Matematisk statistik
Stockholms universitet

Marknadsvärdering av försäkringstekniska avsättningar samt matchning av dessa och tillgångarna

Elizabeth Gomez

Examensarbete 2005:2

ISSN 0282-9169

Postadress:

Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:

http://www.matematik.su.se/matstat

Marknadsvärdering av försäkringstekniska avsättningar samt matchning av dessa och tillgångarna

Elizabeth Gomez*

Januari 2005

Sammanfattning

I balansräkningen hos ett försäkringsbolag sker idag generellt en marknadsvärdering av tillgångarna enligt nuvarande redovisningsregler. Försäkringstekniska avsättningarna (FTA) värderas däremot med en fast ränta. När de så kallade IAS/IFRS-reglerna införs i Sverige skall försäkringsbolagets FTA marknadsvärderas enligt samma principer som tillgångarna. Då kommer det att vara viktigt för bolaget att göra marknadsmässiga ränteantaganden.Detta arbete visar att det finns tillgängliga ränteinstrument på marknaden som kan användas som alternativ till en fast ränta vid värderingen av FTA. Med hjälp av en yieldkurva utifrån statsobligationer beräknas nuvärdet av framtida utbetalningar. Dessutom har en analys av hur en sänkt dödlighet tillsammans med använding av yieldkurvan inverkar på FTA gjorts. Slutligen studeras hur tillgångar och FTA kan matchas för att minimera ränterisken som marknadsvärderingen för med sig. Resultaten av värderingen med yieldkurvan visar att marknadsvärdering av FTA ger ett minskat avsättningsbehov, detta på grund av högre marknadsräntor än dagens fasta ränta. Däremot ökar risken för mismatch vid matchningen av tillgångar och FTA då man har långa durationer på avsättningarna. Eftersom vi idag inte har tillgång till nominella terminsstrukturer med lika långa löptider som FTA kan man med hjälp av extrapolation eller antaganden förlänga kurvan. I dessa fall kommer man att få en återinvesteringsrisk, så någon form av återinvesteringsriskavdrag bör göras på FTA med längre löptider.

* E-mail: eligomez@kth.se
Handledare: Tuomo Virolainen och Thomas Höglund

Abstract

Generally today in an insurance company, the company's assets are market valued according to current accounting standards. Liabilities are on the other hand valued with a constant interest rate. When the so called IAS or IFRS standards are introduced in Sweden, insurance company liabilities shall be market valued according to the same principles as the assets. Then, it will be of importance for the company to make market consistent interest rate assumptions.

This paper shows that interest rate instruments exist on the market which can be used as an alternative to using a constant rate when valuing pension liabilities. Using a yield curve based on government bonds, the present value of future payments are calculated. Furthermore, an analysis of how a decrease in mortality rate when using the yield curve affects pension liabilities has been done. Finally, a study on how assets and pension liabilities can be matched to minimize the interest rate risk brought on by market valuing has been done.

The results of valuing using the yield curve show that market consistent valuing of the pension liabilities result in a decrease in liabilities, due to higher market rates than today's constant rate. On the other hand, the risk for mismatching when matching assets and pension liabilities increases because of long liability durations. Since we today don't have access to nominal interest rate term structures with as long durations as the pension liabilities, extrapolation or other assumptions can be used to extend the yield curve. In these cases, a reinvestment risk will be encountered and some form of reinvestment risk deduction should therefore be made on pension liabilities with long durations.

Förord

Detta arbete utgör ett 20 poängs examensarbete i matematisk statistik och har utförts för KPA pensionsförsäkring AB i Stockholm.

Arbetet påbörjas på initiativ av Tuomo Virolainen, som är verksam som chefaktuarie på KPA och aktuariekollegan Lars-Erik Larsson.

Jag skulle vilja tacka alla som hjälpt mig under arbetet med denna uppsats. Först och främst vill jag tacka Tuomo som varit min handledare och Lars-Erik som har bidragit med nödvändiga datamaterial samt har assisterat med handledningen. Jag vill också tacka Eva Johansson, aktuarie på KPA, som deltagit i diskussioner kring arbetet och gav mig många goda råd under arbetets gång och Magnus Karlsson, aktuarie på kapitalförvaltningen på Folksam, som bidragit med nya idéer och värdefull hjälp under slutfasen av arbetet.

Slutligen vill jag rikta ett stort tack till Thomas Höglund, min handledare på matematiska institutionen vid Stockholms universitet, som har hjälpt till i processen med detta arbete.

Innehållsförteckning

1. MARKNADSVÄRDERING AV FTA

1.1. Bakgrund

I balansräkningen hos ett försäkringsbolag sker idag generellt en marknadsvärdering av tillgångarna enligt nuvarande redovisningsregler. Försäkringsåtaganden värderas däremot enligt en fast ränta (högsta fasta räntan) som bestäms av Finansinspektionen (FI). Högsta räntan är den högsta räntesats som ett livbolag får använda för att beräkna nuvärdet av utlovade pensionsmedel. Den bestäms årligen av FI och ska enligt EU-regler fastställas till 60 procent av den långa marknadsräntan.

Stora förändringar vad gäller försäkringstekniska avsättningar kommer att ske de närmsta åren då IAS/IFRS regler införs då utvecklingen inom redovisningsområdet går mot att även försäkringsskulder ska värderas enligt samma principer som tillgångarna.

Övergången till IAS/IFRS är mycket mer än en redovisningsteknisk fråga då både bolagens försäkringssystem och produkter påverkas. IAS/IFRS innebär, på ett antal viktiga punkter, ett nytt sätt att redovisa vilket leder till grundläggande förändringar i hur försäkringsbranschen gör affärer och hur den beskriver värdet som skapats för analytiker, investerare, försäkringstagare, tillsynsmyndigheter och andra intressegrupper.

Mot bakgrund av denna övergång kommer försäkringsbolagen att behöva utveckla nya metoder för marknadsvärdering av sina åtaganden.

1.2. Syfte

KPA vill med hjälp av detta arbete kunna beräkna nuvärdet av de försäkringstekniska avsättningarna (FTA) med hjälp av marknadsräntan (yieldkurvan) utifrån statsobligationer. Huvudinriktningen på arbetet är således marknadsvärde och riskanalys.

Mer konkret innebär detta att bestämma vilken marknadsränta som ska användas vid beräkning av bland annat framtida pensionsutbetalningar och se vilken effekt en övergång från en ränta bestämd av Finansinspektionen till marknadsränta har på nuvärdet av framtida utbetalningar.

Dessutom vill man utreda hur tillgångar och skulder kan matchas för att minimera ränterisken.

Inom området finns många ytterligare frågor som bör utredas teoretiskt och alternativa beräkningar som bör göras för att ge ett bättre underlag, men det ligger utanför omfattningen av det här arbetet.

1.3. Allmänt om IAS/IFRS

Enligt ett beslut i EU-parlamentet ska bolag vars aktier eller skuldebrev är noterade på en börs inom unionen, upprätta sin årsredovisning enligt IAS/IFRS standarder senast år 2005.

Syftet med IAS/IFRS är att de noterade företagen i sin finansiella rapportering ska tillämpa internationella regler som följer samma kvalitetskrav och tillgodoser den internationella kapitalmarknadens behov. Det främjar jämförelser mellan olika bolag från olika länder med varandra. I detta examensarbete behandlas dock enbart värdering av finansiella tillgångar och skulder/avsättningar i försäkringsföretag.

Vid kapitalvärdesberäkningar av pensionsåtaganden kräver IAS/IFRS att marknadsvärdering av åtagandet skall göras och att man tar hänsyn till de aktuariella antagandena som dödlighet, diskonteringsränta och driftkostnad. Om ett finansiellt instrument som värderas till verkligt värde används för säkring av en tillgång, avsättning eller skuld ska den säkrade positionen värderas till verkligt värde, om de tillämpade principerna för säkringsredovisning tillåter detta. I sista hand ska det verkliga värdet bestämmas med hjälp av sådana allmänt accepterade värderingsmodeller och värderingsmetoder som ger rimlig uppskattning av marknadsvärdet. Det är detta examensarbetet bland annat handlar om.

1.4. Allmänt om obligationer

En obligation är ett löpande skuldebrev, som innebär att innehavaren har en fordran på låntagaren. Obligationen skiljer sig från övriga skuldebrev genom att den har en större säkerhet. Fördelen med obligationer är att det är en relativt säker investering med en hög avkastning jämfört med till exempel banksparande. Men observera att ju längre löptid en obligation har, desto högre är risken (för räntehöjningar).

En annan fördel med obligationer är att dina pengar inte är bundna, du kan när som helst sälja din obligation i förtid. Om marknadsräntan vid säljtillfället är lägre än när du köpte obligationen kan du till och med göra en kursvinst. Om marknadsräntan istället är högre gör du en kursförlust. Det viktigaste är dock att om du låter pengarna stå kvar till löptidens slut, då får du alltid ut den garanterade räntan.

1.4.1. Lite historia om obligationer

Förr lånade Staten pengar av sina medborgare i form av krigsobligationer för att få pengar till mobilisering etc. Vad gäller statsobligationer idag, är det framför allt Riksgälden som lånar av medborgarna för att bland annat täcka sin upplåning av pengar. Obligationen är ett värdepapper, ett bevis, som visar att du placerat pengar hos den som givit ut obligationen. Obligationen talar också om villkoren för ditt sparande, det vill säga vilken ränta du får och för hur lång tid du placerat dina pengar.

2. BAKGRUNDSTEORI

2.1. Statsobligationer

Statsobligationer är medel- och långfristiga värdepapper med årlig kupongutbetalning. Kupongen är räntan på det nominella beloppet och är lika stor under hela obligationens löptid. Avkastningen på en statsobligation är summan av kupongutbetalningar under tiden för innehavet och skillnaden mellan försäljningspris och det pris obligationen köptes för. Vid förfall återbetalar Riksgälden det nominella beloppet.

2.2. Två sorters obligationer

På obligationsmarknaden finns två former av statsobligationer: kupongobligation och nollkupongsobligation. Uttrycket kupong kommer från den tid då man fick ett kupongark till varje obligation och varje år rev man av en kupong och fick mot den sin årliga ränta.

2.2.1. Kupongobligation

Kupongobligation är en obligation som varje år ger en bestämd utdelningsränta och vid varje ränteutbetalning dras automatiskt skatt jämställt med andra sparformer.

Kupongobligationer köps till det värde som utöver räntan återbetalas när obligationstiden löper ut (nominellt värde). Vad man faktiskt betalar för obligationen vid köpet kan variera och avgörs av det aktuella ränteläget.

2.2.2. Nollkupongsobligation

Som namnet antyder betalas ingen årlig ränta ut när man har en nollkupongsobligation (noll kuponger). Hela räntan betalas ut först när obligationen löper ut, därför dras inte heller någon skatt årligen utan dessa pengar ligger kvar i obligationen och förräntas.

2.3. Ränteteori

Eftersom livförsäkringsbolagens verksamhet består av förvaltning av försäkringstagarnas medel är räntan en väsentlig del i förvaltningsprocessen. Det finns många ränteinstrument på marknaden, men i detta arbete ska vi fördjupa oss i den matematiska beskrivningen av obligationer, hur de värderas samt hur man med hjälp av dem kan värdera tillgångar och skulder. Nedan följer ett antal definitioner.

2.3.1. Effektiv ränta

En effektiv årsränta, R_{eff}, för n investeringsperioder av samma längd, dagar, d, och med samma ränta, R_n, beräknas enligt

$$R_{eff} = \left(1 + \frac{r_n}{n}\right)^n - 1$$

där $n = 360/d$.
Vid kontinuerlig förräntning gäller att

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{r_n}{n})^n = e^{\delta}$$

där

$$\delta = \lim_{n \to \infty} (r_n)$$

En enkel effektiv årsränta som ger en avkastning lika med R_{eff} om man använder kontinuerlig förräntning

$$R_{eff} = e^{\delta} - 1 \qquad \delta = \ln(1 + R_{eff})$$

där δ är ränteintensiteten.

2.3.2. Nuvärde

Ett kapital som förräntas årsvis med räntefoten *r* växer enligt följande

$$k(0) = \frac{k(t)}{(1+r)^t}$$

där *k(0)* och *k(t)* är det ursprungliga värdet respektive värdet efter tiden *t*.
Nuvärdet *k(0)* är värdet idag av en framtida betalning(sström) genom framtida nominella belopp, det vill säga

$$k(0) = k(t) \; e^{-\delta t}$$

vid kontinuerlig förräntning.

2.3.3. Diskonteringsränta

Den ränta som används för att diskontera ett kassaflöde i framtiden till dess nuvärde. Den reflekterar pengarnas tidsvärde och risken förknippad med kassaflödet.

$$d_t = (1+r)^{-t}, t > 0$$

2.3.4. Riskfria räntan (benchmarkränta)

Riskfria räntan är en fast ränta som gör att man vet exakt vad en investering i början av perioden ger i slutet av perioden, det vill säga den avkastning man kan erhålla utan att ta någon risk under en given tidsperiod. Oftast baseras denna ränta på en statsobligation med samma löptid som tidsperioden i fråga.

2.4. Räntemodeller

För att bestämma avkastningskurvan måste man utveckla en räntemodell som ska användas vid beräkningen av marknadsräntan över en tidsperiod. I detta arbete kommer vi att använda oss av kupongobligationers marknadsräntor (YTM) för att räkna fram en avkastningskurva. Därför är det intressant att känna till hur obligationer prissätts och värderas.

2.4.1. Prissättning av obligationer

Prissättningen av en nollkupongare med *n* år till förfall ges av

$$P = \frac{N}{(1+R_n)^n}$$

Prissättningen av en kupongobligation sker genom att obligationen betraktas som ett paket av nollkupongare enligt

$$P = \frac{N}{(1+R_n)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+R_t)^t}$$

där

N = nominellt belopp som utfaller till betalning om n år.
C = kupongutbetalning (kupongränta) som betalas ut varje år.
R_t = enkel årsränta med t års löptid, där $t = 1, \ldots, n$

Prissättning av en kupongobligation med kontinuerliga räntor ges av

$$P = N\ e^{-n\,r_n} + \sum_{t=1}^{n} C\ e^{-t\,r_t}$$

där

$$r_t = \ln(1+R_t)$$

2.4.2. Yield-to-maturity, YTM

En väsentlig faktor som används vid prissättning och värdering av obligationer är dess marknadsränta, den så kallade ”yield-to-maturity” (YTM). Obligationen marknadsnoteras i form av en ränta, obligationens så kallade internränta eller avkastningskrav som beror på kupongräntan, tiden till förfall och marknadspriset.

Denna ränta härleds från obligationens pris genom följande

$$P = \frac{N}{(1+Y)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+Y)^t}$$

där Y är obligationens yield to maturity.
För en nollkupongare är $Y = R_n$.

YTM är ett mått på obligationens kassaflöde och är således användbart för att jämföra kassaflöden av olika obligationer.

Det finns dock begränsningar med YTM, som till exempel:

- YTM anger inte en säker avkastning, eftersom det existerar en återinvesteringsrisk för varje enskild kupongutbetalning. Normalt är framtida räntor inte kända.
- Olika YTM för olika obligationer betyder implicit att man kan återinvestera de olika obligationernas framtida kuponger med olika räntor, men i verkligheten investeras kuponger med den gällande räntan.

2.4.3. Yieldkurvan (avkastningskurvan)

Yieldkurvan beskriver en beräknad avkastning för räntebärande tillgångar med samma kreditrisk, men med olika löptider. I detta arbete ingår endast effektiva räntor (YTM) för kupongobligationer i yieldkurvan eftersom de ger en garanterad riskfri avkastning till förfall.

Det är normalt att yieldkurvan har positiv lutning, det vill säga räntan är högre för papper med längre återstående löptid, vilket indikerar att risken ökar med löptiden.

2.5. Livförsäkringens sannolikhetsteori

För att förstå innebörden av analysen och värderingen av reservsättning i detta arbete behövs en viss bakgrund av sannolikhetsteori inom livförsäkringsmatematik.

Den typ av pensionsåtaganden som behandlas i detta examensarbete är ***livsvariga egenpensioner***, vilket innebär att pensionsbeloppet börjar utbetalas först efter en i avtalet angiven tid och upphör vid den försäkrades dödsfall.

Det innebär att vid nuvärdesberäkningar av framtida utbetalningar måste hänsyn tas till det faktum att den försäkrade förr eller senare dör. Dessutom måste man givetvis vid nuvärdesberäkningen även ta hänsyn till den ränta man förmodas erhålla på investerat kapital från idag fram till utbetalningstidpunkten.

2.5.1. Överlevnadsfunktionen l(x)

Generellt gäller det att ju äldre man är desto kortare tid har man kvar att leva. Antag att vi har en grupp försäkrade människor, då kommer den återstående livslängden i år för en x-årig person i denna grupp att beskrivas av den stokastiska variabeln T_x. Fördelningsfunktionen för T_x beror på åldern x eftersom den återstående livslängden beror på den aktuella åldern x.

Låt fördelningsfunktionen betecknas med F, då fås

$$F(x,t) = P(T_x \leq t), \quad t \geq 0$$

Inom livförsäkringsteori finns det en funktion som beräknar sannolikheten för att en x-årig försäkrad ska leva vidare i mer än t år. Denna funktion kallas för överlevnadsfunktionen och härleds nedan:

$$l(x,t) = 1 - F(x,t) = P(T > x + t \mid T > x) =$$
$$= \frac{P(T > x+t)}{P(T > t)} = \frac{1 - P(T \le x+t)}{1 - P(T \le t)} = \frac{l(x+t)}{l(t)}, \quad x \ge 0, \quad t \ge 0$$

där $l(x,t)$ är överlevnadsfunktionen och $l(t) = P(T > t)$.

2.5.2. Dödlighetsintensitet μ(x)

Inom livslängdmodellerna i livförsäkringsmatematiken används en faktor som kallas för dödlighetsintensiteten, $\mu(x)$. Den används för att beskriva dödligheten i olika åldrar. $\mu(x)$ är sannolikheten att en person avlider i intervallet (x, x+dx) och definieras som

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{(1 - F(x))}, \quad x \ge 0$$

där

$$f(x) = F'(x) = -l'(x)$$

och

$$F(x) = P(T \le x)$$

2.5.3. Samband mellan l(x) och μ(x)

Mellan överlevnadsfunktionen l(x) och dödlighetsintensiteten $\mu(x)$ gäller alltså följande:

$$\int_0^x \mu(t)dt = \int_0^x \frac{d}{dt}(-\ln(l(t))dt = -\ln(l(t))\Big|_0^x = \ln(l(0)) - \ln(l(x)) = -\ln(l(x))$$

alltså,

$$l(x) = e^{\ln(l(x))} = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}$$

En av de livslängdsmodeller som används för dödlighetsskattning inom livförsäkringsmatematiken är Makehams formel

$$\mu(x) = a + b\ e^{cx}, \text{ där a+b>0, b>0 och } c \ge 0$$

således blir

$$l(x) = e^{-\int_0^x (a + b\ e^{ct})dt} = \exp(-ax - \frac{b}{c}(e^{cx} - 1)$$

I dessa beräkningar använder vi oss av Finansinspektionens författningssamling (FFFS 2001:13) vilket medför en distinktion mellan könen, där parametrarna i Makehams formeln får följande skattningar

a = 0
b_{kvinna} = 0,0000089
b_{man} = 0,0000154

c = 0,103

2.6. Kommutationsfunktioner

Kommutationsfunktionerna D(x) och N(x) är två funktioner som gör livförsäkringstekniska beräkningar enklare.

$$D(x) = l(x)e^{-\delta x}, \quad \delta = \ln(1 + r \quad sk) - dk$$

där

r = ränta,
sk = skatt och
dk = driftkostnadsavgift

och

$$N(x) = \int_x^{\infty} D(u)du$$

Med hjälp av dessa två funktioner kan man enkelt beräkna värdet av en livränta om 1 kr per tidsenhet som utbetalas till en x-årig försäkrad från och med uppnådd ålder z = x + n som

$$\frac{N(z)}{D(x)} = \int_z^{\infty} \frac{D(u)}{D(x)} du = \int_z^{\infty} \frac{l(u)}{l(x)} e^{-\delta(u-x)} du$$

där z = pensionsåldern[1]

Det går även att beräkna till exempel kapitalvärdet av en livsvarig livränta, det vill säga en konstant utbetalningsström per period under den försäkrades återstående livslängd, som följande:

$$e^{-\delta t_i} \quad \frac{l(x+t_i)}{l(x)} \quad \Delta t_i$$

Summering för alla perioder ger, om $\Delta t_i \to 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \frac{l(x+t)}{l(x)} dt = \int_0^{\infty} \frac{D(x+t)}{D(x)} dt = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$N(x)$ kan beräknas med hjälp av Simpsons approximationsformel med två intervall och lyder enligt definition

$$N(x) = \int_x^{\infty} D(u)du = \text{enl. def.} = \int_{x_0}^{x_n} D(u)du =$$

$$= \frac{h}{3} \left[\begin{array}{l} D(x_0) + 4D(x_1) + 2D(x_2) + 4D(x_3) \\ + \ldots + 4D(x_{n-3}) + 2D(x_{n-2}) + 4D(x_{n-1}) + D(x_n) \end{array} \right]$$

---

[1] I praktiken görs ofta beräkningar med pensionsåldern 64 år och 11 månader istället för 65 år

där $x = x_0 =$ aktuell ålder, h är steglängden och n $= 0, 1, 2, \ldots$

3. BERÄKNING AV FTA

I det här arbetet är det intressant att beräkna livförsäkringsavsättningar eftersom de består av en uppskattning av mellanskillnaden mellan den utbetalning i framtiden som bolaget åtagit sig att göra till sina försäkringstagare och de premier som försäkringstagarna åtagit sig att betala in.

Livförsäkringsteknisk avsättning, V(t) = A(t) – B(t), där V(0) = 0, A(t) är kapitalvärdet av bolagets förpliktelser och B(t) är kapitalvärdet av försäkringstagarens förpliktelser, ska avsättas som skuldpost i bolagets balansräkning. Här betecknar t försäkringens duration vid bokslutstidpunkten.

I detta arbete använder vi oss av en förenklad modell för beräkningen av försäkringsavsättningar, där man undersöker hur värdet på kontot förändras under en tidsenhet.

Det följer att

$$V(t) = U_{avg} \quad FB \quad \frac{N(x)}{D(x)}, x > z$$

$$V(t) = U_{avg} \quad FB \quad \frac{N(z)}{D(x)}, x < z$$

där

V(t) = värdet på kontot vid tiden t
U_{avg} = en utbetalningsbelastning
FB = försäkrings-/pensionsbelopp
x = aktuell ålder
z = pensionsålder
t = år

4. DISKONTERINGSRÄNTAN

Med anledning av att FTA skall beräknas realistiskt bör diskonteringsräntan för livförsäkringsavsättningar bestämmas via en terminsstruktur som härleds från marknaden.

Val av terminskurva beror dels på huruvida försäkringsprodukten består av nominella belopp eller reala belopp. I vårt fall har vi livsvariga egenpensioner med nominella belopp, alltså väljer vi en avkastningskurva för statsobligationer.

4.1. Modell för fastställande av diskonteringsräntan

Man vill bygga en avkastningskurva över ett tidsplan istället för en fast ränta för värdering av tillgångar och försäkringstekniska avsättningar, vilken sedan kan användas till att beräkna exempelvis den förväntade försäkringstekniska skulden för ett försäkringsbestånd.

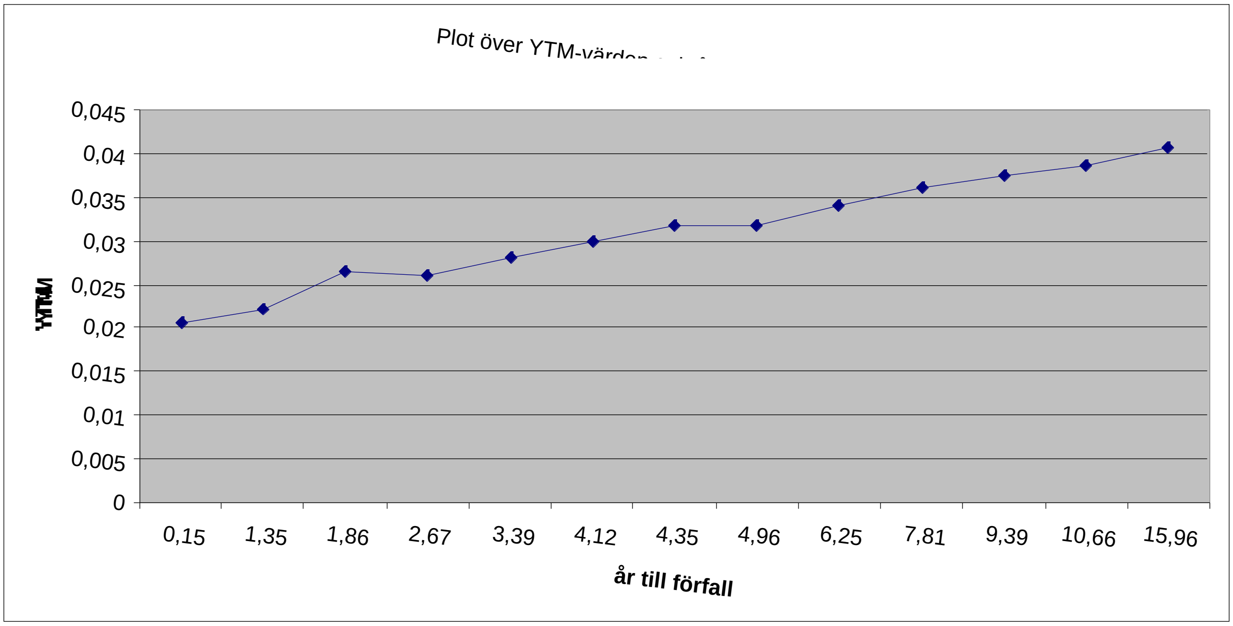
Data för statsobligationerna i tabellen nedan är inhämtat från Riksgäldskontorets hemsida och dagsnoteringarna (ytm) från Stockholmsbörsen avser 2004-12-15. I Sverige har statsobligationer dagkonventionen 30E/360, det vill säga varje månad har exakt 30 dagar, vilket vi ska också använda oss av.

Namn	År till förfall	Kupongränta (%)	Yield-to-maturity (ytm)
SO-1034	4,35	9	0,03165
SO-1035	0,15	6	0,02055
SO-1037	2,67	8	0,02615
SO-1038	1,86	6,5	0,02645
SO-1040	3,39	6,5	0,02805
SO-1041	9,39	6,75	0,03755
SO-1043	4,12	5	0,02985
SO-1044	1,35	3,5	0,02205
SO-1045	6,25	5,25	0,03400
SO-1046	7,81	5,5	0,03620
SO-1047	15,96	5	0,04065
SO-1048	4,96	4	0,03185
SO-1049	10,66	4,5	0,03870

Tabell 4:1 Statsobligationer, marknadsnotering den 2004-12-15

Alla statsobligationer ovan betalar ut en ränta under löptiden. I Sverige är ränteterminen oftast ett år, det vill säga kupongutbetalningar sker en gång per år.

Nedan är en plot över yieldkurvan för de observerade YTM värdena.



Figur 4:1 Graf över observerade ytm-värde och år till förfall

4.2. Beräkning av yieldkurva/avkastningskurva

För att värdera olika instrument behöver vi veta vilken ränta vi ska diskontera de framtida kassaflödena med, så att vi skall kunna beräkna nuvärdet. Speciellt är yieldkurvor viktiga för instrument med flera kassaflöden, till exempel statsobligationer. Vi ska med hjälp av interpolation ta fram en kontinuerlig kurva som returnerar marknadsräntan för varje tidsenhet.

4.2.1. Interpolation

Vid interpolation approximerar vi ett funktionssamband med en funktion av en given typ, ofta ett polynom, så att approximationen är exakt i ett antal givna punkter. Den approximerande funktionen kallas interpolationsfunktion. Interpolation innebär sedan att vi approximerar funktionsvärden mellan de givna punkterna med interpolationsfunktionen, det vill säga interpolation gör det möjligt att beräkna teoretiska värden som ligger mellan de kända värdena och på så vis skapa en kontinuerlig funktion.

4.2.2. Interpolationsmetoder

Det finns en rad olika interpolationsmetoder med olika egenskaper. Efter att ha utvärderat ett antal interpolationsmetoder så kommer endast metoderna redovisade nedan att studeras vidare i detta examensarbete.

- Linjär interpolation
- Kubisk spline
- Hermite interpolation

(Se Appendix A.1 och A.2 för en matematisk beskrivning av de sista två metoderna)

4.2.3. Linjär interpolation

Linjär interpolation går ut på att man sammanbinder på varandra följande YTM-värden med linjesegment och på så vis skapa en sammanhängande kurva. En linjärinterpolerad kurva för YTM enligt Tabell 4:1 består av tolv linjära funktioner $Y_i(t)$, som var och en går genom två punkter T_i och T_{i+1} enligt:

$$Y_i(t) = Y_i + \frac{(t - T_i)}{(T_{i+1} - T_i)} \ (Y_{i+1} - Y_i)$$

där

$$i = 1, \dots, n\text{-}1, \ T_i \le t \le T_{i+1}$$

och Y_i är YTM värdena och T_i är löptiderna.

Se ploten över yieldkurvan med linjär interpolation i A*ppendix Figur 7:1*

Nackdelen med linjär interpolation är att kurvan kan ha skarpa vinklar där linjerna möts, vilket resulterar i stora hopp då man har få observationer.

4.2.4. Kubiska splinesinterpolation

Tekniken går ut på att anpassa polynom av graden tre till ett antal punkter med ett polynom per intervall, det vill säga antalet polynom är ett mindre än antalet YTM-värden. I vårt fall arbetar vi med så kallade naturliga splines, vilket innebär att andraderivatorna sätts till noll vid ändpunkterna.

Se ploten över yieldkurvan med kubiska splines i A*ppendix Figur 7:2*

Bristerna med denna metod är tydligast då man använder den även för extrapolering, då värdena kan bli orimliga.

4.2.5. Hermite interpolation

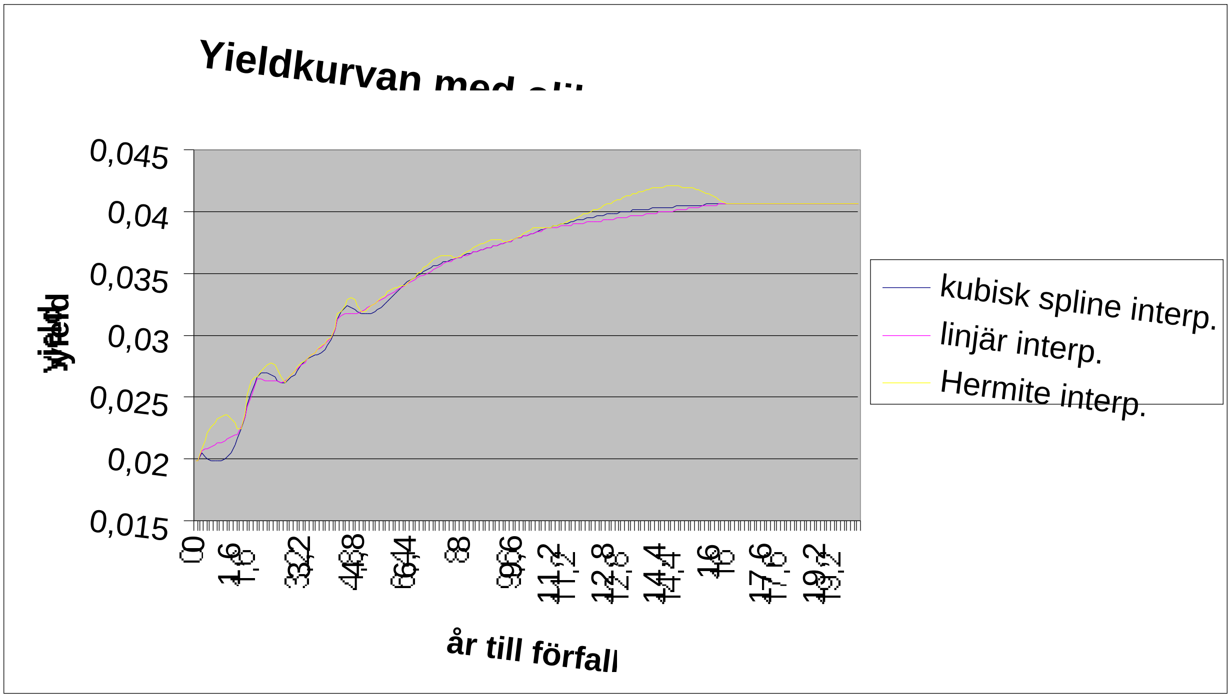
Denna interpolationsteknik, som också kallas för ”clamped cubic spline”, gör att skift i den interpolerade kurvan endast påverkar närliggande punkter. *Se ploten i Appendix Figur 7:3*

Problemet med denna teknik är att de interpolerade räntorna blir något högre än med linjär interpolation respektive kubisk splineinterpolation.

4.3. Val av modell

Att välja rätt interpolationsmetod kan många gånger vara svårt. Alla tre metoder har bra egenskaper och är enkla att använda.

Ploten nedan visar de tre yieldkurvorna ritade på samma graf. Här ser man tydligt att kurvan med Hermite interpolation ligger ovanför de andra två kurvorna i hela intervallet.



Figur 4:2 Graf över de olika yieldkurvorna

Den Hermite interpolerade kurvan är minst konsistent med marknadsdata men eftersom skillnaderna mellan kurvorna är mycket små så används alla tre kurvor i de fortsatta beräkningarna.

5. BESKRIVNING AV DATA

För att göra en fullständig analys av lämplig värderingsprincip kommer vi att inrikta oss på att försöka bestämma vilken diskonteringsränta som bäst beskriver pengars tidsvärde, i vårt fall värdet av en portfölj med livförsäkringsåtaganden. Dessutom belyses de aktuariella antaganden som ingår i värdering av livförsäkringsavsättningar.

Till hjälp för beräkningen av nuvärdet av utbetalningsströmmen (FTA) med yieldkurvan finns ett datamaterial som utgörs av PFA försäkringar (tjänstepensioner) med följande uppgifter:

- ålder
- kön
- pensionsåldern, 65 år
- pensionsbelopp

För att utföra FTA-beräkningarna och beräkningen av yieldkurvor har ett program skrivits i Microsoft Excels inbyggda programmeringsspråk – Visual Basic for Applications (VBA). Programmet används också för att studera hur till exempel olika ränteantaganden påverkar dels FTA beräknad enligt dagens system och dels FTA beräknad enligt yieldkurvan.

5.1. Beräkning av FTA med konstant ränta, 3,5%

<u>Exempel 1</u>

En försäkrad man och en försäkrad kvinna som är 70 år gamla och har 500 kr/månad i pensionsbelopp ger en reserv på 70 822 kr respektive 85 673 kr. Skillnaden i avsättningarna beror på att kvinnor i Sverige har lägre dödlighet än män.

$$\frac{N(70)}{D(70)} = (man) = 11{,}72 \text{ och } \frac{N(70)}{D(70)} = (kvinna) = 14{,}19$$

där

$$\text{Kapitaliseringsfaktor} = \begin{cases} \dfrac{N(z)}{D(x)}, x < z \\ \dfrac{N(x)}{D(x)}, x > z \end{cases}$$

En viktig sak att påpeka är att här antar man att alla börjar ta ut sina pensionskapital vid 65 års ålder och att man beräknas leva till max 120 år.

Tabellen nedan visar avsättningar för olika kön och åldrar, där alla försäkrade har samma pensionsbelopp.

Kön	Ålder	Pensionsbelopp/mån	FTA
K	30	500	37 925
M	30	500	30 703

K	35	500	43 205
M	35	500	35 011
K	40	500	49 264
M	40	500	39 983
K	50	500	64 388
M	50	500	52 625
K	60	500	85 620
M	60	500	71 363
K	65	500	99 690
M	65	500	84 738
K	70	500	85 673
M	70	500	70 822

Tabell 5:1 Avsättningar uppdelat på kön och ålder med konstant ränta

Trots att alla försäkrade har samma pensionsbelopp ser man att bolaget alltid måste reservera ett större belopp till de kvinnliga försäkrade än manliga, på grund av att kvinnor har en lägre dödlighet än män och därför antas leva längre än män.

5.2. Beräkning av FTA med yieldkurvan, y(t)

Utifrån indata beräknas FTA per månad för varje försäkrad, där en marknadsmässig diskonteringsränta hämtas från en avkastningskurva. I det här fallet används avkastningskurvan som konstruerats med hjälp av linjär interpolation. Den nya ränteformeln lyder så här

$$\delta = ln(1 + y(t) \quad sk) - dk \text{ , t = 0, 1, 2, …, 20 år}$$

där y(t) är yielden, det vill säga en funktion som returnerar marknadsräntan för varje tidsenhet.

Eftersom man i Sverige idag inte har någon statsobligation med återstående löptid längre än 16 år beslutar jag mig för att använda marknadsräntan för den längsta obligationen (SO-1047) för alla utbetalningstidpunkter större än 16 år. Extrapolering utanför observerade punkter kan vara farligt, särskilt om modellen är anpassad för maximum 16 års duration.

Om vi till exempel antar att kurvan tar slut efter 16 år men åtagandet är på 30 år, om 16 år måste man återinvestera till en idag okänd ränta. I fortsättningen kommer vi att anta att yieldkurvan bortom den sista räntepunkten är konstant och lika med räntan för obligationen SO-1047.

Kön	Ålder	Pensionsbelopp/mån	FTA
K	30	500	31 334
M	30	500	25 642
K	35	500	36 537
M	35	500	29 928
K	40	500	42 641
M	40	500	34 982
K	50	500	58 404
M	50	500	48 254
K	60	500	82 395

M	60	500	69 542
K	65	500	98 516
M	65	500	84 796
K	70	500	85 643
M	70	500	71 645

Tabell 5:2 Avsättningar uppdelat på kön och ålder med yielden

När man tittar på yieldkurvan så ser man att yielden i de flesta tidspunkterna är större än det ränteantagande som råder idag (3,5%) och därför minskar reserven. En annan bidragande orsak till reservminskningen är att man i de flesta fallen diskonterar över 16 år och oftast använder den långa marknadsräntan vilken för närvarande är över 3,5%.

5.3. Testresultat

Ett antal tester har utförts för att studera hur olika ränteantagande påverkar dels livförsäkringsavsättningarna beräknad enligt dagens system, och dels livförsäkringsavsättningarna beräknad enligt de tre avkastningskurvorna.

Testresultaten finns redovisade i tabellerna nedan.

	Räntan, r = 3,5%	$r = y_1(t)$	$r = y_2(t)$	$r = y_3(t)$
FTA	1 205 937 882	1 049 916 648	1 049 261 314	1 046 752 230
minskning (%)		12,9	13,0	13,2

Tabell 5:3 Marknadsnoteringar från 2004-10-18

där

$y_1(t)$ = yieldkurvan, beräknad med linjär interpolation
$y_2(t)$ = yieldkurvan, beräknad med kubiska splines och
$y_3(t)$ = yieldkurvan, beräknad med Hermite interpolation

Minskningen i FTA är beroende av rådande marknadsräntor då beräkningen gjordes, om marknadsräntan ökar sjunker avsättningsbehovet. Resutaltet i tabellen ovan visar FTA för hela delbeståndet den 2004-10-18. Det vill säga FTA minskar med ungefär 13% denna dag.

Resutaltet i tabellen nedan visar FTA för hela delbeståndet den 2004-11-22.

	Räntan, r = 3,5%	$r = y_1(t)$	$r = y_2(t)$	$r = y_3(t)$
FTA	1 205 937 882	1 068 719 664	1 068 146 311	1 065 510 842
minskning (%)		11,4	11,4	11,6

Tabell 5:4 Marknadsnoteringar från 2004-11-22

Ökningen i FTA i tabellen ovan beror på fallande marknadsräntor, som medför att vi får ett minskat avsättningsbehov på drygt 11%.

Marknadsnoteringar den 2004-12-15 ger följande resultat:

	Räntan, r = 3,5%	$r = y_1(t)$	$r = y_2(t)$	$r = y_3(t)$
FTA	1 205 937 882	1 129 483 952	1 128 881 262	1 126 401 503
minskning (%)		6,3	6,4	6,6

Tabell 5:5 Delbeståndets totala avsättningar med olika yieldkurvor

Det visar sig att FTA-beräkningen med de tre olika yieldkurvorna ger en minskning av FTA på drygt 6% jämfört med den konstanta räntan. Som tidigare påpekats beror minskningen på att de olika yield-värdena är större än räntan 3,5% i de flesta utbetalningsdurationerna.

Dessutom är de flesta försäkrade ur beståndet som behandlas i simuleringen under 65 år och därför kommer nuvärdet att diskonteras i över 16 år med den långa marknadsräntan. Det medför att vi får samma avsättningar för alla försäkrade av samma kön och ålder yngre än 50 år. *(se Tabell 7:1)*.

Tyvärr har vi inte en tillräckligt lång yieldkurva att använda för alla marknadsmässiga diskonteringsräntor som skulle kunna vara lämpligare än den långa marknadsräntan SO-1047.

5.4. Effekt av en förändring i dödlighet vid olika yieldkurvor

Då man sänker dödlighetsintensiteten med till exempel 10% och utför motsvarande FTA-beräkningar som ovan med en ränta på 3,5% så ökar FTA med ungefär 3,6%. För att studera vilken effekt en förändring av dödlighetsintensiteten har vid de olika yieldkurvorna gjordes en jämförelse av FTA beräknad dels enligt dagens system och dels enligt yieldkurvorna.

Testresultaten finns redovisade i tabellen nedan, där dödligheten sänks med 10%, marknadsnoteringar från den 2004-12-15.

	Räntan, r = 3,5%	$r = y_1(t)$	$r = y_2(t)$	$r = y_3(t)$
FTA	1 246 787 149	1 165 066 024	1 157 423 795	1 161 942 562
minskning (%)		6,6	7,2	6,8
skillnad mellan FTA före och efter dödlighetssänkningen (%)	3,4	3,2	2,5	3,2

Tabell 5:6 Delbeståndets totala avsättningar med olika yieldkurvor, 10% sänkt dödlighet

Man ser att en minskning av dödligheten resulterar i en viss ökning i FTA för hela beståndet, det vill säga försäkringsåtaganden blir mer värda.

En minskning av dödligheten medför att avsättningarna ökar något men reservbehovet har minskat med i ungefär 7% vid diskontering med yieldkurvorna. Resultatet visar också att yieldkurvan medför ett minskat avsättningsbehov trots lägre dödlighet. Den kubiska spline interpolerade kurvan ger den största minskningen av avsättningar, detta eftersom denna kurva är mer konsistent med marknadsdata. För mer information *se Appendix* Tabell 7:2.

5.5. Yieldkurvans inverkan på eget kapital

Ett problem som uppstår till följd av kommande redovisningsregler är att skuldsidan för långa försäkringsavtal är känsligast för ränteändringar. Om marknadsräntorna eller yieldkurvan sjunker kan en förstärkning av livförsäkringsavsättningarna erfordras. Om denna kostnad för förstärkning ska bäras av det egna kapitalet innebär det en stor belastning för bolaget.

Detta visar att om marknadsräntorna sjunker måste värdet på de åtaganden som bolaget har mot sina sparare värderas högre och vice versa. Om skulderna blir mer värda ökar kravet på eget kapital.

Det är dock möjligt att hitta modeller som gör det egna kapitalet mindre känsligt för ränteförändringar i yieldkurvan. Detta visas i ett senare avsnitt.

5.6. Fördelar med yieldkurvan som en modell för en marknadsmässig riskfri ränta

De fördelar som kan anses föreligga med en riskfri marknadsränta som grund för att fastställa diskonteringsränta är att den

- finns tillgänglig på marknaden
- är konsistent med moderna prissättningsmodeller för finansiella tillgångar som till exempel ”Capital Asset Pricing Model” (CAPM).

5.7. Nackdel med yieldkurvan som en modell för en marknadsmässig riskfri ränta

Den nackdel som man stötte på i det här arbetet är att yieldkurvan inte är tillräckligt lång och därför räcker den inte till för diskontering för hela den framtida utbetalningsperioden, åtminstone inte utan extrapolering. Beståndet består av långfristiga livförsäkringsåtaganden med durationer mycket längre än durationen för den längsta statsobligationen (SO-1047) på marknaden. I så fall bör ett avdrag för återinvesteringsrisken göras för den osäkerhet som följer av att yieldkurvan extrapoleras oändligt.

Ett sätt att lösa detta problem vore att förlänga yieldkurvan bortom den tidpunkt där kurvan inte är definierad med en swapräntekurva, men denna modell tas inte upp i detta arbete.

5.8. Fördelar med en marknadsmässig diskonteringsränta

Fördelar med en marknadsmässig diskonteringsränta är att

- den är en konsistent modell med en marknadsvärdering av tillgångarna.
- den ger vid varje tidpunkt en aktuell värdering av FTA.
- genom en marknadsmässig värdering av försäkringsåtaganden ges en mer rättvis bild av den volatilitet som försäkringsbolagets tillgångar och skulder präglas av.

6. MATCHNING AV FTA OCH TILLGÅNGARNA

6.1. Marknadsrisker

Det är vanligt att försäkringsbolagen investerar försäkringstagarnas pensionsmedel i obligationsmarknaden, där det är normalt att kapitalet förvaltas och återinvesteras typiskt i över tjugo år innan utbetalning. Med tanke på kommande redovisningsregler om marknadsvärdering av FTA är det viktigt att ta stor hänsyn till de marknadsrisker som kan uppstå.

De statsobligationer som används i det här arbetet är visserligen utan kreditrisk men är ändå utsatta för fluktuationer i marknadsvärdet, det vill säga har marknadsrisk.

Marknadsrisker som investerare i obligationsmarknaden ställs inför är ränterisk, valutarisk, inflationsrisk, politisk risk, etc. I det här arbetet kommer vi att fördjupa oss i ränterisker, det vill säga, vi kommer att mäta känsligheten i räntebärande tillgångar för en given ränteförändring. Ett effektivt sätt att mäta denna känslighet är med hjälp av durationsanalys.

6.2. Durationsanalys

Duration[2] är ett användbart mått på finansiella tillgångars känslighet för ränteförändringar. Durationsanalys är ett effektivt koncept som även kan tillämpas på finansiella tillgångar som obligationer, annuiteter, försäkringsavtal samt aktieoptioner. I stort sett har allt som involverar framtida betalströmmar som kan diskonteras med någon ränta en duration.

Betraktar man obligationer med samma kupongränta har obligationer med långa löptider brantare pris-yieldkurvor än obligationer med korta löptider. Därför är priser för obligationer med långa löptider mer känsliga för ränteförändringar än de med korta löptider.

I *Figur 7:5 i Appendix* ser vi att durationen för en kupongobligation påverkas av obligationens löptid, kupongränta samt yield. Duration har följande egenskaper:

- längre löptid medför högre duration
- högre kupongränta medför lägre duration
- högre yield medför lägre duration

Detta på grund av att man oftast har ett större kassaflöde innan obligationens förfall vilket medför att återinvesteringsrisk och prisrisk balanseras vid en tidigare tidpunkt. En högre yield och därmed en högre återinvesteringsränta ger samma effekt.

Figur 7:5 *i Appendix* är en plot över statsobligationens duration som funktion av dess år till förfall.

Ur denna graf kan man sammanfatta följande:

---

[2] Se appendix för en matematisk beskrivning av duration

- Durationen minskar när löptiden kvar till förfall minskar. Den minskar långsammare i början och snabbare i slutet.

Durationsanalysen gör det möjligt att kombinera olika räntebärande instrument för att minska ränterisken så att en approximativt känd avkastning uppnås.

6.3. Konvexitet

Konvexitet är ett mått på hur snabbt durationen förändras vid ränteförändringar.

$$konv = \frac{\partial^2 P}{\partial (1+y)^2} \frac{1}{P} = \frac{1}{(1+y)^2} \frac{1}{P} \left(\frac{n(n+1)N}{(1+y)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{t(t+1)C}{(1+y)^t} \right)$$

Obligationer med samma duration men olika konvexitet påverkas olika av ränteförändringar.

6.4. Immunisering av ränterisken

Som tidigare nämnts är ett av målen med detta arbete att tillämpa marknadsvärdering (så kallad fair-valuing) av livförsäkringsåtaganden och sedan lösa frågan hur tillgångar och skulder kan matchas för att minimera ränterisken.

Immunisering är en metod som innebär att en obligationsportfölj har en given avkastning över en viss placeringshorisont, oberoende av utvecklingen i marknadsräntor. Metoden använder sig av duration och konvexitet för att skydda obligationsportföljer mot ränteändringar och därmed matcha portföljens tillgångar och skulder. I vårt fall är skulderna försäkringstekniska avsättningarna.

6.5. Portföljteori

Det finns många olika sorters risk som en investerare måste beakta vid val av investeringsstrategi. Det är viktigt att veta hur stor risken är vid en viss avkastning samt vilka risker de olika investeringsalternativen för med sig.

Risk mäts med hjälp av varians och standardavvikelse. Variansen av avkastningen beräknas genom att ta den verkliga avkastningen, subtrahera den förväntade avkastningen och höja hela uttrycket i kvadrat. Standardavvikelsen beräknas sedan genom att ta kvadratroten av variansen.

Medelvärde är en skattning av förväntade värdet av en slumpvariabel.

medelvärde: $m = E[\Delta r_t] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \Delta r_t$

varians: $\sigma^2 = E[(\Delta r_t - m)^2] = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (\Delta r_t - m)^2$

standardavvikelse: $= \sqrt{\sigma^2}$

Eftersom vår tillgångsportfölj består av kupongobligationer är det viktigt att mäta hur mycket räntorna fluktuerar, det vill säga bestämma portföljens volatilitet. Volatilitet mäts som spridning i förändring av räntenivå kring medelvärdet.

När det gäller räntebärande tillgångar beräknas obligationernas sannolika prisförändringar med hjälp av förväntade ränteförändringar. Durationsmåttet används som känslighetsmått, eventuellt korrigerat för konvexitet.

6.6. Historisk simulering

Det vanliga sättet att beräkna variansen är att ge samma vikt till alla historiska observationer. Val av vilken tidshorisont och tidsperiod som volatiliteten ska mätas över är viktig och beror på hur lång tid som bedöms vara realistisk för att avveckla de räntebärande tillgångarna i portföljen. Urvalsperioden å sin sida avser hur långt tillbaka observationer på ränteförändringar ska hämtas för att mäta volatiliteten.

Antag att vi har fyra olika portföljer med medellivslängd (duration) 1,5, 2, 2,5 och 3 år. Varje portfölj innehåller två olika obligationer med följande viktdelning.

Stasobligation	Portfölj 1	Portfölj 2	Portfölj 3	Portfölj 4
SO-1034				17%
SO-1037			72%	83%
SO-1038	11%		28%	
SO-1040		28%		
SO-1044	89%	72%		

Tabell 6:1 Fyra portföljer med olika placeringshorisont

Portfölj 1, med duration på 1,5 år, består alltså av två olika obligationer: SO-1044 som motsvarar 89 procent av portföljens totala värde och SO-1038 som motsvarar 11 procent av portföljvärdet, osv.

Vidare beräknas historiska prisförändringar för varje obligation i Tabell 6:1 för de senaste tre åren för att sedan bestämma obligationernas avkastning under denna period.

$\Delta P = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \approx$ obligationens dagliga avkastning där t är dagar mellan tiden 2001-10-25 och 2004-10-25.

Portföljavkastning för varje dag baserad på tillgångarnas vikt i portföljen idag är

$$Avk_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \Delta P_i$$

där w är obligationens vikt.

I vårt fall innehåller varje portfölj två obligationer, alltså lyder portföljavkastningens formel

$$Avk_p = \Delta P_1 \quad w_1 + \Delta P_2 \quad w_2$$

6.6.1. Analys av data

För att räkna ut den totala risken i varje portfölj måste först de individuella obligationernas totala risk undersökas. Obligationernas historiska kurssvängningar för referensperioden 2003-10-25 till 2004-10-25 visar att volatiliteten för alla obligationer är följande:

Obligation	Volatilitet, σ (%)
SO-1034	6,6
SO-1035	0,4
SO-1037	2,1
SO-1038	3,9
SO-1040	2,6
SO-1041	4,6
SO-1043	3,1
SO-1044	1,3
SO-1045	3,9
SO-1046	4,2
SO-1047	4,9
SO-1048	3,7

Tabell 6:2 Volatilitet för statsobligationer under referensperioden

Observera att handeln med de sista två obligationerna har pågått i mindre än ett år då denna analys gjordes.

6.6.2. Scenario 1

Antag att vi har tillgångar och avsättningar till ett värde av 100 respektive 80 (enheter). Eget kapital blir därför 20 (tillgångar minus FTA). Som tidigare nämnts kommer kraven på egna kapitalet att öka vid övergången till marknadsvärdering av avsättningar. Det minskade reservbehovet kommer att medföra en ökad risknivå på grund av den långa durationen i avsättningar. Därför är det intressant att studera hur det egna kapitalet kommer att påverkas av vilka placeringshorisonter man väljer.

För varje portfölj beräknas avkastningen för eget kapital under referensperioden. Den totala risken i eget kapital för de fyra olika tillgångsportföljerna visas nedan.

	Portfölj 1	Portfölj 2	Portfölj 3	Portfölj 4
Duration (år)	1,5	2	2,5	3
Volatilitet/år (%)	6,7	8,0	11,1	12,4

Tabell 6:3 Volatilitet för eget kapital i de fyra olika portföljerna

Självklart ökar risken (volatiliteten) för eget kapital med durationen. Ju längre duration desto större är risken för räntefluktueringar och tvärtom.

Vidare skapas en femte portfölj som endast består av statsobligationen SO-1041 och den beräknade volatiliteten för eget kapital under referensperioden är 21,3%. Det visar att volatiliteten aldrig blir riktigt låg på grund av den långa durationen i FTA.

6.6.3. Scenario 2

Om man, till skillnad från scenario 1, istället har FTA på 80 (enheter) som skall utbetalas om tjugo år kommer FTA, med dagens ränta på 3,5% (20031025), att ha ökat till

$$80 \ (1+3{,}5\%)^{20} = 159{,}2$$

För att kunna matcha dessa avsättningar med våra tillgångar investerar vi tillgångarna i statsobligtionen SO-1041 under referensperioden 20031025-20041025.

Vid starten börjar vi med 100 i tillgångar och FTA blir då

$$159{,}2 \ (1+r_1)^{-20} = 61{,}2 \text{ där } r_1 = 4{,}90\%$$

det vill säga avsättningarna blir 61,2 istället för 80 och kommer att förändras beroende på ränteförändringen i statsobligationen SO-1041.

Så om vi använder oss av tillgångar i de fem portföljerna och FTA från 20 års diskonteringen ovan så kan det egna kapitalet för varje portfölj beräknas.

Volatiliteten för det egna kapitalet redovisas i Tabell 6:4.

	Duration (år)	σ_{EK} (%), r = 3,5%	σ_{EK} (%), r = SO-1041
Portfölj 1	1,5	7,2	18,4
Portfölj 2	2	8,5	17,4
Portfölj 3	2,5	11,9	17,5
Portfölj 4	3	13,3	16,6
Portfölj 5	20	22,6	8,3

Tabell 6:4 Volatiliteten för de olika portföljerna, beräknad med två olika räntor

Tabell 6:4 visar att man har lägre volatilitet om durationen i tillgångsportföljen är lika med durationen i FTA, det vill säga tillgångarna matchar bäst skulderna då. Förklaringen till att volatiliteten i eget kapital med räntan från statsobligationen SO-1041 inte blev låg kan vara den långa durationen på avsättningarna och eftersom dessa utbetalas först om 20 år blir effekten av ränteförändringar mycket stor. Däremot visar en motsvarande analys med konstant ränta på 3,5% en motsatt effekt.

Så trots att man startade som rikare, det vill säga 100-61 istället för 100-80, och trots att man blir rikare på grund av högre diskonteringsränta vid nuvärdeberäkningen av FTA blir svängningarna i det egna kapitalet större. Den ökade förmögenheten räcker inte till att ”stöddämpa” den ökade risken. Alltså kommer detta att ställa högre krav på lång duration hos tillgångarna för att inte risknivån skall öka så mycket.

6.7. Solvensutvecklingen för portföljerna

Vad är solvens? Med solvens menas ett formaliserat sätt att fastställa att ett bolag, med hänsyn till sin verksamhet och risker, har tillgångar av tillräcklig storlek och kvalitet för att kunna infria sina åtaganden gentemot försäkringstagarna.

Ett försäkringsbolag skall enligt §1:8a FRL (Försäkringsrörelselagen) vid varje tidpunkt ha en tillräcklig kapitalbas. Det vill säga att solvenskvoten eller solvensgraden[3] skall vara ≥ 1.

I plottarna *(appendix Figur 7:6 - Figur 7:8)* för solvensgraderna mot de olika avsättningsalternativen kan man se hur solvensreglerna påverkar resultatet då dels

- FTA värderas med fast diskonteringsränta (dagens 3,5%)
- FTA värderas med marknadsräntan som diskonteringsränta
- FTA värderas marknadskonsistent (Fair valuation)

Ur plottarna kan man sammanfattningsvis se att solvensgraderna visar värdeförändringen på tillgångarna. Solvensgraden ligger mellan 1,24 och 1,26 för FTA beräknad med en konstant ränta på 3,5%. Däremot ökade solvensgraden till mellan 1,5 och 1,69 för marknadsvärderade avsättningar.

Enligt dagens solvensregler är försäkringsbolaget solvent i alla de tre fallen ovan - alla portföljerna har solvensgrad större än ett - dock får vi högre solvensgrader då vi har marknadsvärderade tillgångar och avsättningar.

Om marknadsräntan sjunker får vi en mismatch situation, det vill säga tillgångarna matchar inte avsättningarna tillräckligt bra. Denna situation uppstod på grund av att vi till exempel i *Appendix Figur 7:8* har fixa avsättningar medan tillgångarna är marknadsvärderade. Dessutom har vi en duration mismatch eftersom vi i alla våra tillgångsportföljer (utom tillgångsportfölj 5) har durationer som är kortare än durationen på avsättningarna. Hur stor mismatchrisken ska vara kommer att bli en uppgift att lösa men det ligger utanför omfattningen av det här arbetet. För närvarande ställs inga särskilda solvenskrav på hur stor mismatchrisken ska vara.

[3] Solvensgrad är lika med kvoten mellan tillgångarna och avsättningarna.

7. SLUTSATS OCH DISKUSSION

Målet med detta arbete var att få fram en marknadsmässig diskonteringsränta som alternativ till dagens ”högsta ränta” på 3,5% vid nuvärdesberäkningen av FTA, där diskonteringsräntan fås med hjälp av en yieldkurva. Detta för att kunna göra realistiska värderingar av försäkringstekniska avsättningarna. Vidare var målet att se vilken inverkan denna förändring har på avsättningarna och bolagets egna kapital. Yieldkurvan byggdes utifrån statsobligationerna på marknaden. Nuvärdet av försäkringstekniska avsättningarna bestämdes dels med dagens högsta ränta och dels med yieldkurvan och en analys över skillnaden mellan nuvärden gjordes.

Slutsatsen av analysen och resultatet är att för det delbestånd egenpensioner som behandlades är effekten vid nuvärdesberäkningen med en marknadsmässig diskonteringsränta ett mindre avsättningsbehov än med dagens system. En trolig orsak till detta är högre marknadsräntor och att försäkringstiderna i delbeståndet av pensionsförsäkringarna som behandlades i det här arbetet är mycket långa och endast marknadsräntan för statsobligationen SO-1047 kom till användning då yieldkurvan var otillräcklig. Även denna ränta är högre än dagens fasta ränta. Trots fallande marknadsräntor har vi (den 2004-12-15) ett minskat reservbehov på drygt 6%.

Problem uppstod då vi har utbetalningar som ligger så långt bort i tiden att yieldkurvan tagit slut. Ett sätt att lösa problemet är att antigen extrapolera eller anta att yieldkurvan är konstant bortom sista räntepunkten, där det sistnämnda scenariot valdes. I dessa fall kommer man att få en återinvesteringsrisk så någon form av återinvesteringsrisksavdrag bör göras åtminstone på dessa längre löptider.

En dödlighetssänkning på 10 procent ger ett något högre (cirka 7 procent) avsättningsbehov oavsett yieldkurva jämfört med den fasta räntan.

Realistisk värdering medför att livförsäkringsavsättningarna minskar för försäkringsbolaget. Det minskade avsättningsbehovet visar sig vara störst för försäkringsformer med långa åtaganden, till exempel de livsvariga egenpensionerna med utbetalningsstart om 15 år och senare. Minskningens storlek är beroende av främst rådande marknadsräntor och rådande diskonteringsränta (högsta ränta) vid tidpunkten för genomförandet av värderingen.

Solvensutvecklingen av de fem portföljerna i de tre fallen som testades i förra avsnittet visar att försäkringsbolaget klarar solvensen enligt de nuvarande reglerna. Däremot kommer framtida solvensregler kanske att ställa krav på långa durationer på tillgångar för att fånga upp hur man matchar sina åtaganden och tillgångar i övrigt.

Vad som händer vid räntefall på obligationer och FTA och hur stora de får vara innan bolaget anses vara insolvent samt vilka krav som kommer att ställas på eget kapital vid dessa räntefall är frågor som ligger utanför det här arbetet men ändå är intressanta och relevanta och bör därför studeras.

En utveckling av detta arbete skulle kunna vara att bygga en yieldkurva för de riktigt långa åtagandena med hjälp av en swapräntekurva i EURO, vilken finns (med god likviditet) för löptider upp till 30 år. Denna metod tillämpas redan i Danmark.

A APPENDIX

Matematisk beskrivning av interpolationsmetoder

A.1 Kubisk spline interpolation

Principen för kubiska splinefunktioner är följande:

Anpassa till funktionen f(x) en interpolationsfunktion g(x), bestående av styckvisa tredje gradens polynom, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, osv, anpassade till respektive delintervall, (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), osv, så att

- interpolationsfunktionen g(x) är kontinuerlig över hela intervallet
- första och andra derivatorna är kontinuerliga över hela intervallet
- dessutom t.ex. så att andra derivatorna är noll i ändpunkterna.

Givet en funktion $y_i = y(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$, där linjär interpolation under intervallet (x_j, x_{j+1}) ger interpolationsformeln

$$y = Ay_j + By_{j+1}$$

där x_j och y_j är löptid respektive YTM

$$A = \frac{(x_{j+1} - x)}{(x_{j+1} - x_j)} \text{ och } B = 1 - A$$

omskrivning ger att

$$y = Ay_j + By_{j+1} + Cy''_j + Dy''_{j+1}$$

där A och B är definierad ovan och

$$C = \frac{1}{6}\ (A^3 - A)\ (x_{j+1} - x_j)^2 \quad D = \frac{1}{6}\ (B^2 - A)\ (x_{j+1} - x_j)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y_{j+1} - y_j)}{(x_{j+1} - x_j)} - (x_{j+1} - x_j)\ y''_j + \frac{(3B^2 - 1)}{6}\ (x_{j+1} - x_j)\ y''_{j+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ay''_j + By''_{j+1},$$

där

$$A = 1 \text{vid } x_j, \quad A = 0 \text{ vid } x_{j+1},$$

$B = 0$ vid x_j , $B = 1$ vid x_{j+1}

För $j = 2, \ldots, n-1$

$$\frac{(x_j - x_{j-1})}{6} \; y''_{j-1} + \frac{(x_{j+1} - x_{j-1})}{3} \; y''_j + \frac{(x_{j+1} - x_j)}{6} \; y''_{j+1} =$$
$$= \frac{(y_{j+1} - y_j)}{(x_{j+1} - x_j)} - \frac{(y_j - y_{j-1})}{x_j - x_{j-1}},$$

N-2 linjära ekvationer med N okända där $i = 1, \ldots, N$

A.2 Hermite interpolation

Låt r vara en vektor Y, där

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \text{ och}$$
$$Y(t) = Y_i + m_i(t) \; (Y_{i+1} - Y_i) + m_i(t) \; (1 - m_i(t)) \; g_i + m_i^2(t) \; (1 - m_i(t)) \; c_i \text{ där}$$
$$m_i(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+1} - T_i)}, \; g_i = (T_{i+1} - T_i) \; (Y_{i+1} - Y_i) \text{ och}$$
$$c_i = 2 \; (Y_{i+1} - Y_i) - (T_{i+1} - T_i) \; (y_{i+1} + y_i)$$

Då beräknas vektorn Y^T av

$$y_i = \frac{1}{(T_{i+1} - T_{i-1})} \; \left[(Y_i - Y_{i-1}) \; (T_{i+1} - T_i)/(T_i - T_{i-1}) + (Y_i - Y_{i-1}) \; (T_i - T_{i-1})/(T_{i+1} - T_i) \right]$$

med randvillkoren

$$y_n = 1/(T_{n-1} - T_{n-2}) \; \left[(Y_{n-1} - Y_{n-2}) \; (T_n + T_{n-1})/(T_{n-1} - T_{n-2}) + (Y_n - Y_{n-1}) \; (2T_n - T_{n-1} - T_{n-2})/(T_n - T_{n-1}) \right]$$
$$y_1 = 1/(T_3 - T_1) \; \left[(Y_2 - Y_1) \; (T_3 + T_2 - 2T_1)/(T_2 - T_1) + (Y_3 - Y_2) \; (T_2 - T_1)/(T_3 - T_2) \right]$$

där Y_i och T_i är YTM respektive löptid för varje obligation.

A.3 FTA vid olika yieldkurvor

Ett utdrag från FTA beräkningarna (marknadsnoteringar från 2004-12-15).

Kön	Ålder	Pbelopp/mån	FTA r=3,5%	FTA $r = y_1(t)$	FTA $r = y_2(t)$	FTA $r = y_3(t)$
K	30	500	37 925	31 334	31 334	31 334
M	30	500	30 703	25 642	25 642	25 642

K	35	500	43 205	36 537	36 537	36 537
M	35	500	35 011	29 928	29 928	29 928
K	40	500	49 264	42 641	42 641	42 641
M	40	500	39 983	34 982	34 982	34 982
K	50	500	64 388	58 404	58 393	58 326
M	50	500	52 625	48 254	48 244	48 179
K	60	500	85 620	82 395	82 332	81 411
M	60	500	71 363	69 542	69 484	68 600
K	65	500	99 690	98 516	98 471	97 363
M	65	500	84 738	84 796	84 759	84 535
K	70	500	85 763	85 643	85 605	84 555
M	70	500	70 822	71 645	71 618	70 663

Tabell 7:1

En minskning av dödligheten medför en sänkning av försäkringstekniska avsättningar vid diskontering med yieldkurvorna.

A.4 Förändring av dödlighet vid olika yieldkurvor

Vid en minskning av dödligheten fås följande resultat, där data hämtats från ett från FTA beräkningarna.

Kön	Ålder	Pbelopp/mån	FTA r=3,5%	FTA $r = y_1(t)$	FTA $r = y_2(t)$	FTA $r = y_3(t)$
K	30	500	39 262	32 374	32 374	32 374
M	30	500	32 120	26 768	26 768	26 768
K	35	500	44 723	37 745	37 745	37 745
M	35	500	36 618	31 235	31 235	31 235
K	40	500	50 983	44 041	44 041	44 041
M	40	500	41 802	36 496	36 496	36 496
K	50	500	66 571	60 264	60 246	60 186
M	50	500	54 928	50 258	50 241	50 182
K	60	500	88 286	84 768	84 808	84 455
M	60	500	74 142	72 069	71 147	71 779
K	65	500	102 520	101 081	99 957	100 777
M	65	500	87 628	87 470	86 409	87 201
K	70	500	88 650	88 313	87 247	88 041
M	70	500	73 665	74 334	74 364	74 111

Tabell 7:2

A.5 Durationsanalys

Låt oss betrakta en kupongobligation, marknadspriset givet en yield på y, kan skrivas enligt prisformeln:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{N}{(1+y)^n} ,$$

$$D = \frac{1}{P} \left[\frac{nN}{(1+y)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{tC}{(1+y)^t} \right]$$

där D är kupongobligationens duration.

B KÄLLFÖRTECKNING

Livförsäkringsmatematik (kompendium)
Björn Ajne, Jan Ohlin
Stockholms Universitet (1990)

Investment Science
David G. Luenberger
Oxford University Press (1998)

Bond Pricing and Portfolio Analysis – Protecting Investors in the Long Run
Olivier de la Grandville
The MIT Press (2001)

Numerical Recipies in C
William H. Press et al.
Cambridge University Press (1992)

Finansmatematik II (föreläsningsanteckningar)
Thomas Höglund
Stockholms Universitet (HT 2004)

Internet

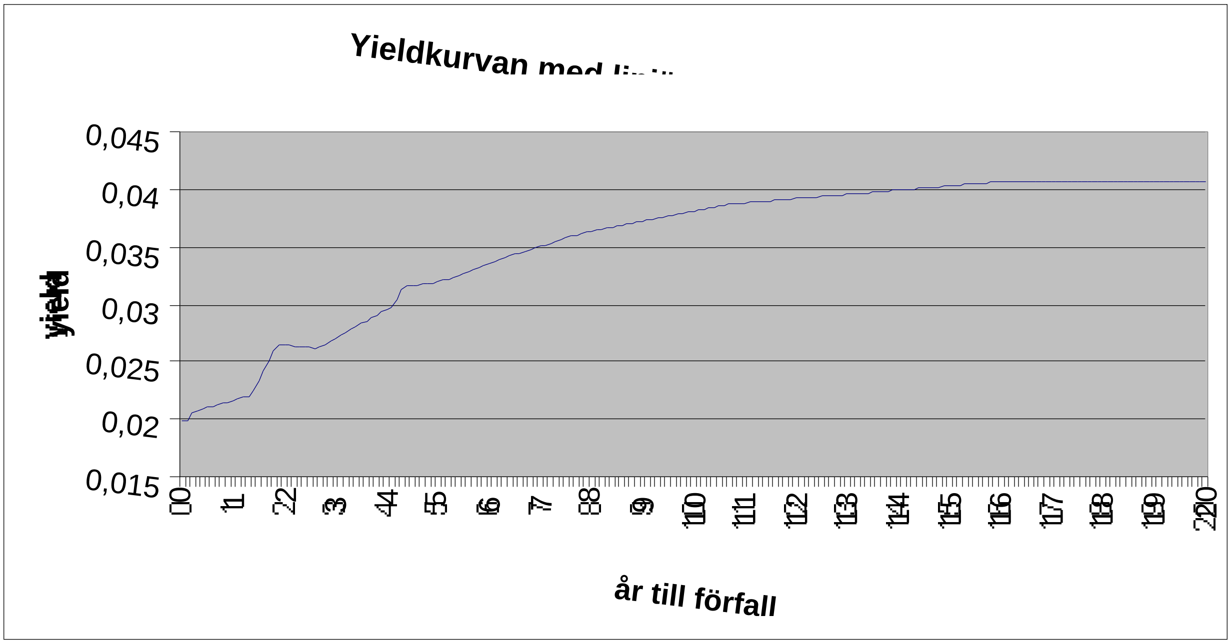
Riksgäldskontoret: www.rgk.se
Finansinspektionen: www.fi.se
Stockholmsbörsen: www.omxgroup.com/stockholmsborsen
International Accounting Standards Board: www.iasb.co.uk

C ORDFÖRTECKNING

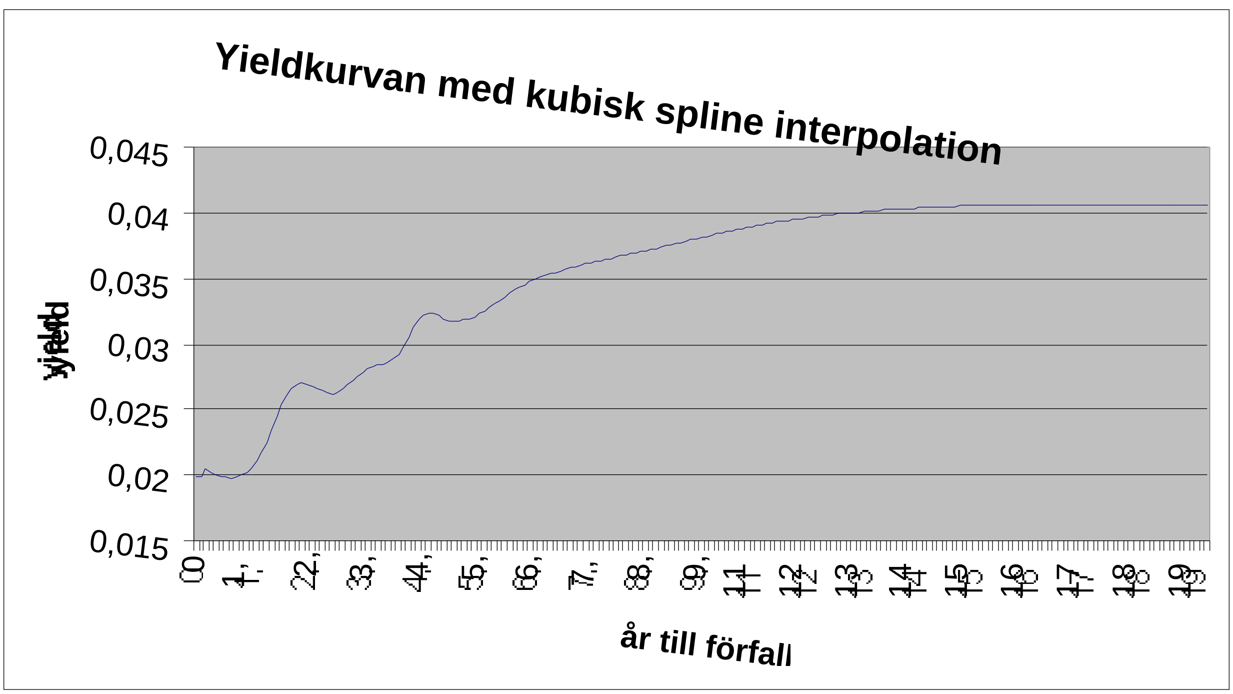
- FTA = Försäkringstekniska avsättningar
- YTM = Yield – to – Maturity
- FI = Finansinspektionen
- EU = Europeiska Unionen
- IAS = International Accounting Standards
- IFRS = International Financial Reporting Standards

D PLOTTAR

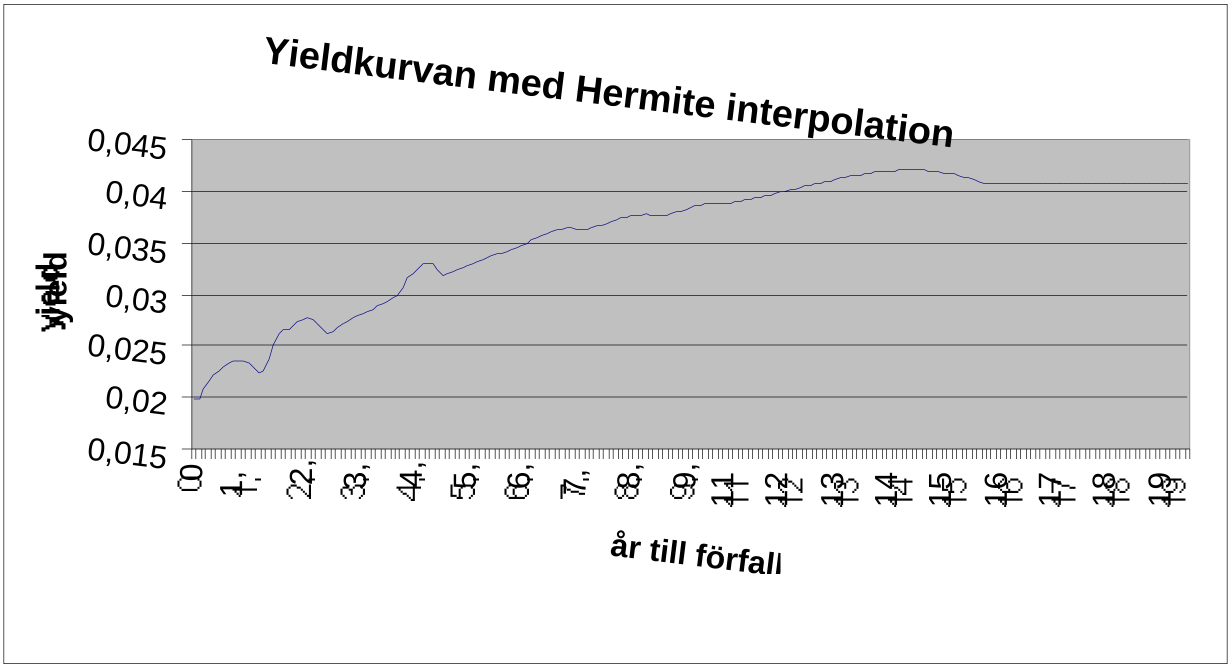
D.1 Yieldkurva med olika interpolationsmetoder



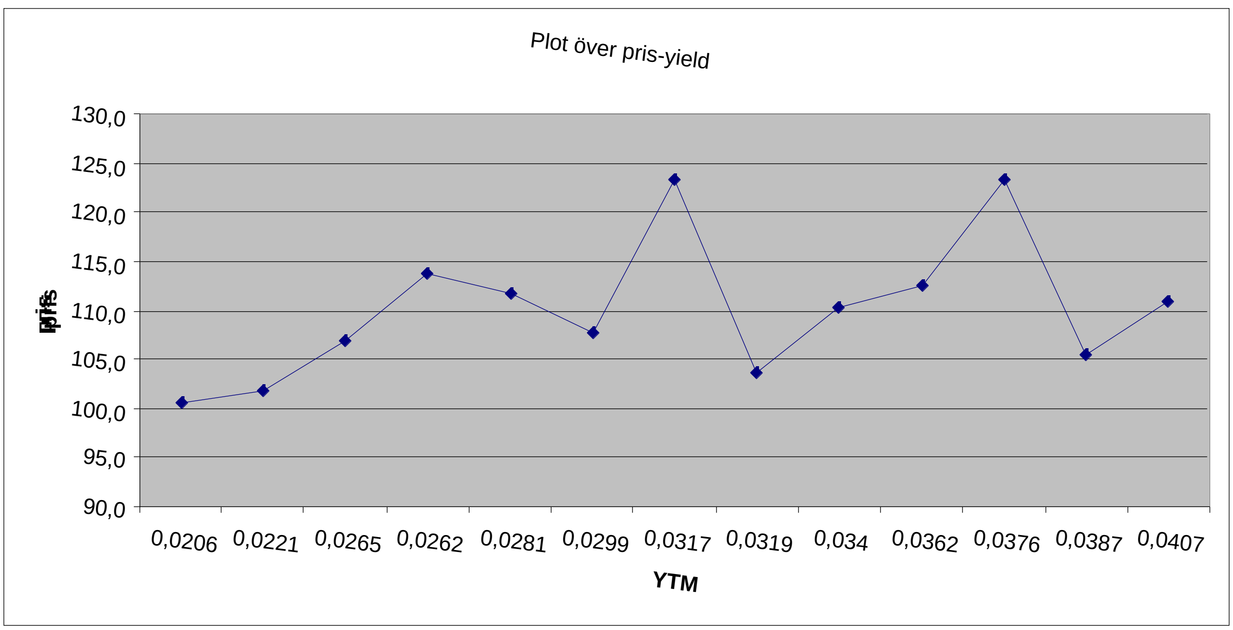
Figur 7:1 Plot över yieldkurvan med linjär interpolation



Figur 7:2 Plot över yieldkurvan med kubiska splines

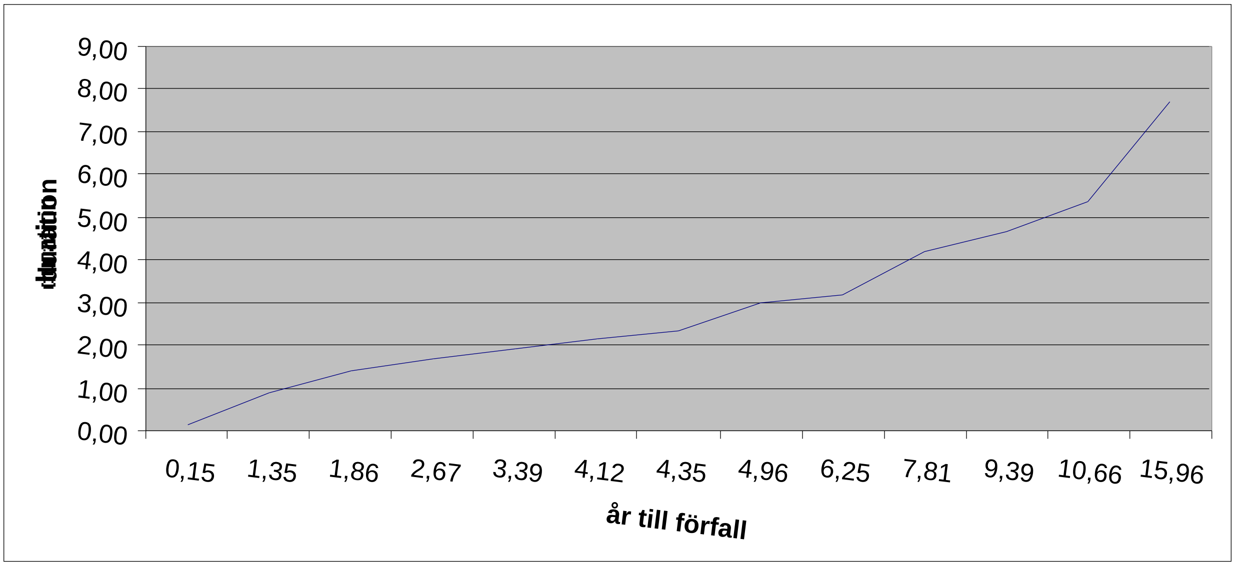


Figur 7:3 Plot över yieldkurvan med Hermite interpolation



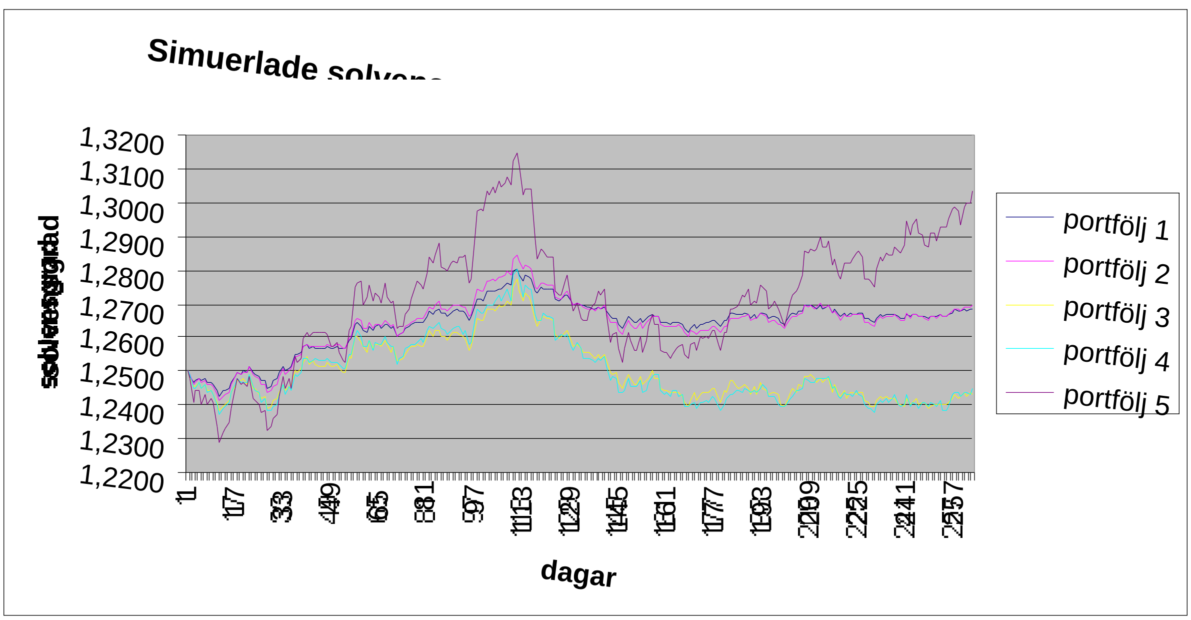
Figur 7:4 Plot över pris och yielden

D.2 Duration

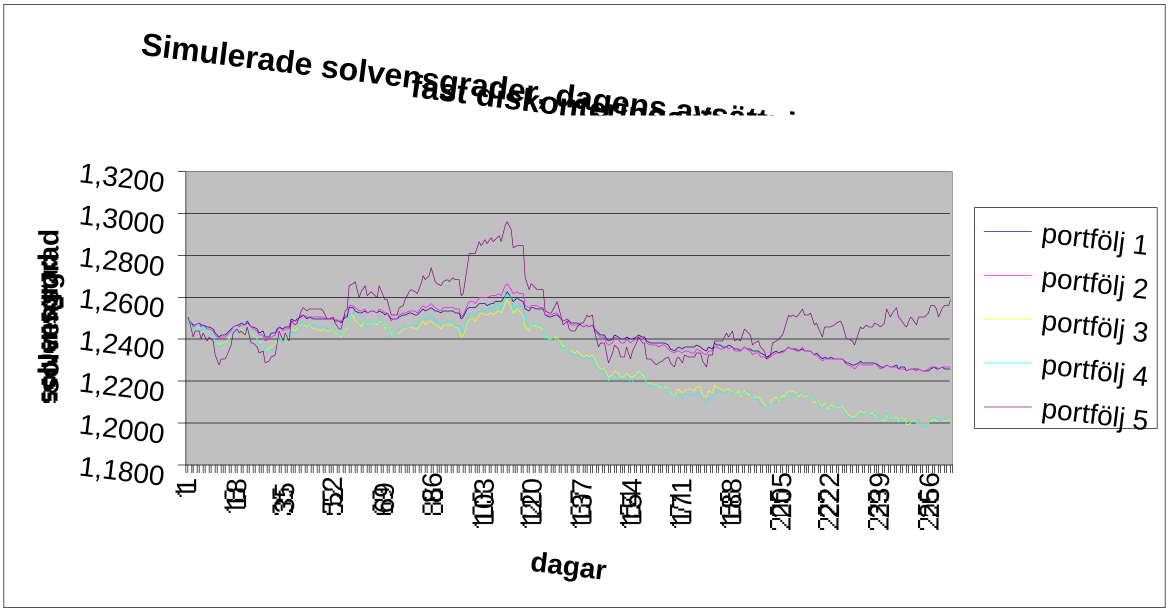


Figur 7:5 Plot över statsobligationernas duration och år till förfall

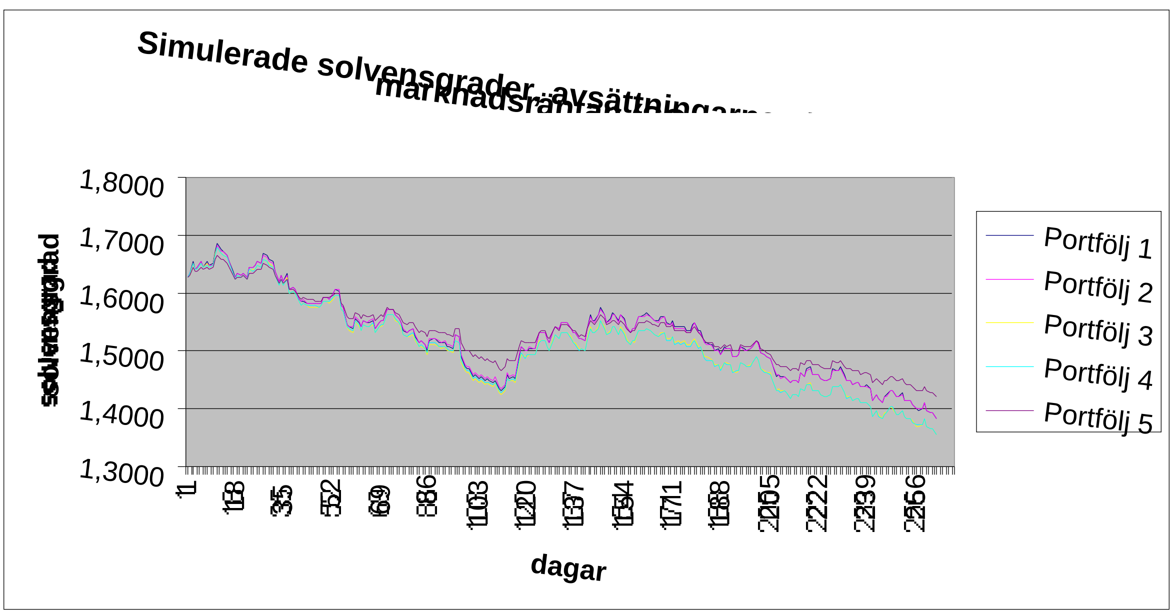
D.3 Solvensgrad plottar



Figur 7:6 Plot över solvensgraderna för olika portföljer, fixa FTA



Figur 7:7 Plot över solvensgraderna för olika portföljer,FTA värderad med fast ränta



Figur 7:8 Plot över solvensgraderna för olika portföljer, marknadsvärderade FTA