarrow{m} 0$ och $\lambda_m \xrightarrow{m} \infty$. Låt $\tau_{m,i}$ vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde $1/\lambda_m$ och $N_t^{(m)} = \max\left\{ n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \tau_{m,i} \le t \right\}$. Så $N_t^{(m)}$ är en Piossonprocess med intensitet λ_m och $N_t^{(m)}$ är antalet händelser som har inträffat till och med tidpunkt t.

Låt $\{\overline{R}_{m,i}\}$ vara en följd av oberoende lika fördelade stokastiska variabler och varje $\overline{R}_{m,i}$ är också oberoende av $N^{(m)}$. $\overline{R}_{m,i}$:s fördelning ges av

$$\overline{R}_{m,i} \sim \begin{cases} \Delta x_m, & p_m \\ -\Delta x_m, & 1-p_m. \end{cases}$$

Leisen definierar sedan slumptids binomial modellen (RTBM) genom

$$\overline{X}_t^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_t^{(m)}} \overline{R}_{m,i} \qquad \text{och} \qquad \overline{S}_t^{(m)} = \exp \overline{X}_t^{(m)},$$

där $\overline{S}_t^{(m)}$ är prisprocessen för aktien.

Därefter visar han om

$$\mathrm{E}(\overline{R}_{m,i})\lambda_m \xrightarrow{m} \mu \quad \text{och} \quad \mathrm{Var}(\overline{R}_{m,i})\lambda_m \xrightarrow{m} \sigma^2$$

där μ och σ^2 är väntevärdet respektive variansen för den kontinuerliga processen i B-S modell så konvergerar $\overline{S}_t^{(m)}$ mot den.

Genom de slumpmässiga periodlängderna får modellen en extra riskfaktor och modellen blir därför icke fullständig. (För en diskussion om det se Björk (1998) sid 105-106.) Vilket leder till att martingalemåttet ej är entydigt bestämt av modellen. Leisen föreslår följande martingalemått

$$q_m = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta x_m \qquad \text{där} \qquad \mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

och σ är variansen för den underliggande tillgången.

Om RTBM processen ska konvergera till motsvarande process i B-S modellen kan inte λ_m och Δx_m väljas oberoende av varandra. Så Leisen sätter

$$\lambda_m = \left(\frac{\sigma}{\Delta x_m}\right)^2 .$$

Värdet för en amerikansk säljoption, där den underliggande tillgången inte ger någon utdelning, beräknas på följande vis. Låt $\Psi_n^{(m)}$ vara värdet för en amerikansk säljoption beräknat i en n perioders binomial modell med parametrarna

$$(u_m, d_m, r_m, q_m) = \left(\exp(\Delta x_m),\ \exp(-\Delta x_m),\ \mathrm{E}\left(\exp(-r\tau_{m,1}) \;\middle|\; N_T^{(m)} = n\right),\ q_m \right)$$

där q_m är som ovan. När Leisen beräknar $\Psi_n^{(m)}$ byter han ut $\mathrm{E}\left(\exp(-r\tau_{m,1}) \;\middle|\; N_T^{(m)} = n\right)$ mot $\exp\left(-r(T-t)/n\right)$. Värdet för en amerikansk säljoption ges av

$$P_m = e^{-\lambda_m (T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_m (T-t)\right)^n}{n!} \Psi_n^{(m)} \qquad \text{där } m \text{ är fixt.}$$

Om $\Delta x_m \xrightarrow{m} 0$ så konvergerar P_m till motsvarande värde i B-S modellen.

När Leisen implementerar modellen beräknar han summan P_m upp till och med $2\lfloor \lambda_m T \rfloor$ där $\lfloor \cdot \rfloor$ är heltalsdelen av talet. Han föreslår också följande extrapolationsteknik, för att minska antalet termer i summan som behövs beräknas för att få ett tillförlitligt värde,

$$P_{(m_1, m_2)} = \frac{\lambda_{m_2} P_{m_2} - \lambda_{m_1} P_{m_1}}{\lambda_{m_2} - \lambda_{m_1}} .$$

Antalet beräkningar i RTBM är av ordning n^3 jämfört med C-R-R där ordningen är av n^2. Men konvergensen verkar ske med ordning två istället för ordning ett i C-R-R modellen. Leisen ger inget formellt bevis för sitt påstående utan hänvisar till simuleringar.

Binomial med Black-Scholes (BBS)

Broadie och Detemple (1996) beskrev denna metod. Den är som C-R-R metoden förutom då man arbetar sig bakåt i trädet då man byter ut ”fortsättningsvärdet” i maxuttrycktet till motsvarande Black och Scholes värde i tidssteget före sluttidpunken. Fördelen med att byta värdet tycks vara att man får en snabbare konvergens mot det korrekta värdet. Detta oscillerar mycket mindre än vad som händer i den ursprungliga modellen. Vidare föreslår de att man använder BBS tillsammans med Richardsons extrapolation. Detta förbättrar metodens exakthet och snabbhet, vilket framgår av resultaten i utvärderingen.

Control variate teknik

Hull-White modellen (1988) (H-W)

I samband med Monte Carlo simulering av optionsprissättning föreslog Boyle 1977 denna teknik. Vad H-W visar är hur tekniken kan användas i samband med träd-tekniken.

Control variate tekniken kräver att det finns två snarlika optioner A och B på den underliggande tillgången och att samma numeriska teknik går att använda för att värdera båda optionerna och att t ex B har en tillförlitlig värdering via en annan teknik. Sätt

C_B : kända värdet för B
C_A^* : estimerade värdet för A enligt den numeriska tekniken
C_B^* : estimerade värdet för B enligt den numeriska tekniken
σ_A : standard felet för C_A^*
σ_B : standard felet för C_B^*
ρ: korrelationen mellan C_B^* och C_A^*

En ny estimering av A:s värde ges av

$$\hat{C}_A = C_B + (C_A^* - C_B^*)$$

Vilken har standardfelet

$$\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B}$$

som är mindre än σ_A om $\rho > \sigma_B / 2\sigma_A$.

För amerikanska optioner begagnar H-W tekniken på ett träd av C-R-R typ. B-optionen antas vara en europeisk option och det riktiga värdet ges av B-S formeln. Samma träd används till att värdera de båda optionerna. H-W påstår att felen för prisestimeringarna för två snarlika optioner har en tendens att bli för högt korrelerade.

De visar också att samma teknik går att använda för att estimera de olika derivatorna med avseende på optionens parametrar. Låt ϕ vara parametern i fråga. Beräkna $C_A^*(\phi_0)$, $C_B^*(\phi_0)$, $C_A^*(\phi_0 + \Delta\phi_0)$ och $C_B^*(\phi_0 + \Delta\phi_0)$ med hjälp av trädet. Sätt

$$D_A^* = \frac{C_A^*(\phi_0 + \Delta\phi_0) - C_A^*(\phi_0)}{\Delta\phi_0}$$

detsamma för D_B^* och där D_B är en tillförlitlig estimering av B:s derivata med avseende på parametern, via exempelvis B-S formel. En ny estimering av D_A ges av

$$\hat{D}_A = D_B + \left(D_A^* - D_B^*\right)$$

I punkten ϕ_0. Där den nya estimeringen har standardfelet

$$\frac{1}{\Delta\phi_0} = \sigma_A^* \sqrt{2 - 2\rho_\Delta(\phi_0, \Delta\phi_0)}$$

där σ_A^* är standardfelet för $\hat{C}_A$ och $\rho_\Delta(\phi_0, \Delta\phi_0)$ är korrelationen mellan $\hat{C}_A(\phi_0 + \Delta\phi_0)$ och $\hat{C}_A(\phi_0)$.

Optionspriset som en funktion av undre och övre begränsningar

Johnson (1983)

Han utgår från relationen $p(K) \le P(K) \le p(Ke^{r(T-t)})$, där $p(K)$ är värdet för en europeisk säljoption med lösenpriset *K*. Priset beror också här på aktiekursen och löptiden men det sambandet skrivs inte ut explicit. *P(K)* är motsvarande värde för en amerikanska säljoption. Den sista olikheten hämtar han från Margrabe (1978) som säger att en amerikansk option vars lösenpris ökar med den riskfria räntan aldrig är optimal att utnyttja innan slutdagen, så dess värde blir detsamma som en europeisk säljoption med lösenpriset $Ke^{r(T-t)}$.

Därefter uttrycker Johnson $P(K)$ som ett vägt medel av $p(K)$ och $p(Ke^{r(T-t)})$ genom

$$P(K) = \alpha p(K) + (1-\alpha)p(Ke^{r(T-t)}).$$

Differensen $P(K) - p(K)$ mellan en amerikansk och en europeisk option är ej konstant, när den underliggande tillgången eller när värderingstidpunkten ändrar sig ändras differensen också mellan optionerna. Detta innebär att α måste vara en funktion av en eller flera variabler. För skattning av funktionen använder sig Johnson av regressionsteknik. Data till skattningen av funktionen tar han från tabellerna i Parkinson (1979) och Cox-Rubinsteins bok (1985). Från de skattade optionsprisena föreslår han följande funktion, som är en funktion av produkten av löptiden $T - t$ och räntan *r*

$$\alpha\left(r(T-t)\right) = \left(\frac{r(T-t)}{a_0 r(T-t) + a_1}\right)^L.$$

Där

$$L = \frac{\ln(S / S_t^*)}{\ln(K / S_t^*)}$$

och S_t^* är den optimala lösengränsen för optionen, för värden under S_t^* ska optionen utnyttjas direkt. Vilket leder till att en ny funktion måste skattas, som sker genom

$$S^* = K\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^m \qquad \text{där} \quad \gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$$

och

$$m\left(\sigma^2 (T-t)\right) = \frac{\sigma^2 (T-t)}{b_0 \sigma^2 (T-t) + b_1}$$

är en funktion av produkten av aktiens volatilitet och löptiden $T-t$. Parametrarna a_0, a_1, b_0 och b_1 tar Johnson fram genom regression där han använder sig av data från Parkinson (1979). Formeln gäller bara för en aktie som ej ger någon utdelning.

Broadie-Detemple modeller (1996)

Broadie-Detemple använder sig av samma teknik som Johnson (1983), men på ett mycket mer sofistikerat sätt. De konstruerar undre och övre begränsningar för optionspriset och uttrycker sedan optionspriset som en funktion av gränserna. För en amerikansk köpoption där den underliggande tillgången antas följa prisprocessen,

$$dS_t = S_t (r-\delta)dt + \sigma S_t dW_t$$

Tillgången ger följaktligen en kontinuerlig utdelning δ. Den optimala lösenpolicyn ges av funktionen S_t^*. Som undre gräns, för optionens värde, använder de ”capped call” optioner. Vilka har utbetalningsfunktionen $\max\left(\min(S_t, L) - K, 0\right)$ där L är taket och optionen är europeisk om $S_t < L$ men måste utnyttjas direkt då S_t når L. Värdet för en sådan option betecknas $C_t(S_t, L)$. PDE:n för en ”capped call” har en analytisk lösning.

Då $c(S,t) = \lim_{L \to \infty} C_t(S_t, L)$, för då $L \to \infty$ blir $C_t(S_t, L)$ en vanlig europeisk option, och eftersom en amerikansk köpoption kan utnyttjas när som helst och då vid $S_t = L$ följer följande olikhet $C_t(S_t, L) \le C(S,t)$ som gäller för alla L. De väljer som undre begränsning

$$C^l(S,t) := \max_L C_t(S_t, L) \le C(S,t)$$

som är ett differential optimeringsproblem, till vilket det existerar ett antal lösningsmetoder. Om $\delta > 0$ så är också $L < \infty$ och då C^l är det maximala värdet över alla L följer att $c \le C^l$.

För att bestämma den övre begränsningen använder de sig av Kims (1990) teknik att uttrycka en amerikansk optionsvärde som en funktion av en europeisk option plus en riskpremie,

$$C(S, S^*, t) = c(S,t) + E(S, S^*, t)$$

där aktiekursen och lösengränsen är för tidpunkten *t* och randvillkoret ges av $C(S,S^*,t)=S_t^*-K \quad \forall t\in[t_0,T]$. Men istället för att bestämma randvillkoret numeriskt för ett antal punkter och sedan använda exempelvis lineär interpolation, approximerar de den optimala lösengränsen underifrån genom att lösa ekvationen $D(L,t)=0$. $D(L,t)$ är derivatan av $C_t(S_t,L)$ med avseende på *L* uträknad då *S* närmar sig *L* underifrån. L_t^*. betecknar lösningen till ekvationen $D(L,t)=0$.

B-D bevisar två satser som säger att $L_t^*\le S_t^*$ och

$$C(S,t)\le C(S,S_t^*,t):=C^u(S,t).$$

De bevisar också att skillnaden mellan undre och övre begränsningarna går mot noll, alltså

$$C^u(S,t)-C^l(S,t)\to 0$$

då något av följande fall inträffar, och de andra parametrarna är fixerade i varje enskilt fall, $T-t\to\infty$, eller $T-t\to 0$, eller $S_t\to\infty$, eller $S_t\to 0$, eller $\sigma\to\infty$, eller $\sigma\to 0$, eller $\delta\to\infty$, eller $r\to\infty$.

De föreslår följande två approximationer av en amerikansk köpoption

$$C1(S,t)=\lambda_1 C^l(S,t)$$

och

$$C2(S,t)=\lambda_2 C^1(S,t)+(1-\lambda_2)C^u(S,t)$$

Och kallar *C*1 för LBA (Lower Bound Approximation) och *C*2 för LUBA (Lower and Upper Bounds Approximation). Som värde på vikterna föreslår de λ_1= 1 och λ_2= 0,5 eftersom de i sina studier aldrig har träffade på ett λ_1 större än 1,0133. Vikterna kan också bestäms genom regression, så som hos Johnson (1983).

För amerikanska säljoptioner hänvisar de till McDonald och Schroder som visar följande likhet

$$C(S,K,r,\delta,t)=P(K,S,\delta,r,t)$$

Intentionen bakom likheten är att en köpoption ger rättigheten att växla pengar mot tillgången och det motsatta för säljoptionen.

Värdet uttryck som en oändlig summa

Geske – Johnson (1984) (G-J)

De antar att en aktien följer en GBM (geometrisk brownsk rörelse) och att aktien till en början ej ger någon utdelning. Därefter gör de en oändlig men uppräknerlig partition av optionens löptid, där varje delintervall har längden Δt. Sedan görs antagandet att optionen endast kan lösas vid punkterna $i\Delta t = t_i$, $i = 1,2,.......$. De använder optionsteorins huvudprincip, att vid värdering ska det riskneutrala väntevärdet av framtida kassaflöden diskonteras till nuvärdet. Vid tidpunkten t_1 inträffar ett kassaflöde om $S_{t_1} < S^*_{t_1}$, där $S^*_{t_1}$ är aktiens optimala lösengräns. Man integrerar lösenpriset minus framtida aktiepriset över intervallet $(-\infty, S^*_{t_1})$ och tätheten är den för S_{t_1} . Detta värde diskonteras till tidpunkten *t*. Vid t_2 genereras ett kassaflöde om $S_{t_2} < S^*_{t_2}$ givet att $S_{t_1} > S^*_{t_1}$, så vid t_2 beräknas det betingade väntevärdet av $K - S_{t_2}$ givet att $S_{t_1} > S^*_{t_1}$ och så vidare för de övriga tidpunkterna.

Jag inför beteckningarna, där $N_m(d_m, R_m)$ är den *m* - dimensionella multivariativa normalfördelade integralen, d_m är de övre integrationsgränserna och R_m är korrelationsmatrisen. D_m är en *m*x*m* matris som ändrar tecken på det sista elementet i en vektor med *m* element. Sätt

$$d_{j1} := \frac{\ln(S/S_{t_j}) + (r + 0{,}5\sigma^2)\, j\Delta t}{\sigma\sqrt{j\Delta t}}$$

$$d^*_{i,1} := (\mathrm{d}_{11}, \ldots, \mathrm{d}_{i1})$$

$$d^*_{i,2} := d^*_{i,1} - (\sigma\sqrt{\Delta t}, \ldots, \sigma\sqrt{i\Delta t})$$

$$w_1 := \sum_{i=1}^{\infty} N_i(d^*_{i,1}, R^*_i) \qquad \text{där } R^*_i = D_i R_i D_i$$

$$w_2 := \sum_{i=1}^{\infty} N_i(d^*_{i,2}, R^*_i)\, e^{-ridt}.$$

Ovanstående leder då fram till följande uttryck för värdet för en amerikansk säljoption

$$P = Kw_2 - Sw_1.$$

För den numeriska implementeringen av $P = Kw_2 - Sw_1$ föreslår G-J följande metod. De konstruerar en följd av optioner $\{P_i\}$ där P_1 har en lösendag vid *T*, P_2 har två lösendagar vid $(T-t)/2$ eller *T* och P_3 har lösendagarna vid (*T-t)*/3, 2(*T-t)*/3 och *T* osv. Exempelvis ges P_2 :s värde av

$$P_2 = Ke^{-r(T-t)/2}\, N_1(d^*_{1,2}, R^*_1) - SN_1(d^*_{1,1}, R^*_1) + Ke^{-r(T-t)}\, N_2(d^*_{2,2}, R^*_2) - SN_2(d^*_{2,1}, R^*_2)$$

Där N_i, $d^*_{i,j}$ och R^*_i är som förut men uttrycket för tiden har justerats. Det optimala lösenpriset ges av

$$S^*_{(T-t)/2} = K - P(S, K, (T-t)/2, r, \sigma).$$

Följden $\{P_i\}$:s gränsvärde ska vara värdet för en amerikansk säljoption. G-J använder Richardsons extrapolation för att beräkna gränsvärdet. De använder de tre första värdena i följden och härleder följande approximation av värdet för optionen.

$$P = P_3 + 7/2(P_3 - P_2) - 1/2(P_2 - P_1)$$

Då aktien ger utdelning existerar en period innan varje utdelning D där det aldrig är optimalt att utnyttja säljoptionen. G-J föreslår då att den sista utdelningen D' väljs just så stor att optionen under hela perioden fram till D':s utdelningsdag aldrig utnyttjas. Om den faktiska utdelningen $D > D'$, väljs alla lösentidpunkter i den sista perioden. Då $D < D'$ föreslår de följande approximation

$$P(D) = P(0) + \frac{D}{D'}\left(P(D') - P(0)\right)$$

via linjär interpolation, där $P(0)$, $P(D)$ och $P(D')$ är värdet för säljoptionen då aktien inte har någon utdelning, eller en utdelning D respektive utdelning D'. Den underliggande aktiekursen, löptiden och de andra parametrarna är de samma förutom utdelningen för funktionerna.

Bunch-Johnson (1992) (B-J)

Använder samma princip som G-J. Men de föreslår att Richardsons extrapolation används på två värden istället, vilket ger

$$P = 2P_2 - P_1$$

Den ända skillnaden mellan G-J och B-J är hur P_2 väljs. Den första möjligheten till lösen väljs från $\{(T-t)/8, \ldots\ldots, 7(T-t)/8\}$ så att P_2 maximeras och då kommer P:s värde närmare gränsvärdet för följden. Fördelen med metoden är att man slipper beräkna en trippelintegral vilken är mer beräkningskrävande än optimeringsproblemet.

Analytisk approximation

MacMillan (1986)

Han antar att lösningen till PDE:n för en amerikansk säljoption har utseendet

$$P(S,t) = p(S,t) + e(S,t)$$

Där $p(S,t)$ är motsvarande europeiska option. Efter ett resonemang om att jämvikts optionspriset kräver kontinuerliga funktioner följer att $e(S,t)$ är en kontinuerlig funktion och $e(S,t)$ måste uppfylla B-S PDE

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 e_{SS} + rSe_S - re + e_t = 0 \qquad (*)$$

med vissa randvillkor. De randvillkor som MacMillan skriver ned motsäger sig själva. I början av sitt papper skrev han ned följande randvillkor som en amerikansk säljoption måste uppfylla

1. $P(S_T, T) = \max(K - S_T, 0)$;
2. $P(S_t, t) \geq \max(K - S_t, 0)$;
3. $P(S_t, t) \leq K$;
4. $P(S_t, t) \geq 0$;
5. $\lim_{S_t \to \infty} P(S_t, t) = 0$

Där villkor 4), är överflödigt eftersom 2 är ett strängare villkor. Sedan ändrar han villkor 1) för $P(S,t)$ och sätter istället $e(S,T) = 0$. Vilket leder till $P(S,T) = p(S,T) = \max(K - S_T, 0)$. Därefter skriver han att man ska lösa (*) med avseende på villkoren 2) till 5). Det är märkligt för om $e(S,t) \geq \max(K - S_t, 0)$ blir det aldrig optimalt att lösa *P* under optionens löptid, för om $S_t < K$ är $p(S,t) > 0$ och detta tillsammans med villkor 2) för *e* ger att $P(S,t) > K - S_t$. Vidare då $S_t < K$ finns det ingen kontinuerlig funktion som uppfyller villkor 2) för $t < T$ och $e(S,T) = 0$. Detta innebär att villkor 2) borde vara $e(S,t) \geq \max(K - S_t - p(S,T),\ 0)$.

MacMillan antar sedan att $e(S,t)$ har formen

$$E(S,t) = g(t) f(S,g) \qquad \text{där } g(t) = 1 - e^{-r(T-t)}.$$

(*) får då utseendet

$$S^2 f_{SS} + MSf_S - \frac{M}{g}\left(1 + (1-g)g\frac{f_g}{f}\right) f = 0$$

där $M = 2r/\sigma^2$. Genom att bortse ifrån termen innehållande $(1-g)g$ erhålls en ODE av Euler typ

$$S^2 f_{SS} + MSf_S - \frac{M}{g} f = 0$$

med det karaktäristiska polynomet

$$h(\lambda) = \lambda^2 + (M-1)\lambda - \frac{M}{g} = 0$$

Funktionen *f* har den generella formen

$$f = a_1 S^{\lambda_1} + a_2 S^{\lambda_2}.$$

h har en negativ rot och en positiv för $h(0) = -(M/g) < 0$ om $r > 0$ och $h(\pm\infty) = +\infty$. (MacMillans villkor 5) ger då att $a_2 = 0$. Därefter bestäms a_1, sätt $a_1 = a$ och $\lambda_1 = \lambda$, genom att *K*-*S* måste vara tangenten till *P* vid den optimala lösengränsen. Så villkoren

$$p(S^*,t) + g(t) f(S_t^*) = K - S_t^* \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial S} p(S^*,t) + g(t) \frac{\partial}{\partial S} f(S_t^*) = -1$$

leder fram till att det optimala lösenpriset är en fixpunkt till följande ekvation

$$h'(S^*) = \frac{-\lambda(K - p(S^*))}{N(d_1) - \lambda}$$

där *N* är normalfördelningen och d_1 är som i B-S formeln för köpoptionen. Definiera

$$a = \frac{N(d_1(S^*))(S^*)^{1-\lambda}}{-\lambda g}$$

och sätt

$$A = ga(S^*)^{\lambda} = \frac{S^* N(d_1(S^*))}{-\lambda}.$$

MacMillan får således följande analytiska approximation av säljoptionens pris

$$P(S,t) = p(S,t) + A\left(\frac{S_t}{S_t^*}\right)^{\lambda}.$$

Ett år senare publicerades två snarlika modeller. Barone-Adesi och Whaley (1987) använder sig av samma teknik på en mer generell prisprocess där ett av fallen ger ovanstående resultat. Omberg (1987) bygger också i princip på samma teknik. Han antar att den optimala lösengränsen följer en förutbestämd funktion. Men till slut är han ändå tvungen att använda sig av någon numerisk fixpunktsteknik för att få fram ett värde.

Barone-Adesi och Whaley (1988) (B-A o W)

Barone-Adesi och Whaley bygger ut MacMillans modell till att omfatta fallet då aktie ger en känd utdelning under optionens löptid. Låt *D* vara utdelningen och t_D är tidpunkten då utdelningen inträffar. Då finns en period innan t_D då det ej är optimalt att lösa optionen. Låt t^* vara tidpunkten för vilken det dessförinnan kan vara optimalt att lösa optionen, t^* ges av

$$D = K(\exp(r(t_D - t^*) - 1)$$

och

$$t^* = t_D - \frac{\ln(1 + (D/K))}{r}.$$

Om $t^* < t$ är det aldrig optimalt att lösa optionen innan t_D, Inträffar lösen under optionens löptid kommer det att ske under t_D till *T*. Då $t^* > t$ finns det två perioder under vilket lösen kan vara optimalt under optionens löptid, perioderna är *t* till t^* och t_D till *T*.

Först redogörs för fallet då $t^* < t$. B-A o W använder sig samma teknik som Johnson (1983). Det vill säga undre och övre begränsningar och uttrycker optionsvärdet som ett vägt medel av begränsningarna. Jag använder samma betäckning som B-A o W för den amerikanska säljoptionen $P(S,t;D,t^*)$ där den underliggande aktien ger en utdelning *D* under löptiden. Definiera $S' = S - D\exp(-rt_D)$ och låt $P(S',t)$ vara en amerikansk säljoption värderad med MacMillans teknik och där den underliggande tillgången ej ger någon utdelning och följer GBM processen för S'. Då är $P(S',t)$ en övre begränsning för $P(S,t;D,t^*)$ och har en positiv sannolikhet att bli utnyttjad under hela optionens löptiden. Medan optionen $P(S,t;D,t^*)$ endast har lösenpremie under perioden t_D till *T*. Den under begränsningen erhålls genom att ta bort lösenpremien $e_p(S',t_D)$ för perioden *t* till t_D från $P(S',t)$. Där $e_p(S',t_D)$ definieras genom

$$e_P(S',t_D) = P^*(S',t) - p^*(S',t)$$ Där P^* och p^* har slutdagen t_D.

Den undre begränsningen blir

$$P(S',t) - e_P(S',t_D).$$

Notera att då S_t är lågt i förhållande till *K* ökar sannolikheten att $P(S,t;D,t_D)$ löses direkt efter t_D. $P(S,t;D,t_D)$ konvergerar således mot $P(S',t) - e_P(S',t_D)$. Approximationen av $P(S,t;D,t_D)$ sker genom följande formel

$$P(S,t;D,t_D) = w_1 P(S',t) + w_2\left(P(S',t) - e_P(S',t_D)\right)$$

Där w_2 är sannolikheten att *P* löses direkt efter t_D och $w_1 + w_2 = 1$. För att få fram $P(S,t;D,t_D)$:s värde måste $P(S',t_D)$ beräknas och då erhålls också det optimala lösenpriset $S^*_{t_D}$, med vilken sannolikheterna w_1 och w_2 kan beräknas genom

$$w_1 = N(-b) \quad \text{och} \quad w_2 = N(b)$$

där

$$b = \frac{\ln(S'/S^*_{t_D}) + (r - 0{,}5\sigma^2)(t_D - t)}{\sigma\sqrt{t_D - t}}$$

Det andra fallet är svårare, bl.a. därför att de 2 - dimensionella fördelningsfunktionerna behövs beräknas. Till den föregående prisformeln läggs optionen $P'(S,t)$ till som har slutdagen vid tidpunkten t^* och vikterna ändras så prisformeln blir

$$P(S,t;D,t_D) = w_1 P(S',t) + w_2\left(P(S',t) + e_P(S',t)\right) + w_3 P'(S,t)$$

där $w_1 + w_2 + w_3 = 1$, $w_3 = N(-a)$ och

$$a := \frac{\ln(S'/S^*_{t^*}) + (r - 0{,}5\sigma^2)(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}}.$$

som är sannolikheten att en option på en icke utdelande aktie blir löst vid t^* och

$$w_1 := N(a, b;\ \sqrt{t^* - t}\,/(t_D - t))$$
$$w_2 := N(a, b;\ \sqrt{t^* - t}\,/(t_D - t))$$

där $N(a, b; \rho)$ är den 2 – dimensionella normalfördelningsfunktionen och ρ är korrelationskoefficienten.

Finite Difference

Jag börjar med en kortfattad beskrivning av den allmänna tekniken, som bygger på Wilmott m. fl. (1993) kap. 16-21. Sedan tar jag upp deras föreslagna lösningsteknik för en amerikansk option. För att sedan kort kommentera de tidigare publicerade artiklarna. Det generella problemet för amerikanska optioner är att man ej vet funktionens lösningsdomän på förhand. Anledningen är att den optimala lösengränsen måste bestämmas samtidigt med lösningen av prisfunktionen.

Tekniken bygger på att man approximerar de partiella derivatorna med differenser. Om exempelvis $u(x,t)$ är en funktion av *x* och *t* ges den partiella derivatan med avseende på *x* av

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x - \delta x, t)}{\delta x} + \mathrm{O}(\delta x)$$ och den approximeras sedan genom

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x - \delta x, t)}{\delta x}$$, där δx är litet, vilken kallas för

bakåtdifferensen. Det finns flera olika sätt att approximera de partiella derivatorna t ex genom framåtdifferensen vilken ges av att $u(x - \delta x, t)$ byts ut mot $u(x + \delta x, t)$ i bakåtdifferensen. På liknade sätt approximeras de högre partiella derivatorna. Centraldifferensen ges av

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{u(x + \delta x, t) - 2u(x,t) + u(x - \delta x, t)}{(\delta x)^2}$$, vilken är av ordning $O(\delta x^2)$

Därefter delas funktionens domän in i ett nät, där nätpunkterna eller noderna har utseendet $(n\delta x, m\delta t)$. Analysen av funktionen $u(x,t)$ koncentreras till noderna i nätet. Inför notationen $u_n^m := u(n\delta x, m\delta t)$ och analogt för andra funktioner.

Sedan tas differensapproximationer för de partiella derivatorna och stoppas in i PDE:n. För varje nod erhålls en differensekvation i stället. Två viktiga begrepp i detta avseende är stabilitet och konvergens. Stabilitetsbegreppet har att göra med om differensekvationer är känsliga för små fel i indata. Ekvationerna ger upphov till ett rekursivt system och om felet förstoras vid varje ny beräkning säges systemet vara instabilt. Systemet är konvergent om differenserna konvergerar mot det rätta värdet då δx och δt går mot noll.

Wilmott m. fl. visar att Black och Scholes ekvation kan transformeras till följande (kap 21 och hänvisningar där)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

där *u* kan antingen vara en sälj- eller köpoption värde. De antar också att aktien ger en konstant utdelning. Säljoptionen har följande initial- och randvärdesvillkor

$$u(S,0) = \max\left(\exp\left(\tfrac{1}{2}(k_2 - 1)S\right) - \exp\left(\tfrac{1}{2}(k_2 + 1)S\right),\ 0\right),$$

$$u(S,t) \geq \exp\left(\tfrac{1}{4}((k_2 - 1)^2 + 4k_1)t\right)\max\left(\exp\left(\tfrac{1}{2}(k_2 - 1)S\right) - \exp\left(\tfrac{1}{2}(k_2 + 1)S\right),\ 0\right)$$

$$\lim_{S \longrightarrow -\infty} u(S,t) = 0\,,$$

där $k_1 = r/(\tfrac{1}{2}\sigma^2)$ och $k_2 = (r - D)/(\tfrac{1}{2}\sigma^2)$, *D* är den kontinuerliga utdelningen.

Problemet går att skriva om till så kallad linjär komplementär form, vilket ger

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\right) \geq 0\,, \qquad (P(S,t) - g(S,t)) \geq 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\right)\left(P(S,t) - g(S,t)\right) = 0.$$

där g är den transformerade utbetalningsfunktionen för säljoptionen ges av

$$g(S,t) = e^{\frac{1}{4}((k_2-1)^2+4k_1)t} \max\left(e^{\frac{1}{2}(k_2-1)S} - e^{\frac{1}{2}(k_2+1)S},\ 0\right).$$

Fördelen med den linjära komplementära formen är att där dyker inte det fria randvärdesvillkoret upp uttryckligen, utan bestäms efteråt av vilkoret $P(S^*,t) = g(S^*,t)$ och $P(S,t) > g(S,t)$ för $S > S^*$.

De använder sedan följande approximation av PDE:n, $0 \leq \theta \leq 1$

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\approx\frac{P_n^{m+1}-P_n^m}{\delta t}-\theta\frac{P_{n+1}^{m+1}-2P_n^{m+1}+P_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2}-(1-\theta)\frac{P_{n+1}^m-2P_n^m+P_{n-1}^m}{(\delta x)^2}$$

där $P_n^m = P(n\delta x, m\delta t)$. Då $\theta = 0$ ges den explicita differensapproximationen, $\theta = \frac{1}{2}$ ger Crank-Nicolsons approximation och $\theta = 1$ ger den implicita differensapproximationen. Villkoret $\partial P/\partial t - \partial^2 P/\partial S^2 \geq 0$ och sätts $\alpha = \delta t/(\delta x)^2$ ges följande olikhet

$$P_n^{m+1}-\alpha\theta(P_{n+1}^{m+1}-2P_n^{m+1}+P_{n-1}^{m+1})\geq P_n^m-\alpha(1-\theta)(P_{n+1}^m-2P_n^m+P_{n-1}^m)\,. \quad (1)$$

Det transformerade problemet är definierat på att oändligt intervall, så när det diskreta problemet ska beräknas måste intervallet trunkeras så att ett ändligt intervall erhålls. Sätt det trunkerade intervallet till $-x^- = -N^-\delta x \leq x = n\delta x \leq N^+\delta x = x^+$. Ovanstående problem går då att skriva på följande matris form

$$(\mathrm{A}P^{m+1}-b^m)\geq 0\,,\quad (P^{m+1}-g^{m+1})\geq 0\,,\quad (P^{m+1}-g^{m+1})\cdot(\mathrm{A}P^{m+1}-b^m)=0\,.$$

Där $b_n^m = P_n^m - \alpha(1-\theta)(P_{n+1}^m - 2P_n^m + P_{n-1}^m)$ och A är en $(N^- + N^+ - 2)$ kvadratisk, symmetrisk och trediagonal matris

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1+2\alpha\theta & -\alpha\theta & 0 & \Lambda & 0\\ -\alpha\theta & 1+2\alpha\theta & -\alpha\theta & & \mathrm{M}\\ 0 & -\alpha\theta & \mathrm{O} & \mathrm{O} & 0\\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & 1+2\alpha\theta & -\alpha\theta\\ 0 & \mathrm{K} & 0 & -\alpha\theta & 1+2\alpha\theta\end{pmatrix} \text{ och } b^m=\begin{pmatrix}b^m_{-N^-+1}\\ \mathrm{M}\\ b^m_{N^+-1}\end{pmatrix} \text{ samt liknande för de}$$

andra kolumnerna. b^m går att beräkna explicit i varje steg och de andra kolumnerna föreslår de beräknas genom en utvidgad form av SOR (Successive Over Relaxation) algoritm (se sid 328). Den föreslagna tekniken är stabil för $\theta < 1/2$ om $0 < \alpha < \frac{1}{2}(1-\theta)$ och för $1/2 \leq \theta$ är approximationen stabil om $0 < \alpha$.

Brennan och Schwartz (1977) använder sig av explicit differensapproximation direkt på Black och Scholes ekvation. Men som de nämner i sin artikel från 1978 kan approximationen vara instabil, i övrigt handlar artikeln om att differensekvationerna kan betraktas som en stokastisk process och dess konvergens till diffusionsprocessen. Wilmott m. fl. har en utförligare diskussion om det på (sidorna 288-291) och säger att approximationen kan var stabil utan att konvergera. Det maximala tidssteget för stabilitet beror endast på antalet steg i S-led men inte steglängden på dessa.

Courtadon (1982) använder sig av Crank-Nicolsons metod. Men han tillämpar medoden endast på en köpoption där den underliggande aktien ej ger någon utdelning.

Geske och Shastri (1985) undersöker fyra olika differensapproximationer. Två som bygger på att B-S ekvationen transformeras genom $y = \ln S$. De två andra bygger på att B-S ekvationen transformeras till $\partial u / \partial t = ak^{-1} \partial^2 u / \partial y^2$. Därefter undersöker de explicit och implicit differensapproximation på de två transformerade problemen.

Method of lines

Meyer och van der Hoek (1997) beskriver hur ”method of lines” kan användas vid värdering av amerikanska optioner. Metoden bygger på att den kontinuerliga tidsderivatan byts ut mot ett differenselement istället. Så det nya problemet får diskret tid. Författarna använder i sin artikel första och andra ordningens bakåtapproximation, vilket ger att problemet blir obetingat stabilt. Då endast tidsderivatan approximerars erhålls istället ett system av första ordningens differentialekvationer. Lösningarna till systemet hänger ihop genom Riccati transformationen. Differentialekvationerna är av typen begynnelse värdesproblem, vilka de löser med trapezoidal integrering över ett fast nät. Anledningen till att de använder ett fast nät är att då har de alla värdena för lösningen i nästa steg. Vid varje tidssteg, efter att de har lokaliserat mellan vilka noder som den optimala lösengränsen ligger, approximeras den med hjälp av värdena i fyra olika noder. Vilket ger att lösengränsen inte behöver ligga på en av de förutbestämda noderna.

Linjär programering

Dempster och Hutton (1996) skriver om B-S ekvation för en amerikansk säljoption till ett linjärt komplementärt problem. I vilket de sedan approximerar derivatorna med motsvarande differenselement. Detta problem har sedan ett ekvivalent linjärt program, vilket de löser med hjälp av Simplexmetoden. De senaste årens utveckling av Simplexalgoritmer gör att det är en konkurrenskraftig metod.

Numerisk integration och integral ekvationer

Parkinson (1979)

Parkinson har föreslagit en numerisk metod för att värdera en amerikansk säljoption, där den underliggande tillgången är en icke utdelande aktie och lösenpriset är $K = 1$.

Metoden bygger på att optionen approximeras med vad han kallar semiamerikanska optioner. Dessa är optioner som bara går att utnyttja under ett ändligt *N* antal tillfällen under optionslöptiden. Parkinson påstår att då $N \rightarrow \infty$ erhålls det riktiga värdet för en amerikansk option. Han delar in optionens löptid i *N* stycken delintervall $t = t_N < t_{N-1} < ..... < t_0 = T$. (Obs indexeringen är åt andra hållet här i förhållande till de andra modellerna.) Med början bakifrån och räkna ut värdet för $P(S, t_1)$. Därefter tas $\max\left(K - S_{t_1}, P(S, t_1)\right)$ som randvärde för nästa period och så vidare bak till *t*. Problemet är bara att man inte vet värdet för S_{t_1} vid tidpunkten *t*. Parkinson föreslår då följande numeriska metod för att beräkna värdet.

Parkinson definiera $y_m = mdy$ där *dy* är steglängden, $m = 0,\pm1,\pm2,......$; $b_m = (1-e^{y_m})\Phi(-y_m)$ där $\Phi(\cdot)$ är Heaviside funktionen[2]; $dt = (T-j)dt$, $j = 0,1,2,....$ där *dt* är fixt och definieras nedan; $P(m,j) := P(y_m, t_j)$. Sedan föreslår han en diskret approximation av de successiva europeiska optionerna med ovan nämnda randvillkor enligt följande;

$$P(n, j+1) = \max\left(b_n, \sum_{m=-\infty}^{\infty} q(y_n - y_m, dt)P(m,j)\right)$$

där $q(y,t)$ är den lognormala fördelningen, varvid summan är en approximation av $e^{-rdt}\mathrm{E}^{Q}_{S,dt}(P(S,t_{j+1}))$, obs $t_{j+1} < t_j$ betraktat som tid. Till slut görs också en diskret approximation av $q(y,t)$. Genom att sätta $u := 2rdy\big/(\sigma^2 - 1)$; $a' := 0{,}25u\big/(1+\sqrt{1+0{,}25u^2})$; $a := 0{,}5 + a'$; $dt := 2a(1-a)(dy)^2\big/\sigma^2$ och

$$c(m) = \begin{cases} e^{-rdt}(1-a)^2 & m = -1 \\ e^{-rdt}2a(1-a) & m = 0 \\ e^{-rdt}a^2 & m = 1 \\ 0 & m \le -2;\ m \ge 2 \end{cases}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned} &P(m, j+1) = \max(b_m, c(-1)P(m-1, j) + c(0)P(m,j) + c(1)P(m+1,j)) \\ &j = 0,1,2,....\ ,\ m = 0,\pm1,\pm2,\pm3,.....\ . \end{aligned}$$

Vid implementeringen behöves en undre och övre gräns väljas för *m* och värdet för *dy* bestämmas, exempelvis använder Parkinson $dy \approx 0{,}032$ vid sina beräkningar. Observera, så som *dt* är definierat så givet ett fixt *dy* kan optionen endast värderas vid diskreta tidpunkter.

Huang-Subrahmanyan-Yu (H-S-Y) (1996)

För att prissätta en amerikansk säljoption använder sig Huang-Subrahmanyan-Yu av Carrs m. fl. teknik att dela upp en amerikansk option i två delar. Den ena delen är den motsvarande europeiska optionen och den andra delen är premien för rättigheten till lösen under hela optionens löptid. Så det egentiliga problemet blir att approximera lösengränsen S_t^*. Om aktiekursen ligger under lösengränsen S_t^* är det optimalt att utnyttja optionen. Denna gräns är väldefinierad, unik och har kontinuerlig realisering. H-S-Y härleder följande uttryck för optionens värde, där den underliggande tillgången följer en GBM och vars ”cost of carry”[3] är *b*

---

[2] $\Phi(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \\ 1 \ , & x \ge 1 \end{cases}$

[3] ”Cost of carry” är exemplvis *r* för aktier och *r-r** för valutaoptioner där *r** är det andra landets riskfria ränta.

$$P(S,t) = p(S,t) + \int_t^T (rKe^{-rs} N(-d_2(S_t, S_s^*, s)) + \alpha S_t e^{-\alpha s} N(-d_1(S_t, B_s, s)))ds \qquad (*)$$

där $\alpha = r - b$, $N(\cdot)$ är normalfördelningen och

$$d_1(x,y,s) = \left(\ln(x/y) + (b + \sigma^2/2)(s-t)\right)/\sigma\sqrt{s-t}$$
$$d_2(x,y,s) = d_1 - \sigma\sqrt{s-t}$$

Lösengränsen vid tidpunkten *t* uppfyller följande ekvation

$$K - S_t^* = Ke^{-r\tau_1} N(-d_2(S_t^*, K, \tau_1)) - S_t^* e^{-\alpha\tau_1} N(-d_1(S_t^*, K, \tau_1)) +$$
$$\int_t^T \left(rKe^{-r\tau_2} N(-d_2) - \alpha S_t^* e^{-\alpha\tau_2} N(-d_1)\right)ds \qquad (**)$$

där $\tau_1 = T - t$ och $\tau_2 = s - t$.

De två första termerna motsvarar värdet för en europeisk option med forwardspriset S_t^*. Tredje termen ger räntevinsten av förtida lösen och den fjärde och sista anger förlusten av försäkringsvärdet. Fördelen med ovanstående formel är att då man har bestämt S_t^* är det bara att derivera uttrycket för att få fram hedgeparametrarna. Till skillnad mot andra metoder där man behöver ändra den underliggande tillgångens ingångsvärde och sedan beräkna värdet åter igen för optionen för att kunna skatta derivatorna numeriskt.

Implementering av metoden: först måste lösengränsen approximeras på något vis eftersom den inte har någon analytisk lösning. Intervallet $[t,T]$ delas in i *N* stycken delintervall $t = t_0 < t_1 < .... < t_N = T$. Givet gränsvillkoret $S_T^* = \min(K, rK/\alpha)$ kan $S_N^* = \{S_{t_i}^* : 0 \le i \le N-1\}$ beräknas rekursivt med hjälp av (**) *N* stycken gånger. Ekvationen (**) är en icke linjär integralekvation, som löses med hjälp av någon numerisk metod. Mellan på tidpunkter t_{i-1} och t_i kan S_t^* approximeras med linjär interpolation. H-S-Y föreslår en att man använder Richardsons extrapolation vid beräkningen av (*) för att minska antalet tidpunkter där lösengränsen behövs approximeras. Om tre punkters Richardsons extrapolation används fås följande uttryck

$$P = \left(P_1 - 3P_2 + 9P_3\right)/2$$

där P_j, $j = 1,2,3,$ är värdet på optionen där integralen i (*) har approximerats med en summa. Då $j = 1$ sätt summan till noll. Vid $j = 2$ approximeras funktionen i integralen med en konstant funktion och som värdet på konstanten tas funktionens värde i punkten (*T-t)*/2. För $j = 3$ approximeras funktionen med hjälp av en trappstegsfunktion med ett steg, där värdena för de olika stegen ges av den ursprungliga funktionens värde i punkterna (*T-t)*/3 och 2(*T-t)*/3.

Då aktien inte ger någon utdelning ges P_j av, under förutsättningen att $t = 0$,

$P_1(S,t) = p(S,t)$,

$$P_2(S,t) = p(S,t) + \frac{rKT}{2} e^{-rT/2} N\left(-d_2(S, S^*_{T/2}, T/2)\right),$$
$$P_3(S,t) = p(S,t) + \frac{rKT}{3} \left(e^{-rT/3} N\left(-d_2(S, S^*_{T/3}, T/3)\right) + e^{-2rT/3} N(-d_2(S, S^*_{2T/3}, 2T/3)\right).$$

Endast tre stycken gränspunkter behövs således skattas.

Ju (1998)

Ju utgår ifrån Carrs m. fl. (1992) teknik att uttrycka värdet för en amerikansk säljoption som värdet av en motsvarande europeiska och riskpremien för rättigheten att utnyttja optionen under hela löptiden. Istället för att försöka bestämma den optimala lösengräsen S^* approximera han den genom en exponentialfunktion så som Omberg (1987). Fast Omberg använder inte sin approximativa lösengräns direkt vid värderingen av en amerikansk säljoption. (Den sista meningen är inte helt korrekt. För självklart är en del av värderingsproblemet att bestämma om man ska utnyttja optionen direkt eller inte. Men Omberg använder inte exponentialfunktionen i sin analytiska approximationsformel.)

Fördelen med att approximera lösengränsen med en exponentialfunktion på formen $B\exp(bt)$ är att det då finns en primitiv funktion till integralen för lösenpremien.

I den nedanstående framställningen antas aktien inte ge någon utdelning. Om aktien antages ge en kontinuerlig utdelning finns också analytiska lösningar till värderingsproblemet givet att lösengräsen approximeras med en exponentialfunktion.

Ju börjar med att skriva om riskpremien $\mathrm{E}(S, S^*, t)$, där S och S^* är vid tidpunkten t, så att

$$\mathrm{E}(S, S^*, t) = K(1 - e^{-r\tau}) - K \int_t^T r e^{-rs} N(d_3(S, S^*, s)) ds,$$

där $\tau = T - t$ och $d_3(x, y, t) = \dfrac{\ln(x/y) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$. Därefter delar han in intervallet $[t, T]$ i n stycken lika långa delintervall och approximerar lösengränsen S^* i varje delintervall med en exponentialfunktion på formen $B\exp(bt)$. Integralen i $\mathrm{E}(S, S^*, t)$ divideras med K ger då lösningen, i ett delintervall,

$$I(t_1, t_2, S, B, b, r) = e^{-rt_1} N\left(z_1\sqrt{t_1} + \frac{z_2}{\sqrt{t_1}}\right) - e^{-rt_2} N\left(z_1\sqrt{t_2} + \frac{z_2}{\sqrt{t_2}}\right) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z_3} + 1\right) e^{z_2(z_3 - z_1)} \left(N\left(z_3\sqrt{t_2} + \frac{z_2}{\sqrt{t_2}}\right) - N\left(z_3\sqrt{t_1} + \frac{z_2}{\sqrt{t_1}}\right)\right) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z_3} - 1\right) e^{-z_2(z_3 + z_1)} \left(N\left(z_3\sqrt{t_2} - \frac{z_2}{\sqrt{t_2}}\right) - N\left(z_3\sqrt{t_1} - \frac{z_2}{\sqrt{t_1}}\right)\right),$$

där $z_1 = \dfrac{r - b - (\sigma^2/2)}{\sigma}$, $z_2 = \dfrac{\ln(S/B)}{\sigma}$ och $z_3 = \sqrt{z_1^2 + 2r}$.

Om lösengränsen endast approximeras med en funktion $B_{11}e^{b_{11}t}$ erhålls värdet för en amerikansk säljoption genom

$$P_1(S,t) = \begin{cases} p(S,t) + K(1 - e^{-r(T-t)}) - KI(t,T,S,B_{11},b_{11},r), & S > B_{11}e^{b_{11}t} \\ K - S, & S \leq B_{11}e^{b_{11}t}. \end{cases}$$

För att bestämma parametrarna B_{ji} och b_{ji}, där *j* är antalet delintervall och *i* är vilket av delintervallen räknat från *T*, i exponentialfunktionerna använder sig Ju av att följande två likheter gäller vid lösengränsen

$$K - b_{ji}e^{b_{ji}(T-t)i/j} = P_i(B_{ji}e^{b_{ji}(T-t)i/j}, i(T-t)/j)$$

och

$$-1 = \frac{\partial P_i}{\partial S},$$

där P_i är formeln för en amerikansk säljoption där lösengränsen approximerats med *i* stycken exponentialfunktioner. (För en diskussion om det andra villkoret se Wilmott m. fl. (1995).) Givet ett fixt *j* måste man börja med $i = 1$ och arbeta sig bakåt till $i = j$. Då de föregående värdena för B_{ji} och b_{ji}, där $i = 1,....,k - 1$, behövs för att bestämma B_{jk} och b_{jk} . Ju föreslår att man använder sig av den 2-dimesionella Newton-Raphson metoden för att bestämma de olika *B*:na och *b*:na. Som startvärden för Newton-Raphsons metod föreslår han att man tar MacMillans (1986) approximation som B_{11} och sätter $b_{11} = 0$. Som startvärden vid beräkningen B_{21} och b_{21} tar han B_{11} och b_{11} och så vidare för de andra parametrarna. Om MacMillans (1986) approximation av B_{11} är mindre än 5% av $S_T^* = K$ värde, anser han att det inte är någon direkt idé att approximera S^* med exponentialfunktioner. Utan det går lika bra att approximera S^* med en stegvis konstant funktion.

Till sist förordar Ju att man också ska använda Richardsons extrapolation vid implementeringen för att minska antalet delintervall men ändå få en tillförlitlig lösning. Om tre punkters Richardsons extrapolation användes beräknas värdet genom

$$P = 4{,}5P_3 - 4P_2 + 0{,}5P_1,$$

där P_i är värdet för en säljoption där lösengränsen har approximeras med hjälp av *i* stycken exponentialfunktioner.

Bunch och Johnson (2000)

De föreslår två andra sätt att beräkna/approximera den optimala lösengränsen S^*, för att kunna beräkna integralen för lösenpremien i uppdelningen av värdet för en amerikansk säljoption. Först beskriver de en annan iterativ teknik för att uppskatta S^*. Tekniken bygger på villkoret att den partiella derivatan av *P* med avseende på löptiden, uträknad i punkten $S = S^*$, är lika med noll. Vilket ger att S^* måste uppfylla följande ekvation

$$S^* = K\exp\left(\frac{-r+(1/2)\sigma^2}{\tau} - g\sigma\sqrt{\tau}\right),$$

där $\tau = T - t$ och $g = \pm\left(2\ln\frac{\sigma^2}{(2r/\sqrt{\alpha})h\ln(he^{-\alpha(r+(1/2)\sigma^2)^2\tau/(2\sigma^2)})}\right)^{1/2}$ och i *g* är $h = K/S^*$ och

$$\alpha = 1 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^2}{1+\frac{(1+\gamma)^2}{4}\gamma^2\tau} \quad \text{där} \quad \gamma = 2r/\sigma^2.$$

För att bestämma vilket tecken som gäller i *g* behöver man veta nollstället för *g*. Det finns ett unikt τ_0 som gör att $g = 0$, men det behövs också lösas iterativt. För om $\tau \le \tau_0$ väljs den positiva roten och det omvända för $\tau \ge \tau_0$.

Istället för att beräkna *g* iterativt föreslår de följande approximation

$$g = \left(\ln\frac{\sigma^2}{4er^2\tau/\alpha}\right)^{1/2}.$$

Vid implementeringen löser de den iterativa ekvationen för S^* med ”safeguarded” Newtons metod. Integralen för lösenpremien beräknar de på två sätt. I det ena fallet med samma teknik som H-S-Y beräknar integralen och sedan använder de sig av extrapolation över antalet steg som trappstegs intergranden gör. I det andra fallet beräknar de integralen av ett programpaketet IMSL och de hänvisar till en rutin i paketet.

Approximation med optioner med slumpmässig löptid

Carr (1998)

Carrs teknik bygger på att han utnyttjar exponentialfördelningens ”minneslöshet”. Han antar att optionens slutdag är slumpmässig och att den bestäms av en Poissonprocess efter ett antal förbestämda hopp. Poissonprocessen antas också vara oberoende av den underliggande prisprocessen. Antag först att optionens slutdag är efter ett hopp. Då är löptiden exponentialfördelad vilket leder till att då tiden förflyttas, givet att första inte har inträffat, kommer optionen inte närmare slutdagen och lösenpriset är därför fixt så optionens lösengräns blir också tidsoberoende, alltså konstant.

Summan av exponentialfördelade stokastiska variabler är gammafördelade. Så om T_n är tiden för det *n*:te hoppet är $T_n \in \Gamma(n,\ 1/\lambda)$, där λ är intensiteten för Poissonprocessen. Då är

$\mathrm{E}T_n = n/\lambda$ och Var(T_n)= n/λ^2. Väljs λ så att väntevärdet för T_n är lika med löptiden för den amerikanska optionen, som man egentligen vilja bestämma värdet för, fås villkoret $\mathrm{E}T_n = T \Rightarrow \lambda = n/T \Rightarrow \mathrm{Var}T_n = T^2/n$. När intensiteten ökar i Poissonprocessen ökar antalet hopp som processen gör och variansen minskar så fördelningen koncentreras mer och mer kring den ursprungliga optionens löptid.

Vid implementeringen av sin metod använder Carr sig av Richardson extrapolation. Han härleder följande *N* punkters Richardson extrapolation, där den underliggande tillgången inte ger någon utdelning

$$\hat{P}^N(S,t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{N-n} n^N}{n!(N-n)!} \hat{P}((T-t)/n).$$

$\hat{P}((T-t)/n)$ är värdet för en amerikansk säljoption med *n* hopp med den förväntade periodlängden (*T-t*)/*n*, för vilken det finns en analytisk lösning. $\hat{P}^N$ är det approximativa värdet för en amerikansk säljoption vid *N* punkters Richardson extrapolation. Den optimala lösengränsen bestäms relativt enkelt i det här fallet med en rekursiv metod. Lösengränsen får ett trappliknade utseende för en amerikansk säljoption med slumpmässig löptid.

Simulering

Longstaff och Schwartz (2001)

1977 publicerade Boyle en artikel där han beskrev hur Monte Carlo metoden kunde användas för att beräkna optionens värde. Men Monte Carlo metoden ansågs vara en ineffektiv metod för värdering av amerikanska optioner, där det kan vara optimalt att utnyttja optionen före slutdagen. Längs varje bana som genereras måste vid de olika diskreta tidpunkterna beräknas om det är optimalt att utnyttja optionen direkt eller inte. Metoden blir således väldigt beräkningsintensiv.

Under 90-talet har ett antal artiklar publicerats som behandlar Monte Carlo metoden eller simulering. Dessa artiklar behandlar inte i första hand amerikanska optioner utställda på en aktie. Utan tar upp fall där den underliggande prisprocessen drivs/bestäms av fler faktorer än en för exempelvis en amerikansk option av det maximala värdet av säg fem aktier eller då avkastningskurvan modelleras med hjälp av flera faktorer. I dessa fall blir också binomial och finite differensteknikerna väldigt beräkningsintensiva och Monte Carlo metoden blir ett gångbart alternativ. För en genomgång av Monte Carlo metoder för tillgångsprissättning se Boyle, Broadie och Glasserman (1997).

Till Longstaffs och Schwartz artikel, som börjar med antagandet att optionen endast går att utnyttja vid *n* stycken tillfällen $t = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Vid varje tidpunkt t_i måste innehavaren bestämma om han ska utnyttja optionen direkt eller hålla optionen vid liv. Ett av problemen vid simulering är att bestämma den optimala lösenpolicyn för en vinstmaximerande investerare och där ligger det originella i deras artikel.

Låt $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ vara ett fullständigt sannolikhetsrum och $\{\mathcal{F}_t : 0 \le t \le T\}$är en filtrering med avseende på prisprocessen. **Q** är martingalemåttet (se Björk) och de betraktar endast utbetalningsfunktioner som ligger i L^2. $C(\omega, s\ ;\ t_i, T)$ betecknar det optimala kassaflödet generat av optionen längs banan ω, betingat av att optionen inte har blivit utnyttjad före eller vid tidpunkten t_i.

Vid tidpunkten t_i är kassaflödet känt för direkt utnyttjande av optionen, men inte kassaflödet för att fortsätta att inneha optionsrätten. Arbitragefri värdering ger att värdet vid t_i för de framtida kassaflödena. Vilket ges av uttrycket nedan

$$F(\omega,t_i) = \mathrm{E}_{\mathbf{Q}}\left[\sum_{j=i+1}^{n}\exp\left(-\int_{t_i}^{t_j} r(\omega,s)ds\right)C\left(\omega,t_j;t_i,T\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

där $r(\omega,s)$ är den riskfria räntan. Då utbetalningsfunktionen antogs vara ett element från L^2 följer att $F(\omega,t_i)$ är detsamma. L^2 är ett Hilbertrum och har en uppräknerlig orthonormal bas. Så de väljer först *M* stycken basfunktioner och approximerar $F(\omega,t_i)$ med hjälp av dessa. Approximationen betecknas $\hat{F}_M(\omega,t_i)$ och den bestäms genom att projektera de diskonterade värdena $C(\omega,s\ ;\ t_i,T)$ för de banorna som optionen är ”in-the-money”[4] vid t_i på bas funktionerna med minsta kvadrat metoden. Då antalet banor *N* går mot oändlighet konvergerar $\hat{F}_M(\omega,t_i) \to F_M(\omega,t_i)$ i L^2, där $F_M(\omega,t_i)$ är projektionen av $F(\omega,t_i)$ på de *M* stycken bas funktionerna.

När det betingade väntevärdet är bestämt/estimerat för tidpunkten t_i går det att bestämma om det är optimalt att utnyttja en option vid t_i. Om $K - S_{t_i} \ge \hat{F}_M(\omega,t_i)$ löses optionen direkt. Den optimala lösenpolicyn går att lösa rekursivt för varje bana med hjälp av de estimerade betingade väntevärdena. Värdet för optionen beräknas sedan genom att man börjar vid tidpunkten *t* och följer sedan varje bana fram tills man når en optimal lösentidpunkt. Optionens värde vid den optimala lösentidpunkten tas och diskonteras till tidpunkten *t*. Slutligen beräknas medelvärdet av alla de simulerade banorna och optionens värde antas vara lika med medelvärdet.

Clément m. fl. (2001) analyserar Longstaff och Schwartz algoritm. De visar att algoritmen konvergerar mot det korrekta värdet. I samma artikel analyserar de också konvergenshastigheten. De beskriver också fördelningen för den asymptotiska normaliserade felet för algoritmen.

Tsitsiklis m. fl. (2000) har i en artikel föreslagit att minsta kvadratmetodregression för simuleringen görs på ett annat sätt.

Valuing American Put Options Using Gaussian Quadrature av Sullivan (2000)

[4] En säljoption är in-the-money då $S<K$ och det omvända för en köpoption.

Sullivan använder sig av samma underliggande modell som B-S och att aktien inte ger någon utdelning under löptiden. Han gör standardantagande för numerisk värdering av amerikanska optioner det vill säga att optionen endast kan utnyttjas vid *n* stycken tillfällen t_i , $t = t_0 < ...... < t_n = T$ och $t_{i+1} - t_i = \Delta$. Priset för optionen ges av

$$P(S,t_i) = \max\left(K - S,\ e^{-r\Delta}\mathrm{E}\left(P(Se^z, t_{i+1})\right)\right),\quad i = 0,....., n,$$

där $z \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta,\ \sqrt{\Delta}\sigma\right)$, $\sqrt{\Delta}\sigma$ är standardavvikelsen, och $P(S,T) = \max(K - S_T,\ 0)$.

Anledningen till formelns utseende är att vid tidpunkten t_i kan optionen utnyttjas och då får man beloppet $K - S_{t_i}$ eller så väljer investeraren att hålla optionen vid liv och då inträffar nästa möjlighet till lösen vid t_{i+1} vars värde/kassaflöde är $P(Se^z, t_{i+1})$. Värdet vid tidpunkten t_i av värdet/kassaflödet från tidpunkten t_{i+1} är lika med det riskneutrala väntevärdet diskonterat till t_i (se exempelvis Björk) vilket ger uttrycket. Aktien har fördelningen $S_{t_i}e^z$ vid t_{i+1} . Detta följer av att

$$S_{t'} = S_{t'_0} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t' - t'_0) + \sigma(W_{t'} - W_{t'_0})\right) \text{ där } W \text{ är en brownsk rörelse,}$$

löser SDE:n

$$\begin{cases} dS_{t'} = rS_{t'}dt' + \sigma S_{t'}dW_{t'} \\ S_{t'_0} = s \end{cases} \qquad \text{där } s \text{ är en konstant och } t'_0 \le t'.$$

Lösningen fås genom att definiera $S_{t'} = S_{t'_0} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t' - t'_0) + \sigma(W_{t'} - W_{t'_0})\right)$ och sedan derivering med avseende på t' en gång och *W* två gånger, vilket ger

$$\frac{\partial S}{\partial t'} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)S_{t'}, \qquad \frac{\partial S}{\partial W} = \sigma S_{t'}, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial W^2} = \sigma^2 S_{t'}$$

så Ito’s formel ger (se Björk sid. 38 eller Øksendal sid. 44) att

$$dS_{t'} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)S_{t'} + \sigma S_{t'}dW_{t'} + \frac{\sigma^2}{2}S_{t'}dt' = rS_{t'}dt' + \sigma S_{t'}dW_{t'}.$$

Då $W_t - W_s$ är normalfördelad med väntevärdet 0 och standardavvikelsen $\sqrt{t-s}$, där $s < t$. Så givet att S_{t_i} är känd följer att $S_{t_{i+1}}$ har den påstådda fördelningen. Att *z* har väntevärdet $(r - (\sigma^2/2))\Delta$ kommer av att väntevärdet för aktiekursen ska tas med avseende på martingalemåttet. $S_t^{'}$ är som tidigare den optimala lösengränsen, som ges av

$S_t^* - K = P(S^*, t)$ och om $S < S^*$ löses optionen direkt. För $S_{t_i} > S_{t_i}^*$ ges $P(S, t_i)$ värde av $e^{-r\Delta}\mathrm{E}(P(Se^z, t_{i+1}))$ så

$$P(S,t_i) = e^{-r\Delta} \int_{-\infty}^{\ln(S_{t_{i+1}}^* / S)} (K - Se^z) f(z) dz + e^{-r\Delta} \int_{\ln(S_{t_{i+1}}^* / S)}^{+\infty} P(Se^z, t_{i+1}) f(z) dz := U(S,t_i) + V(S,t_i)$$

där $f(z)$ är tätheten för $N((r - (\sigma^2 / 2))\Delta,\ \sigma\sqrt{\Delta})$. Om $S_{t_{i+1}} < S_{t_{i+1}}^*$ löses optionen direkt vid t_{i+1} och utbetalningsfunktionen $K - Se^z$ ger optionens värde. Annars hålls optionen vid liv och optionens värde ges då av funktionen $P(Se^z, t_{i+1})$. Integralen $U(S, t_i)$ har en analytisk lösning. Sätt $Se^z = Se^{h\Delta + \sigma Y\sqrt{\Delta}}$ där $h := (r - (\sigma^2 / 2))$ och $Y \sim N(0,1)$ och den övre integrationsgränsen är (Obs $S = S_{t_i}$ och antas vara känd.)

$$Se^{h\Delta + \sigma y_0 \sqrt{\Delta}} = S_{t_{i+1}}^* \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = \frac{\ln(S_{t_{i+1}}^* / S) - h\Delta}{\sigma\sqrt{\Delta}}$$

så

$$U(S,t_i) = e^{-r\Delta} \int_{-\infty}^{y_0} K\varphi(w) dw - e^{-r\Delta} \int_{-\infty}^{y_0} Se^{h\Delta + \sigma w\sqrt{\Delta}} \varphi(w) dw = A + B$$

och $$\varphi(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-w^2}{2}}$$

vilket ger

$$A = e^{-r\Delta} K N(y_0)$$

och

$$e^{r\Delta} B = -\frac{Se^{h\Delta}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_0} e^{\sigma y\sqrt{\Delta} - \frac{1}{2}w^2} dw = e^{r\Delta} N(y_0 + \sigma\sqrt{\Delta})$$

A och *B* tillsammans ger att $U(S,t_i) = Ke^{-r\Delta} N(d_2(S, S_{t_{i+1}}^*)) - SN(d_1(S, S_{t_{i+1}}^*))$ där

$$d_2(x,y) = \left(\frac{\ln(x / y) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta}{\sigma\sqrt{\Delta}} \right) \text{ och } \quad d_1(x,y) = d_2(x,y) + \sigma\sqrt{\Delta}$$

N( ) är fördelningsfunktionen för *N*(0,1).

För beräkningen av integralen $V(S, t_i)$ använder Sullivan sig av numerisk integration och funktionsapproximation. Intergranden i $V(S, t_i)$ är en produkt av funktionen $P(Se^z, t_{i+1})$ så i likhet med många av de ovanstående teknikerna erhålls ett rekursivt problem.

Vid t_{n-1} har optionen en period kvar och är då en europeisk option, enligt antagande. Värdet $P(S,t_{n-1})$ de kan bestämmas med B-S formel. Den optimala lösenkursen $K - S^*_{t_{n-1}} = P(S^*_{t_{n-1}}, t_{n-1})$ bestäms med någon fixpunktsmetod. Väljs Newton-Raphsons metod blir $S_n = S_{n-1} - \dfrac{p(S_{n-1})}{p'(S_{n-1})}$, där $p'(S_{n-1})$ är optionens deltavärde och S_n konvergerar mot $S^*_{t_{n-1}}$. Detta värde behövs för att kunna räkna ut $P(S,t_{n-2})$, som är summan av integralerna $U(S,t_{n-2})$ och $V(S,t_{n-2})$. För att få fram värdet av $V(S,t_{n-2})$ behövs någon numerisk metod begagnas. Sullivan använder sig av Gauss – Legendre quadraturemetoden. Han börjar med att trunkera integrationsgränserna till $[\alpha,\ \beta]$ där $\alpha = \max[\ln(S^*_{t_{n-1}}/S),\ (r-(\sigma^2/2))\Delta - 6\sigma\sqrt{\Delta}]$ och $\beta = [(r-(\sigma^2/2))\Delta + 6\sigma\sqrt{\Delta}]$. Då aktiekursen är lägre än α är sannolikheten för lösen vid nästa möjliga tillfälle stor och intervallet $\pm 6\sigma\sqrt{\Delta}$ innehåller nästan hela sannolikhetsmassan.

Gauss – Legendre quadratureintegration ges av

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{q} w_i f(x_i) \qquad (*)$$

där w_i är vikten för f i punkten x_i. Dessa väljs så att det blir likhet i (*) för ett polynom av grad $2q$-1. Burden – Fairs, (sidan 207), bevisar följande sats.

Antag att $x_1, \ldots\ldots, x_q$ är rötter till Legendre polynomet L_n och för varje i = 1,….,q är talen w_i definierade genom

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{q} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx$$

Om L är ett polynom av grad mindre än $2q$, då är

$$\int_{-1}^{1} L(x)dx = \sum_{i=n}^{q} w_i L(x_i)$$

och Legendre polynomen ges av följande rekursiva formel

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$
$$\text{med } L_0(x) = 1 \text{ och } L_1(x) = x.$$

Rötterna och viktfaktorerna till Legendre polynomen finns tabulerade i Abramowitz och Stegun (1964) för ett antal q:n.

Att integrationsintervallet bara sträcker sig över [-1,1] är ingen begränsning för det finns alltid en bijektiv avbildning av ett godtyckligt intervall [a,b] till [-1,1]. Vilken ges av

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$$

så

$$\int_a^b f(x)dx = \tfrac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\tfrac{(b-a)t+b+a}{2}\right)dt$$

$V(S,t_{n-2})$ approximeras med

$$V(S,t_{n-2}) = e^{-r\Delta}\sum_{i=1}^{q} P(Se^{z_i},t_{n-1})\, f(z_i)w_i$$

där w_i är viktfaktorn och z_i är det transformerade nollstället för Legendre polynomet till intervallet $[\alpha,\beta]$, samt $P(\ \ ,t_{n-1})$ är värdet för en europeisk option. $S^*_{t_{n-2}}$ bestäms genom någon numerisk fixpunktsmetod, som behövs vid uträkningen av $P(S,t_{n-3})$ (Newton-Raphsons metod går inte att använda för g' är ej känt). För att bestämma värdet på $V(S,t_{n-3})$ krävs att dubbel integral beräknas. Det ger att $q + q^2$ stycken uträkningar behövs göras för att beräkna $V(S,t_{n-3})$. För

$$V(S,t_{n-3}) = e^{-r\Delta}\sum_{i=1}^{q} P(Se^{z_i},t_{n-2})\, f(z_i)w_i \; = e^{-r\Delta}\sum_{i=1}^{q} (U(Se^{z_i},t_{n-2}) + V(Se^{z_i},t_{n-2}))\, f(z_i)w_i \; .$$

Där $V(Se^{z_i},t_{n-2})$ ges av uttrycket ovan, så $V(S,t_{n-3})$ approximeras med hjälp av en enkel summa och en dubbel summa och integrationsintervallet är från
$\alpha = \max[\ln(S^*_{t_{n-2}}/S),\ (r-(\sigma^2/2))\Delta - 6\sigma\sqrt{\Delta}]$ till $\beta = [(r-(\sigma^2/2))\Delta + 6\sigma\sqrt{\Delta}]$
Det numeriskt rekursiva beräkningsproblemet av $V(S,\ \ )$ växer exponentiellt. För att komma runt det problemet förslår Sullivan att $V(S,\ \ )$ approximeras med Chebyshev polynom. För varje t_i behövs högst en enkel och en dubbel summa beräknas. Dessa polynom är en familj av ortogonala polynom definierade genom $T_j(x) = \cos(j \cdot \arccos(x))$, där $j \in \mathbf{N}$ och $-1 \le x \le 1$. Rekursivt kan de skrivas som $T_{p+1} = 2xT_p(x) - T_{p-1}(x)$ med $T_0(x) = 1$ och $T_1(x) = x$. Av alla polynom av grad n-1 är Chebyshev polynomen de som approximerar x^n, $-1 \le x \le 1$, bäst med avseende på normen $\max|x(t)|$ på C[-1,1], se Kreyszig kap 6.4.

Polynomets koefficienter bestämmer Sullivan på följande vis. Han väljer först ett ändligt intervall $[a,b]$ där $h(S) = V(S,t)$ ska approximeras. Beräknar sedan $h(S)$ i p punkter, vilka är omskalade från intervallet [-1,1] till $[a,b]$ genom $y = (x(b-a) + a + b)/2$. Därefter löses ekvationssystemet

$$c_0T_0(x_j) + c_1T_1(x_j) + \dots\dots + c_{p-1}T_{p-1}(x_j) = h(y_j)$$

för $j = 1,2,\ldots,p$. Systemet som har en lösning för de olika funktionerna T_j, är linjärt oberoende. $h(S)$ approximeras sedan genom att först skala om S till intervallet [-1,1] med $x = (2S - (a+b))/(b-a)$ och

$$h(S) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j T_j(x) .$$

För att reducera det procentuella felet för approximationen föreslår Sullivan att log optionspriser och log aktiekurser användes vid approximationen istället. Det optimala lösenpriset S^* är intervallets nedre gräns och som övre gräns väljs S' så att $P(S',t) = 0{,}005$. I log fallet är integrationsintervallet istället $[\ln S^*, \ln S']$. Punkterna x_j väljs som nollställen till polynomet $T_p(x)$. Vilka ges av $x_j = \cos((2j-1)\pi/2p) \quad j = 1,2,......, p$, för $T_p(x_j) = \cos(p \cdot \arccos(x_j)) = \cos((2j-1)\pi/2) = 0$. Det valet av punkter ger det minsta möjliga maximala approximationsfelet, se Burden – Fairs (1993, sid. 463-464) som bevisar detta. Konvertera dessa nollställen till intervallet $[\ln S^*, \ln S']$ genom den linjära transformationen $y_j = (x_j(b-a) + a + b)/2$. För dessa *p* stycken värden beräknas optionsvärdena med hjälp av Gauss – Legendre quadrature och därefter koefficienterna för polynomet där $h(y_j) = \ln P(y_j, \cdot)$.

Med den här approximationstekniken behövs bara en dubbelsumma beräknas vilken ges av

$$P(S,t_i) = U(S,t_i) + e^{-r\Delta} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{p-1} \exp(c_j T_j(x_i)) f(z_i) w_i$$

där x_i är omskalningen av $\ln S + z_i$ från intervallet $[\ln S^*, \ln S']$ till [-1,1] och z_i och w_i är integrationsnoden och dess vikt. Uttrycket ovan används sedan rekursivt för att bestämma tidpunkten *t*:s pris. Notera att koefficienterna i dubbelsumman kommer att vara olika vid varje steg.

Implementering av metoden

Steg 1: Vid tidpunkten t_{n-1}, då optionen är europeisk enligt antagandet, bestäm den optimala lösengränsen $K - S^*_{t_{n-1}} = p(S^*_{t_{n-1}}, t_{n-1})$.

Steg 2: Vid tidpunkten t_{n-2}. Först bestäms den optimala lösengränsen $K - S^*_{t_{n-2}} = P(S^*_{t_{n-2}}, t_{n-2}) = U(S^*_{t_{n-2}}, t_{n-2}) + V(S^*_{t_{n-2}}, t_{n-2})$, där $V(S, t_{n-2})$ beräknas med Gauss – Legendre quadraturemetoden och den *q* stycken noderna väljs i intervallet $[\alpha,\ \beta]$ där $\alpha = \max[\ln(S^*_{t_{n-1}}/S),\ (r-(\sigma^2/2))\Delta - 6\sigma\sqrt{\Delta}]$ och $\beta = [(r-(\sigma^2/2))\Delta + 6\sigma\sqrt{\Delta}]$. Därefter bestäms $S'_{t_{n-2}}$ som är lösningen till ekvationen $P(S'_{t_{n-2}}, t_{n-2}) = 0{,}005$. De *p* stycken nollställen x_j, för Chebyshev polynomet T_{p-1}, transformera sedan om till intervallet $[\ln S^*_{t_{n-2}},\ \ln S'_{t_{n-2}}]$ med funktionen $y_j = (x_j(\ln S^*_{t_{n-2}} - \ln S'_{t_{n-2}}) + \ln S^*_{t_{n-2}} + \ln S'_{t_{n-2}})/2$. *p* stycken optionsvärden $P(y_j, t_{n-2})$ beräknas. Koefficienterna c_j bestäm för polynomapproximationen, så

$$\ln P(y\ \ , t_{n-2}) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j T_j(x) .$$

Steg 3: $S^*_{t_{n-3}}$ och $S'_{t_{n-3}}$ bestäms med approximationen

$P(S,t_{n-3}) = U(S,t_{n-3}) + e^{-r\Delta}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=0}^{p-1}\exp(c_j T_j(x_i)) f(z_i) w_i$, där f är tätheten för normalfördelningen med väntevärde $(r-(\sigma^2/2))\Delta$ och variansen $\sigma^2\Delta$, z_i och w_i är noderna respektive vikterna för den numeriska integrationsmetoden från intervallet $\alpha = \max[\ln(S^*_{t_{n-2}}/S),\ (r-(\sigma^2/2))\Delta - 6\sigma\sqrt{\Delta}]$ till $\beta = [(r-(\sigma^2/2))\Delta + 6\sigma\sqrt{\Delta}]$ och x_j är omskalning av $\ln(S)+z_i$ från $[\ln S^*_{t_{n-2}},\ \ln S'_{t_{n-2}}]$ till [-1,1]. Koefficienterna c_j framför T_j kommer från föregående steg. Därefter transformeras de *p* stycken nollställena x_j för polynomet T_{p-1} till intervallet $[\ln S^*_{t_{n-3}},\ \ln S'_{t_{n-3}}]$. De nya koefficienterna c_j beräknas för polynomapproximationen av $\ln P(\ldots,t_{n-3})$.

Steg 4: Föregående steg upprepas till och med tidpunkten t_2, men vid varje steg räknas tiden bak ett steg.

Steg 5: $P(S,t_1) = U(S,t_1) + e^{-r\Delta}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=0}^{p-1}\exp(c_j T_j(x_i)) f(z_i) w_i$ beräknas där de olika komponenterna i summan har motsvarande innebörd för tidpunkten *t* som i steg 3. Om $P(S,t) > K - S$ så är värdet för optionen lika med det beräknade värdet. Annars är optionens värde lika med $K - S$ och den ska lösas direkt.

Anmärkningar: Sullivans tester ger för *p*>8 att polynomapproximationen ger betydande extrapolationsfel, så han använder $p = 8$ genomgående i sina redovisade beräkningar. Då antalet lösentillfällen ökar behövs antalet noder i den numeriska integrations metoden också ökas. Annars kan det beräknade värdet minska, givet allt annat fixt, då antalet lösentillfällen ökar. Vilket är en motsägelse till att optionen ska bli mer värdefull då antalet lösentillfällen ökar.

För att snabba upp beräkningarna använder Sullivan sig av Richardsons extrapolation. Han föreslår att man begagnar Omberg (1987-b) metod. Det vill säga, lösentidpunkt för de olika lösningarna väljs från en geometrisk serie. Då är man garanterad en monoton konvergens underifrån mot det korrekta värdet och Richardsons extrapolation är effektivast då. Vid jämförelse med andra metoder använder Sullivan följande följd av lösenmöjligheter $n = 1,3,9,27$.

JÄMFÖRELSE AV OLIKA METODER

Generellt kan man säga att de senare publicerade metoderna är bättre än de tidigare med avseende på snabbhet eller exakthet. Det är inte så konstig i sig. För att berättiga publicering av en ny numerisk metod anser jag att den ska vara bättre än föregångarna eller belysa problemet på ett nytt sätt.

Geske och Shastri (1985) undersöker binomialmodellen och de fyra ovan nämnda differensapproximationerna med avseende på beräkningseffektivitet och exakthet. Resultatet de kommer fram till är att det är kostnadseffektivt (där kostnad = (CPU time + (0:007)I/O)) att använda binomialmodellen om några få optioner värderas. Bland de fyra differensapproximationerna är den explicita metoden på den transformerade ekvationen med y = log*S* effektivast. Om aktien ger utdelning eller det är fråga om säljoptioner går gränsen där differensmetoden blir kostnadseffektivare än binomialmetoden ungefär vid tio optioner. Medan det i köpoptionsfallen, där aktien inte ger någon utdelning, går gränsen då differensapproximationen blir effektivast vid 300 optioner. Jag tycker det är intressant att Wilmott m. fl. argumenterar för att den implicita metoden generellt är nästan lika snabb som explicita metoden om den är rätt implementerad. Men med den implicita metoden går det att ta längre tidssteg vilket leder till att den vanligtvis är mer effektiv. Jag uppfattar också att de rekommenderar Crank-Nicolsons metod som har konvergenshasigheten $O(\delta t^2)$ i tidssteget mot $O(\delta t)$ för explicita och implicita metoden. Men de redovisar ingen jämförelse mellan de olika teknikerna.

Broadie och Detemple (1996) gör i sin artikel också en stor jämförelse mellan olika metoder. De metoder som undersöks är C-R-R:s binomial modellen, en trinomial metod, MacMillans approximationsteknik, två punkters Geske och Johnson teknik, den modifierade tekniken av Bunch och Johnson, Breens accelererade binomial metod, Kims integral metod, deras egna två metoder, BBS binomial med Black och Scholes modifikation och BBS med Richardson extrapolation.

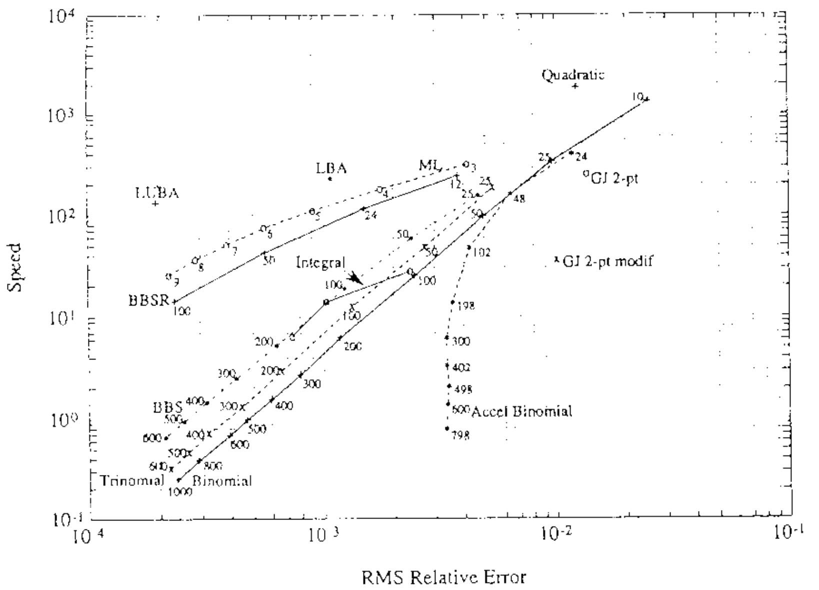
Broadie och Detemple undersöker de uppräknade metoderna med avseende på snabbhet och exakthet. Som underlag använder de sig av närmare 2 500 olika köpoptioner där optionernas parametrar har bestämts slumpmässigt. Volatilitetsparametrarna är dragna från en likformig fördelning mellan 0,1 till 0,6. Löptiden dras med sannolikhet 0,75 från en likformig fördelning mellan 0,1 till 1 år och med sannolikhet 0,25 från en likformig fördelning mellan 1 till 5 år. Lösenpriset hålls kontant till 100 för alla optionerna och de initiala aktiekurserna dras likformigt mellan 70 och 130. Anledningen till det är att det relativa felet ej ändras om S och K skalas om med samma faktor. Utdelningen dras likformigt mellan 0 till 0,1. Notera att de antar en kontinuerlig utdelning. Räntan dras på samma sätt med sannolikhet 0,8 mellan 0 och 0,1 och med sannolikhet 0,2 lika med 0.

Då binomialmodellen konvergerar till det rätta värdet för en amerikansk option, utgår de i sin analys från att det korrekta värdet för optionen är det som en binomial modell ger med 15 000 perioder.

Som mått på de olika metodernas prissättningsfel tar de

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{C_i^* - C_i}{C_i}\right)^2}$$ där C_i är det antagna korrekta värdet och C_i^* metodens

uppskattade värde. Det relativa felet ej är meningsfullt då C_i är nära noll. De undersöker bara optioner vars värde är större än 0,5. Av de 2 500 optionerna är det 2 271 som uppfyller det kriteriet. Antalet optionsvärden beräknade per sekund använder de som mått på beräkningssnabbheten för metoden.



Källa: Broadie m. fl. (1996).

Viktigt att notera är att de först drog ett urval av 2 500 optionsparametrar för att kalibrera λ_1 och λ_2 i sina metoder. Därefter drog de ett nytt urval och jämförde de olika metoderna. Vad som inte framgår av figuren ovan är att för optioner med löptid över 1 år är binomialmetoden bättre än trinomialmetoden för de undersökta optionerna. De testade också en metod som försöker att fånga upp fenomenet, att binomialmetoden oscillerar kring det korrekta värdet när antalet perioder ökar. Tekniken bygger på att man tar genomsnittet av två värden där det ena värdet kommer från en optionsvärdering med *n* perioder och det andra värdet kommer från en värdering med *n*+1 perioder. Resultatet redovisar de inte men uppger att tekniken inte medför någon förbättring jämfört med binomialmodellen.

En jämförelse mellan olika binomial modeller gör Leisen och Reimer (1996). De redovisar följande resultat för en amerikansk säljoption där den underliggande aktien har värdena $S = 100$, *r* = 0,07, $\sigma = 0{,}3$, *T-t* = 0,5 år och *n* = 25.

Lösenpris	C-R-R	J-R	Tian	CP	PP1	PP2	Värkligt V.
80	1,01842	1,03864	0,98396	1,04231	1,04264	1,04317	1,037
90	3,1680	3,12447	3,14640	3,11786	3,12832	3,12928	3,123
100	7,10823	7,10415	7,08701	7,00982	7,02858	7,02981	7,035
110	13,00108	13,01511	12,98978	12,90304	12,93136	12,93253	12,955
120	20,73344	20,74479	20,73566	20,65254	20,67576	20,67649	20,717

Källa: Leisen och Reimer (1996).

Det värkliga värdet är det som fås av C-R-R modell med 15 000 steg. J-R är Jarrow och Rudds modell, i CP är justeringsfunktionen Camp-Paulson invers, i PP1 och PP2 är justeringsfunktionerna Peizer-Pratt metod 1 respektive metod 2.

Ju (1998) drar också ett urval av parametrar för 1250 slumpmässiga amerikanska säljoptioner. För alla dessa är lösenpriset 100 och de andra parametrarna dras likformigt mellan 70 till 130 för aktiekursen, σ mellan 0,1 till 0,6, löptiden mellan 0 till 3 år, räntan och utdelningen mellan 0 till 0,1. Metoderna som han jämför är hans tvåpunkters, trepunkters och fyrapunkters exponentialfunktionsmetod (EXP2, EXP3, EXP4), 800 perioders binomialmodel (BT800), tvåpunkters modifierad Geske-Johnson metod av Bunch och Johnson (1992) (MGJ2), fyrapunkters och sexpunkters rekursiv metod av H-S-Y (1996) (HSY4, HSY6), fyrapunkters och sexpunkters slumpmässig löptidsmetod av Carr (1997) (RAN4, RAN6), Broadie och Detemple (1996) LUBA metod, samt deras modifierade binomialmodel med Black och Scholes där N = 25 och N = 50 (BBSR25, BBSR50). Alla metoderna förutom LUBA är implementerade med hjälp av Richardsons extrapolation. Det korrekta värdet antages vara det som ges av binomial modellen med 10 000 perioder.

	BT800	MGJ2	HSY4	HSY6	LUBA	RAN4	RAN6	BBSR25	BBSR50	EXP2	EXP3	EXP4
RMSE	0,0017	0,1255	0,382	0,0147	0,0016	0,0101	0,0036	0,0054	0,0022	0,115	0,0017	0,0004
MAE	0,0097	1,4775	0,3329	0,1390	0,0190	0,0527	0,0179	0,1037	0,0499	0,0613	0,0096	0,0027
AE>0,01	0,0000	0,4432	0,5144	0,2816	0,0120	0,3928	0,1032	0,1072	0,0136	0,3672	0,0000	0,0000
AE>99%	0,0071	0,9108	0,2217	0,0981	0,0108	0,0436	0,0152	0,0356	0,0136	0,0530	0,0076	0,0022
RMSRE	0,0148	0,5382	0,3204	0,0844	0,0102	0,0972	0,0308	0,0428	0,0170	0,0746	0,0142	0,0054
MARE	0,1430	5,5587	4,8770	1,1333	0,1871	1,0465	0,2546	0,6530	0,3243	0,5612	0,1483	0,0742
ARE>99%	0,0762	3,6483	2,2173	0,4854	0,0549	0,6406	0,1677	0,3514	0,1293	0,4135	0,0883	0,0401
CPU(sec)	588,75	4,83	2,29	6,25	4,34	3,62	5,42	5,35	15,33	2,35	4,53	8,33

Källa: Ju (1998).

Av ovanstående reslutat rekommenderar Ju att man använder någon av tre metoderna EXP3, LUBA eller RAN6. För de är snabba och tillförlitliga med avseende på hur nära de är det ”korrekta” värdet. Han tycker också att BBSR metoderna är bra när exakt tillförlitlighet inte krävs, för de är snabba, ganska tillförlitliga och lätta att implementera. Anledningen till att EXP metoderna är så tillförlitliga är att redan de oextrapolerade värdena ligger mycket närmare det ”korrekta” värdena än de andra metodernas oextrapolerade värden (se nedan, obs kolumn 8 har fel rubrik ska vara HSY-P6). Exempelvis är EXP-P1 nästa lika tillförlitlig som HSY6. Ju jämför också hur bra de olika metoderna beräknar deltavärdet. BT800, EXP3, LUBA och RAN6 står sig också bra här. De är snabba och tillförlitliga, men RMSE värdet för LUBA är tio gånger högre än det för EXP6 och RAN6.

(S,δ)	TRUE	EXPP1	EXPP2	EXPP3	HSYP2	HSYP4	HSYP6	RANP3	RANP4	RANP6

(80, 0,12)	25,6577	25,6404	25,6543	25,6564	25,3230	25,5499	25,6087	24,9528	25,2663	25,3867
(90, 0,12)	20,0832	20,0679	20,0805	20,0821	19,8723	20,0010	20,0429	18,9587	19,4841	19,6752
(100, 0,12)	15,4981	15,4867	15,4964	15,4976	15,3623	15,4412	15,4688	14,1383	14,7863	15,0161
(110, 0,12)	11,8032	11,7949	11,8017	11,8026	11,7170	11,7655	11,7827	10,5027	11,1097	11,3309
(120, 0,12)	8,8856	8,8799	8,8844	8,8850	8,8324	8,8612	8,8718	7,8534	8,3163	8,4930
(80, 0,08)	22,2050	22,1650	22,1916	22,1983	21,5703	22,2163	22,2967	21,7577	21,9402	22,0170
(90, 0,08)	16,2071	16,1473	16,1882	16,1977	15,9365	16,2288	16,2538	15,3822	15,7510	15,8907
(100, 0,08)	11,7037	11,6417	11,6840	11,6938	11,5394	11,6880	11,7147	10,6768	11,1544	11,3263
(110, 0,08)	8,3671	8,3122	8,3488	8,3574	8,2370	8,3353	8,3623	7,3980	7,8407	8,0038
(120, 0,08)	5,9299	5,8857	5,9142	5,9214	5,8224	5,8971	5,9192	5,1787	5,5070	5,6342
(80, 0,04)	20,3500	20,3379	20,3447	20,3469	18,8206	20,1777	20,4122	20,1814	20,2493	20,2787
(90, 0,04)	13,4968	13,4459	13,4781	13,4866	13,1947	13,7667	13,7612	12,9199	13,1819	13,2803
(100, 0,04)	8,9438	8,8747	8,9197	8,9308	8,9527	9,1426	9,1053	8,1677	8,5315	8,6617
(110, 0,04)	5,9119	5,8435	5,8876	5,8985	5,9368	6,0075	5,9956	5,1826	5,5153	5,6381
(120, 0,04)	3,8975	3,8394	3,8761	3,8854	3,8829	3,9342	3,9389	3,3418	3,5822	3,6762
(80, 0,0)	20,0000	20,0000	20,0000	20,0000	16,6525	18,7463	19,2411	20,0000	20,0000	20,0000
(90, 0,0)	11,6974	11,6729	11,6878	11,6919	11,1602	12,0365	12,0819	11,3607	11,5205	11,5781
(100, 0,0)	6,9320	6,8832	6,9145	6,9225	7,1356	7,3556	7,2640	6,3889	6,6529	6,7441
(110, 0,0)	4,1550	4,1020	4,1362	4,1447	4,4050	4,4077	4,3392	3,6412	3,8815	3,9684
(120, 0,0)	2,5102	2,4646	2,4938	2,5010	2,6586	2,6376	2,6079	2,1269	2,2954	2,3607
RMSE		0,0437	0,0151	0,0081	0,8593	0,3260	0,2239	0,7883	0,4258	0,2923

Källa: Ju (1998).

Sullivan (2000) redovisar följande resultat för amerikanska säljoptioner.

	Aktiekurs intervall S = [32, 52]			Löptids intervall M = [0,10, 5,0]			Volatilitetens intervall σ = [0,10, 0,50]		
	RMSE	RMS%E	Time	RMSE	RMS%E	Time	RMSE	RMS%E	Time
Finite diff.									
n=256	0,0021	0,2790	0,19	0,0049	0,0942	26,48	0,0021	0,0963	28,06
n=512	0,0009	0,1160	0,36	0,0025	0,474	57,23	0,0017	0,0649	62,23
n=1024	0,0004	0,0554	0,79	0,0013	0,0242	128,14	0,0008	0,0312	143,68
Binomial									
n=150	0,0021	0,2354	4,78	0,0053	0,0972	4,67	0,0030	01053	4,89
n=300	0,0011	0,1161	11,98	0,0026	0,0472	11,98	0,0015	0,516	12,19
n=500	0,0006	0,0663	25,70	0,0015	0,275	25,98	0,0009	0,0302	25,98
MacMil.	0,0133	0,7870	0,0076	0,0600	0,9374	0,58	0,0041	0,1666	0,64
LUBA	0,123	0,4932	1,60	0,0405	0,7281	1,42	0,0128	0,5795	1,54
LL	0,0028	0,0822	1,69	0,0094	0,1624	1,51	0,0027	0,1993	1,63

Carr	0,0037	0,3313	6,43	0,0080	0,1609	14,78	0,0048	0,1893	14,99
HSY	0,0054	0,1882	0,07	0,0436	0,6851	2,95	0,0084	0,3598	2,96
Gaussian q.									
n=128	0,0007	0,0332	1,04	0,0063	0,1020	210,86	0,0007	0,0380	203,00
n=1,2,3,4	0,0021	0,0704	0,37	0,0218	0,3402	9,98	0,001	0,561	10,33
n=1,3,9,27	0,0004	0,0093	0,65	0,0003	0,0052	66,49	0,0000	0,0028	65,91
4-dim.	0,0004	0,0196	0,0060	0,0007	0,0132	1,83	0,0004	0,0245	1,76

Källa: Sullivan (2000).

Där finite differensmetoden är den som Hull och White (1990) beskriver, vilket är en explicit metod. De övriga är beskrivna i texten ovan. I grundutförandet har han använt parametrarna *S* = 40, löptiden 0,3333, $\sigma = 0{,}3$ och räntan *r* = 0,0488 uttryckt som kontinuerlig årsränta. Varje angivet intervall har han delat in i 200 delintervall, med samma längd, och beräknat optionens värde i varje delintervalls startpunkt och slutpunkt. De övriga parametrarna har hållits fixerade. Han har implementerat alla metoder med GAUSS. RMSE är kvadratroten ur medelvärdet av kvadratfelen och RMS%E är motsvarande för de procentuella felen. De korrekta värdena antages ges av binomialmodellen med 10 000 perioder. * indikerar att de beräkningar för att kalibrera modelen inte har tagits med i tiden.

Beräkningarna visar framför allt att MacMillans metod är snabb, men den är bland de minst tillförlitliga. Den explicita finite differensmetoden är också snabb då endast aktiekursen ändras. När löptiden eller volatiliteten blir den explicita finite differens bland de långsammast metoderna. Men genomgående är finite differensmetoden tillförlitlig. Utmärkande för Sullivans resultat är att Carrs metod är långsam jämfört med H-S-Y och Broadie-Detemples metoder. Det resultatet överensstämmer inte med Jus resultat.

För metoden med Gaussiansk kvadratur visar beräkningarna att den i första hand är tillförlitlig. Metoden är också snabb då endast aktiekursen endast. Men då volatiliteten ändras och de övriga parametrarna är fixa är inte metoden lika snabb som H-S-Y och Broadie-Detemples metoder. Detsamma gäller för löptiden, men Sullivans metod är tillförlitlig i båda fallen.

Referensförteckning

Abramowitz, M. och Stegun, I. A., 1972, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Pub.

Barone-Adesi, G. och Whaley, R. E., 1987, ”Efficient Analytic Approximation of American Option Values,” *The Journal of Finance,* Vol. XLII, No. 2, 301-320.

Barone-Adesi, G. och Whaley, R. E., 1988, ”On The Valuation of American Put Options on Dividend-Paying Stocks,” *Advances in Futures and Options Research,* Vol. 3, 1-13.

Björk, T. 1998, *Arbitrage Theory in Continuous Time,* Oxford University Press.

Black, F., och Scholes, M., 1973, ”The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy,* Vo. 3, 637-654.

Boyle, P., 1977 ”Options: a Monte Carlo approach,” *Journal of Financial Economics,* Vol. 4, 323-338.

Boyle, P., Broadie, M., och Glasserman, P., 1997, ”Monte Carlo methods for security pricing,” *Journal of Economic Dynamics and Control,* Vol. 21, 1267-1321.

Breen, R., 1991, ”The Accelerated Binomial Option Pricing Model,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 26, No 2, 153-164

Brennan, M. J., och Schwartz, E. S., 1977, ”The Valuation of American Put Options,” *The Journal of Finance,* Vol. XXXII, No. 2, 449-462.

Brennan, M. J., och Schwartz, E. S., 1978, ”Finite Difference methods and Jump Processes Arising in The Pricing of Contingent Claims: A Synthesis,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 13, 461-474.

Broadie, M. och Detemple, J., 1996, ”American Option Valuation New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods,” *The Review of Financial Studies,* Vol. 9, No. 4, 1211-1250.

Bunch, D. S. och Johnson, H., 1992, ”A Simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach,” *The Journal of Finance,* Vol. XLVII, No. 2, 809-816.

Bunch, D. S. och Johnson, H., 2000, ”The American Put option and Its Critical Stock Price,” *The Journal of Finance,* Vol LV, No. 5, 2333-2356.

Burden, R., L. och Faires, D., J., 1993, *Numerical Analysis,* (5^{th} edn.), PWS Publishing Company, Boston.

Carr, P., 1998, ”Randomization and the American Put,” *The Review of Financial Studies,* Vol. 11, No. 3, 597-626.

Carr, P., Jarrow, R., och Myneni, R., 1992, ”Alternative Characterizations of American Put Options,” *Mathematical Finance,* Vol. 2, No. 2, 87-106.

Clément, E., Lamberton, D., och Protter, P., 2001, “An Analysis of the Longstaff-Schwartz Algorithm for American Option Pricing,” working paper, Cornell University.

Courtadon, G., 1982, ”A more Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. XVII, No. 5, 697-705.

Cox, J. C. och Rubinstein, M., 1985, *Options Markets,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Cox, J. C., Ross, S. A., och Rubinstein, M., 1979 ”Option Pricing: A Simplified Approach,” *Journal of Financial Economics,* Vol. 7, 229-263.

Dempster, M. A. H. och Hutton, J. P., 1996, “*Pricing American Stock Options by Linear Programming,*” Duffie, D., 1992, *Dynamic Asset Pricing Theory,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Geske, R., och Johnson, H. E., 1984, ”The American Put Option Valued Analytically,” *The Journal of Finance,* Vol. XXXIX, No. 5, 1511-1524.

Geske, R., och Shastri, K., 1985, ”Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 20, No. 1, 45-71.

Huang, J., Subrahmanyan, M. G. och Yu G., G., 1996, ”Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method,” *The Review of Financial Studies,* Vol. 9, No. 1, 277-300.

Hull, J. C., 1993, *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

Hull, J. C., och White, A., 1988, ”The use of the Control Variate Technique in Option Pricing,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 23, 237-251.

Hull, J. C., och White, A., 1990, ”Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 25, 87-100.

Jacka, S. J., 1991, “Optimal Stopping and the American Put,” *Mathematical Finance*, Vol. 1, No. 1, 1-14.

Johnson, H. E., 1983, ”An Analytic Approximation for the American Put Price,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 18, No. 1, 141-148.

Kim, I., J. 1990, ”The Analytic Valuation of American Options,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4,

Kreyszig, E. 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons.

Leisen, D.P., 1998, ”Pricing the American put option: A detailed convergence analysis for binomial models” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 22, 1419-1444.

Leisen, D.P., 1999, ”The random-time binomial model” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 23, 1355-1386.

Leisen, D.P., och Reimer, M., 1996, ”Binomial Models for Options Valuation- Examining and Improving Convergence,” *Applied Mathematical Finance,* Vol. 3, 319-346.

Longstaff, F.A., och Schwartz, E.S., 2001, ” Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,” *The Review of Financial Studies,* Vol. 14, No. 1, 113-147.

MacMillan, L. W., 1986, ”Analytic Approximation for American Put Option,” *Advances in Futures and Options Research,* Vol. 1, 119-139.

Merton, R. C., 1973, ”Theory of Rational Option Pricing,” *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-193.

Meyer, G. H., och van der Hoek, J., 1997, “The Valuation of American Options with the Method of Lines,” *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 9, 265-285.

Omberg, E., 1987, ”The Valuation of American Put Options with Exponetial Exercise Policies,” *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 2, 117-142.

Omberg, E., 1987-b, “A Note on the Convergence of Binomial-Pricing and Compound-Option Models,” *The Journal of Finance*, Vol. XLII, No. 2, 463-469.

Parkinson, M., 1979 ”Option Pricing: The American Put,” *Journal of Business* 50, 21-36.

Rendleman, R. J., och Bartter, B. J., 1979, ”Two-State Option Pricing” *The Journal of Finance*, Vol. XXXIV, No. 5, 1093-1110.

Sullivan, M. A., 2000, ”Valuing American Put Options Using Gaussian Quadrature,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 13, No. 1, 75-94.

Tian, Y., 1993, ”A Modified Lattice Approach to Option Pricing,” *The Journal of Futures Markets*, Vol. 13, No. 5, 563-577.

Tsitsiklis, J.N., and Van Roy, B., 2000, “Regression Methods for Pricing Complex American-Style Options,” To appear in *IEEE Transactions on Neural Networks.*

Wilmott, P., Dewynne, J., och Howison, S., 1993, *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press, Oxford.

Øksendal, B., 2000, *Stochastic Differential Equations*, (5^{th} edn.) Springer Verlag, Berlin Heidelberg.