

Mathematical Statistics  
Stockholm University

**Prissättning av europeiska köpoptioner  
då aktietillväxterna är  $NIG$ -fördelade**

Andreas Nordvall Lagerås

**Research Report 2003:4**

ISSN 0282-9169

**Postal address:**

Mathematical Statistics  
Dept. of Mathematics  
Stockholm University  
SE-106 91 Stockholm  
Sweden

**Internet:**

<http://www.math.su.se/matstat>



Mathematical Statistics  
Stockholm University  
Research Report **2003:4**,  
<http://www.math.su.se/matstat>

# Prissättning av europeiska köpoptioner då aktietillväxterna är NIG-fördelade

Andreas Nordvall Lagerås\*

Maj 2003

## Abstract

Syftet med denna uppsats är att beskriva hur prissättning av europeiska köpoptioner kan gå till i en särskild modell för att beskriva aktieprisernas stokastiska egenskaper. Denna modell har mycket gemensamt med den kända modellen av Black & Scholes. Jag visar att denna nya modell stämmer mycket bättre överens med verkligheten, men refererar också till resultat som medför särskilda problem med modellen. Två olika metoder för att komma till rätta med dessa problem studeras och jämförs. Ett överraskande resultat är att de två metoderna ger nästan samma priser.

The purpose of this essay is to describe pricing of European call options in a particular model of the stochastic behaviour of stocks. Most of the features of this model are the same as those of the well known model by Black & Scholes. I show that this model fits empirical data much better than Black's & Scholes'. However, this model has some awns, and two different methods to price options in spite of these problems are studied. A surprising result is that the two methods give practically the same prices.

---

\*Postal address: Mathematical Statistics, Stockholm University, SE-106 91, Sweden.  
E-mail: [andreas@math.su.se](mailto:andreas@math.su.se).



## Innehåll

1 Inledning . . . . .	5
2 Blacks & Scholes modell . . . . .	7
3 "Normal inverse Gaussian"-fördelningen . . . . .	12
4 Passform . . . . .	19
5 Ofullständighet . . . . .	22
6 Gerbers & Shius metod . . . . .	23
7 Bladts & Rydbergs metod . . . . .	27
8 Jämförelse av metoderna och slutsatser . . . . .	31
Appendix Matlab-kod . . . . .	33
Referenser . . . . .	36



## 1 Inledning

Det är väl känt att Blacks & Scholes modell, som är den mest använda modellen för prissättning av optioner, inte överensstämmer särskilt väl med verkligheten. Man har försökt att generalisera denna modell på många olika sätt för att få den att stämma bättre, och denna uppsats beskriver hur prissättning av optioner kan gå till i en viss sådan modell. Mer generella modeller kan vara svåra att arbeta med, och den generalisering som studeras i denna uppsats leder ibland till att marknaden är vad man kallar ofullständig. Det innebär bland annat att det inte ens finns ett unikt pris i samma mening som det finns i Blacks & Scholes modell. Man har förvisso kunnat härleda Blacks & Scholes pris ifrån andra modeller, t.ex. som gränsfall i olika modeller i diskret tid (Blacks & Scholes modell beskriver aktiepriset i kontinuerlig tid), och därmed är Blacks & Scholes modell i någon mening robust mot avvikelser från de ursprungliga antagandena. Det är alltså helt befogat att ställa sig frågan om en mer generell modell som visserligen är mer verklighetstrogen verkligen behövs. Det finns emellertid att metoder för att komma förbi dessa problem.

Syftet med denna uppsats är att i en viss mening generalisera Blacks & Scholes modell och beskriva hur två metoder att prissätta europeiska köpoptioner fungerar i denna modell. Metoderna presenterades av Gerber & Shiu (1996) respektive Bladt & Rydberg (1997). Metoderna ger vardera ett unikt pris trots att marknaden kan vara ofullständig. Vardera metod studeras i två specialfall, dels Blacks & Scholes modell, dels en modell som har föreslagits av Barndorff-Nielsen (1995). Blacks & Scholes modell är fullständig och jag visar att de två metoderna kommer att ge precis Blacks & Scholes pris då man antar denna modell. Barndorff-Nielsens modell är däremot ofullständig och antar man denna modell så kan olika metoder som bygger på samma principer som Blacks & Scholes leda fram till olika priser. De två metoderna som studeras i den här uppsatsen är besläktade och på intet sätt uttömmande, utan man skulle mycket väl kunna tänka sig andra angreppssätt på problemet att prissätta optioner i den föreslagna modellen. När man tillämpar dem på data från verkligheten leder de till liknande priser.

Barndorff-Nielsens modell använder sig av en sannolikhetsfördelning som kallas "normal inverse Gaussian" (NIG), som sägs passa bättre till empiriska data än den normalfördelning som Blacks & Scholes använder sig av. För att kunna ge explicita uttryck för priser och testa hur denna fördelningens parametrar kan skattas så undersöks fördelningens egenskaper. Ett resultat härav är att ett explicit pris kan bestämmas i Barndorff-Nielsens modell med metoderna beskrivna av Gerber & Shiu respektive Bladt & Rydberg. Bladt & Rydberg använde exempelvis simulering för att få fram ett pris i denna modell. Genom att jämföra NIG-fördelningens passform med nor-

malfördelningens för en exempelaktie så visar vi att normalfördelningen passar dåligt, och att NIG passar utmärkt, och därmed motiveras dels en generalisering av Blacks & Scholes modell, dels användningen av just Barndorff-Nielsens modell. Samma aktiedata används också för att exemplifiera vilka olika optionspriser man får i de olika modellerna med de olika metoderna.

Uppsatsen är uppdelad så här: Kapitel 2 beskriver Blacks & Scholes modell och det pris som denna modell ger för europeiska köpoptioner. Modellen gör många förenklande antaganden om verkligheten, och dessa diskuteras. Kapitlet tar också upp särskilda karaktäriseringar av både själva modellen och prissättningen som ger uppslag för generaliseringar av både modell och metod att prissätta. Kapitel 3 beskriver NIG-fördelningen och dess egenskaper. Från täthetsfunktionen härleds moment och momentskattningar. En metod att simulera stokastiska variabler från fördelningen presenteras, och med hjälp av den studeras momentskattningarnas egenskaper. Två lemmor som kommer till användning längre fram presenteras också. I kapitel 4 tittar vi på typiska aktiedata för att se om normal- eller NIG-fördelningen passar bättre för att beskriva de dagliga tillväxterna för aktierna. Detta visar att Barndorff-Nielsens modell passar mycket bättre till verkligheten.

Ofullständighet och dess följder diskuteras i kapitel 5. Kapitel 6 och 7 beskriver Gerbers & Shius respektive Bladts & Rydbergs metod att lösa problemet att det inte finns ett unikt pris vid ofullständighet, och särskilt hur lösningen ser ut för Barndorff-Nielsens modell. Motiv till att använda den ena eller den andra metoden ges också. I kapitel 8 jämförs de båda metoderna på exempelaktien från kapitel 4. Ett oväntat resultat blir att de båda metoderna ger mycket lika priser. Alla beräkningar har utförts i Matlab och koden finns i appendixet.



## 2 Blacks & Scholes modell

I Blacks & Scholes modell för en finansiell marknad antar man att det finns två tillgångar: En riskfri tillgång  $B_t$  med konstant ränta  $r$  och en riskabel tillgång  $S_t$  som vi kommer att kalla för aktien, men den skulle kunna vara priset på någon annan tillgång som till exempel en valuta eller råvara. Den riskfria tillgången kan ses som ett bankkonto. Vidare antar man att det inte finns någon skillnad mellan köp- och säljpris, och att man alltid kan köpa och sälja godtyckligt stora eller små kvantiteter av tillgångarna till gällande priser. Man antar också att man kan låna av båda tillgångarna för att betala tillbaka vid ett senare tillfälle. Vi antar att dessa två tillgångars värden vid tiden  $t$  kan beskrivas på följande vis:

$$B_t = B_0 e^{rt} \quad (1)$$

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad (2)$$

Här är  $X_t$  en brownsk rörelse med drift. Mer specifikt:

$$X_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t$$

där  $W_t$  är en standardiserad brownsk rörelse, dvs:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}. \quad (3)$$

Härav får man att

$$\begin{aligned} E[S_t] &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} E[e^{\sigma W_t}] = \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \frac{\sigma^2}{2}t} = \\ &= S_0 e^{\mu t} \end{aligned} \quad (4)$$

Ett derivat är en finansiell tillgång vars värde beror på värdet på en, som man säger, underliggande tillgång. Det enda derivat som den här uppsatsen behandlar är den europeiska köptionen. En köption ger innehavaren rätten, men inte skyldigheten att köpa en aktie till ett förutbestämt pris, lösenpriset, på en förfallodag. På motsvarande sätt finns det säljoptioner som ger innehavaren rätten att sälja en aktie till ett förutbestämt pris. Att den är europeisk innebär att rätten att köpa aktien till lösenpriset bara gäller på förfallodagen. För så kallade amerikanska optioner gäller den rätten fram till och med förfallodagen. Eftersom denna uppsats bara behandlar just europeiska köptioner kommer jag ibland att utelämna epitetet "europeiska" och ibland även "köp-" före optionen. Den summa som innehavaren betalar utfärdaren av optionen brukar kallas premien för att inte blanda ihop denna summa med lösenpriset. Då risken för ihopblandning är liten så kallar

jag premien för priset på optionen. Man kan med olika metoder härleda ett pris för just en europeisk köpoption. Det är inte denna uppsats syfte att återge beviset för hur priset blir i Blacks & Scholes modell, men det bör nämnas att det bygger på att man antar att det inte kan finnas arbitrage på marknaden. Med arbitrage menas en betalström som med sannolikhet ett är icke-negativ och som med positiv sannolikhet är positiv. Detta betyder att man utan insats skulle kunna få en positiv sannolikhet för en vinst, en "gratis lunch" om man så vill. Priset för en europeisk köpoption med lösenpris  $a$  och förfallodag  $T$  blir vid  $t = 0$ :

$$C^{BS}(a, T) = e^{-rT} E^Q[(S_T - a)^+]. \quad (5)$$

Här är  $E^Q$  väntevärdet under sannolikhetsmåttet  $Q$ , alltså inte det "vanliga" sannolikhetsmåttet  $P$ .  $Q$  bestäms av

$$\frac{dQ}{dP} = e^{\theta W_t - \frac{\theta^2}{2} t}, \quad \text{där} \quad \theta = \frac{r - \mu}{\sigma}.$$

Man kan använda Girsanovs sats för att beskriva  $S_t$  under  $Q$ :

**Girsanovs sats.** (Djehiche (2000)) Under  $Q$  som definieras som ovan gäller det att  $W_t^Q$  som definieras av  $W_t^Q = W_t - \theta t$ , är en standardiserad brownsk rörelse.

Man får då att :

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} = \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma(W_T^Q + \frac{r - \mu}{\sigma}T)} = \\ &= S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q} \\ &\Rightarrow \\ E^Q[S_T] &= S_0 e^{rT} \\ &\Rightarrow \\ e^{-rT} E^Q[S_T] &= S_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Man kan säga att  $Q$  karakteriseras av att  $S_T$ 's förväntade tillväxt under  $Q$  är lika med den riskfria räntan.  $Q$  brukar kallas det riskneutrala, eller arbitragefria, sannolikhetsmåttet. Dessa namn kräver sina förklaringar. "Arbitragefri" kommer från att man antar att det inte finns något arbitrage på marknaden. "Riskneutral" kommer från den ekonomiska teorin. En person sägs vara riskneutral om han bara fattar sina belut om vilka investeringar som ska göras utifrån vilken förväntad intäkt de kommer att resultera i. En riskneutral person anser till exempel att en investering som helt säkert ger honom en miljon kr är likvärdig med en investering som ger noll kr med sannolikheten 0.75 och fyra miljoner kr med sannolikheten 0.25.

En riskavers person kräver däremot en så kallad riskpremie för att göra en riskfylld investering, dvs ju högre risk desto större förväntad avkastning jämfört med ett riskfritt alternativ krävs för att den riskaverse ska tycka att alternativen är likvärdiga. Om alla köpare på en marknad är riskaversa, så måste därför aktier ha en högre förväntad avkastning än den riskfria tillgången, annars skulle ingen investera i dem.

Man inser också att det bara kan finnas en riskfri ränta om marknaden är arbitragefri. Om det fanns flera olika skulle man kunna låna pengar till den lägre räntan och investera i den som ger högre ränta. Efter en tid skulle man kunna ta ut sina pengar från kontot med den högre räntan och betala tillbaka sitt lån med den lägre räntan och ändå få pengar över. Detta är ett typiskt arbitrage och är därmed inte tillåtet i modellen.

Om det istället är så att alla investerare är riskneutrala, så väljer alla den investering som har högst förväntad avkastning, oavsett om den är riskfri eller inte. Därför inser man att alla investeringsalternativ på en marknad med endast riskneutrala investerare kommer att ha samma avkastning som den riskfria räntan. Det är det faktum att det i en riskneutral värld skulle se ut som i ekvation (6) som har gett  $Q$  sitt namn. Detta betyder inte att man säger att marknaden är riskneutral, bara att priset skall beräknas som om den vore det. Det är emellertid så att arbitragefrihet alltid medför att det finns åtminstone ett sannolikhetsmått med samma egenskap som  $Q$ . Därför använder jag uttrycken arbitragefri och riskneutral som synonymier. Det är på intet sätt något självklart att arbitragefrihet i allmänhet ger upphov till riskneutrala mått men det ligger bortom denna uppsats ramar att visa att så är fallet. Eftersom ekvation (6) karakteriserar ett risk neutralt mått används den i kapitel 6 för att beskriva det eftersökta måttet.

Även om ekvation (5) är informativ så kan man skriva om  $C^{BS}(a, T)$  på följande vis:

**Proposition 1.** Priset på en köpoption ges i Blacks & Scholes modell av:

$$C^{BS}(a, T) = S_0 N(d_1) - ae^{-rT} N(d_2), \quad (7)$$

$$\text{där } d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{a}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

**Bevis:**

$$\begin{aligned} C^{BS}(a, T) &= e^{-rT} E^Q[(S_T - a)^+] = e^{-rT} E^Q[(S_T - a)\mathbf{1}(S_T > a)] = \\ &= e^{-rT} E^Q[S_T \mathbf{1}(S_T > a)] - ae^{-rT} Q(S_T > a) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-rT} E^Q [S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q} \mathbf{1}(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q} > a)] \\
&\quad - a e^{-rT} Q(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^Q} > a) = \\
&= \left\{ W_T^Q \stackrel{d}{=} \sqrt{T} W_1^Q \right\} = \\
&= S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T} E^Q \left[ e^{\sigma \sqrt{T} W_1^Q} \mathbf{1} \left( -W_1^Q < \frac{\log(\frac{S_0}{a}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right] \\
&\quad - a e^{-rT} Q \left( -W_1^Q < \frac{\log(\frac{S_0}{a}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right) = \\
&= \left\{ W_1^Q \stackrel{d}{=} -W_1^Q, \quad d_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log(\frac{S_0}{a}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right\} = \\
&= S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T} E^Q [e^{-\sigma \sqrt{T} W_1^Q} \mathbf{1}(W_1^Q < d_2)] - a e^{-rT} Q(W_1^Q < d_2) \\
&= \{N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\} = \\
&= S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\sigma \sqrt{T} w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw - a e^{-rT} N(d_2) = \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w+\sigma\sqrt{T})^2}{2}} dw - a e^{-rT} N(d_2) = \\
&= \{v \stackrel{\text{def}}{=} w + \sigma \sqrt{T}\} = \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{d_2 + \sigma \sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv - a e^{-rT} N(d_2) = \\
&= \{d_1 \stackrel{\text{def}}{=} d_2 + \sigma \sqrt{T}\} = \\
&= S_0 N(d_1) - a e^{-rT} N(d_2).
\end{aligned}$$

Man kan ju tycka att det är anmärkningsvärt, med tanke på ekvation (4), att  $\mu$  inte finns med i uttrycket för priset, men detta beror som sagt på att priset skall beräknas som om marknaden är riskneutral.

Ekvation (3) ovan medför att tillväxten för aktien över en tidsperiod är normalfördelad, oberoende av tidsperiodens längd. Det är väl känt att detta inte stämmer för korta tidsperioder och exempel på detta ges i kapitel 4. Det är inte heller så att tillväxten under två på varandra följande och lika långa tidsperioder är oberoende och lika fördelade, men ekvation (3) implicerar även detta. För att generalisera Blacks & Scholes modell antar vi att  $X_t$  i ekvation (2) är en så kallad en Lévy-process, dvs en process med oberoende och lika fördelade inkrement. På så vis kan man se till att dagsavkastningarnas fördelning modelleras bättre, men man rättar inte till problemet med beroendet från dag till dag. I denna modell kommer tillväxten över en längre period att vara en summa av flera oberoende stokastiska variabler, och en-

ligt centrala gränsvärdessatsen kommer därför tillväxterna på lång sikt vara normalfördelade, precis som i Blacks & Scholes modell. Därför kan man förvänta sig att priserna på optioner enligt den alternativa modellen kommer att konvergera till Blacks & Scholes pris då tiden till förfallodagen ökar. Det främsta användningsområdet för alternativa modeller skulle alltså vara för prissättning av optioner med kort tid kvar till förfallodagen.

### 3 ”Normal inverse Gaussian”-fördelningen

För att generalisera Blacks & Scholes modell ska vi utgå från ekvation (2), men vi ska låta  $X_t$  vara en Lévy-process. Utan att fördjupa oss i teorin för Lévy-processer så kan man nämna att dessa är processer med likafördelade och oberoende inkrement. Därför får man Blacks & Scholes modell som ett specialfall eftersom den brownska rörelsen också är en Lévy-process. Vi ska välja en Lévy-process vars inkrement har en fördelning som kan anpassas bättre till empiriska data än normalfördelningen.

Det här kapitlet tar upp en fördelning, ”normal inverse Gaussian” (NIG), som möjligtvis passar bättre till empiriska data än den normalfördelning som krävs i Blacks & Scholes modell. Användandet av denna fördelning introducerades av Barndorff-Nielsen (1995). Han tar noggrannt upp vad den allmänna teorin för Lévy-processer säger om just denna ”NIG-process”.

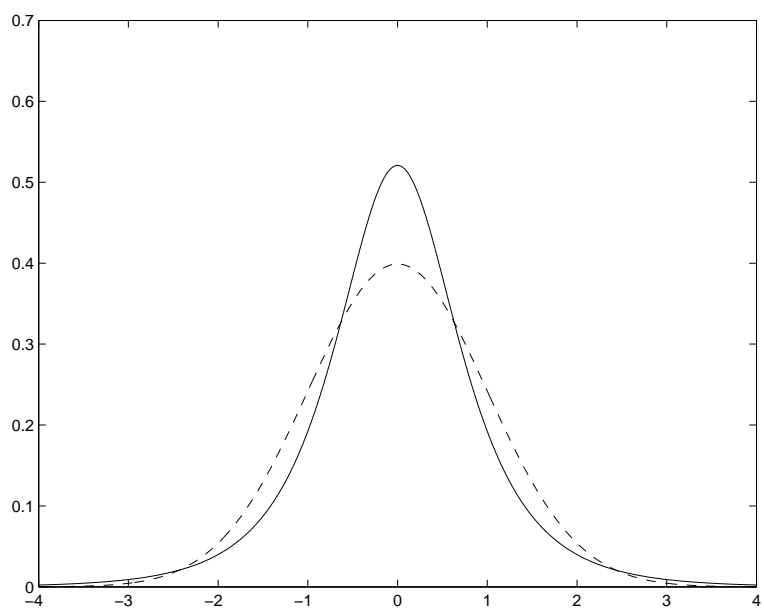
För att förstå mer om NIG-fördelningen ska vi utgå ifrån dess täthetsfunktion och härleda moment, momentskattningar och några resultat som kommer att förenkla beräkningar längre fram.

#### Täthet

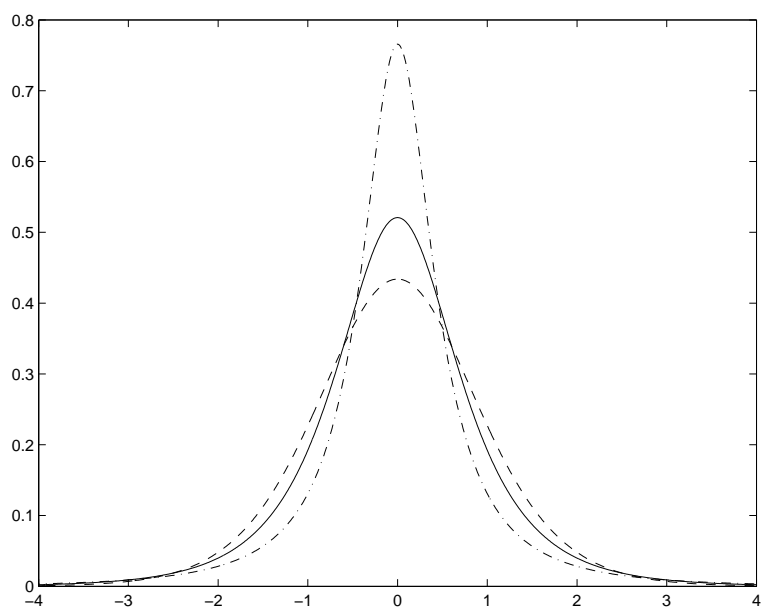
$$f(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} e^{\beta(x - \mu)} \quad (8)$$
$$0 \leq |\beta| < \alpha, \quad \delta > 0.$$

$K_\nu$  är en modifierad besselfunktion av den tredje sorten med index  $\nu$ . Parameterna har följande tolkningar:  $\alpha$  bestämmer hur ”brant” tätheten är,  $\beta$  bestämmer hur skev den är,  $\delta$  bestämmer skalan och  $\mu$  läget.

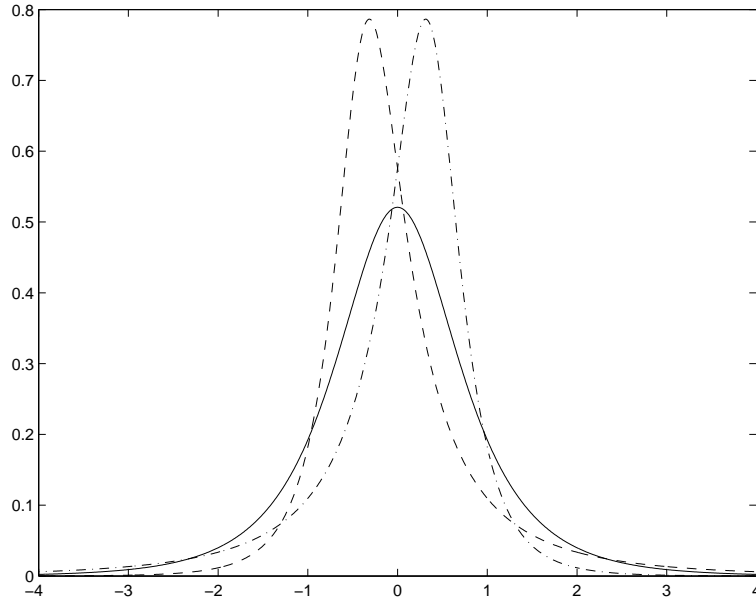
Följande figurer illustrerar NIG-fördelningens flexibilitet i jämförelse med normalfördelningen. Alla illustrerade fördelningar har samma väntevärde ( $= 0$ ) och varians ( $= 1$ ). Den första figuren visar fördelningarna med samma fyra första moment. NIG-fördelningen har parametrarna  $\alpha = 1, \beta = 0, \delta = 1$  och  $\mu = 0$ . Normalfördelningen har parametrarna  $\mu = 0$  och  $\sigma = 1$ . Den andra figuren visar NIG-fördelningen med olika alfa-värden, och den tredje hur det kan se ut med olika beta-värden. Detta för att se hur olika form NIG-fördelningen kan ha då normalfördelningen bara skulle ha ett och samma utseende. För att väntevärde och varians ska vara lika för alla avbildade NIG-fördelningar så måste de olika  $\alpha$ - och  $\beta$ -värdena kompenseras med lite olika  $\delta$ - och  $\mu$ -värden.



Figur 1: NIG-fördelningen (heldragen) och normalfördelningen (streckad) med samma fyra första moment



Figur 2: NIG-fördelningen med olika alfa-värden; streckad:  $\alpha=2$ ,  $\delta=2$ ; punkt-streckad:  $\alpha=0.5$ ,  $\delta=0.5$



Figur 3: NIG-fördelningen med olika beta-värden;  
 streckad: beta=0.6, delta=0.512, my=-0.384;  
 punkt-streckad: beta=-0.6, delta=0.512, my=0.384

### Momentgenererande funktion $\Psi$

$$\begin{aligned}
 \Psi(u) &= E[e^{uX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} e^{\beta(x-\mu)} dx = \\
 &= e^{\mu u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} e^{(\beta+u)(x-\mu)} dx = \\
 &= e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2})+\mu u} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2}} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} e^{(\beta+u)(x-\mu)} dx = \\
 &= e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2})+\mu u} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \alpha, \beta+u, \delta, \mu) dx = \\
 &= e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2})+\mu u}.
 \end{aligned}$$

### Kumulantgenererande funktion $\Phi$

$$\Phi(u) = \log(\Psi(u)) = \delta\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2}\right) + \mu u. \quad (9)$$

Observera att moment- och kumulantgererande funktion existerar då  $u$  uppfyller  $\alpha > |\beta + u|$ .



### Kumulanter

$$\begin{aligned}\Phi'(u) &= \frac{\delta(\beta + u)}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}} + \mu \Rightarrow \\ \kappa_1 &= \Phi'(0) = \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \mu \\ \Phi''(u) &= \frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2}} + \frac{\delta(\beta + u)^2}{(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})^3} \\ &= \frac{\delta\alpha^2}{(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})^3} \Rightarrow \\ \kappa_2 &= \Phi''(0) = \frac{\delta\alpha^2}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^3} \\ \Phi'''(u) &= \frac{3\delta\alpha^2(\beta + u)}{(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})^5} \Rightarrow \\ \kappa_3 &= \Phi'''(0) = \frac{3\delta\alpha^2\beta}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^5} \\ \Phi^{(4)}(u) &= \frac{3\delta\alpha^2}{(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})^5} + \frac{15\delta\alpha^2(\beta + u)^2}{(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})^7} = \\ &= \frac{3\delta\alpha^2(\alpha^2 + 4(\beta + u)^2)}{(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2})^7} \Rightarrow \\ \kappa_4 &= \Phi^{(4)}(0) = \frac{3\delta\alpha^2(\alpha^2 + 4\beta^2)}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^7}\end{aligned}$$

### Momentskattningar

Låt  $\gamma_1 = \kappa_3/(\kappa_2)^{(3/2)}$  och  $\gamma_2 = \kappa_4/(\kappa_2)^2$ . Man brukar kalla  $\gamma_1$  för skevheten och  $\gamma_2$  för kurtosisen. Ibland, till exempel i Matlab, defineras kurtosisen som  $\gamma_2 + 3$ . För att få fram momentskattningar av NIG-fördelningens parametrar så kan man lösa ut  $\alpha, \beta, \delta$  och  $\mu$  ur uttrycken ovan och ersätta kumulanterna med motsvarande stickprovsmoment. Man får då:

$$\hat{\alpha} = \frac{3\sqrt{3\gamma_2 - 4\gamma_1^2}}{\sqrt{\kappa_2}(3\gamma_2 - 5\gamma_1^2)} \quad (10)$$

$$\hat{\beta} = \frac{3\gamma_1}{\sqrt{\kappa_2}(3\gamma_2 - 5\gamma_1^2)} \quad (11)$$

$$\hat{\delta} = \frac{3\sqrt{\kappa_2}\sqrt{3\gamma_2 - 5\gamma_1^2}}{3\gamma_2 - 4\gamma_1^2} \quad (12)$$

$$\hat{\mu} = \kappa_1 - \frac{3\gamma_1\sqrt{\kappa_2}}{3\gamma_2 - 4\gamma_1^2} \quad (13)$$

Här används lite oegentligt samma beteckningar för stickprovets och fördelningens moment. För att skatta parametrarna i NIG-fördelningen kan man

också ta fram maximum likelihood-skattningar. Tyvärr har dessa skattningar ingen sluten form, men det finns ett särskilt program som sägs kunna lösa likelihood-ekvationerna effektivt. Se Rydberg (1996) och referenser däri.

### Simulering

Det finns en metod att simulera stokastiska variabler från NIG-fördelningen. Den bygger på det faktum att om  $X$  är NIG-fördelad så är den lika fördelad som en normalfördelad variabel som har en särskild stokastisk varians och medelvärde. Låt  $Z$  ha tätheten

$$f_z(z; \chi, \psi) = \sqrt{\frac{\chi}{2\pi z^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\chi}{z} + \psi z\right)\right), \quad z > 0, \quad \chi > 0, \quad \psi > 0.$$

$Z$ :s fördelning kallas "inverse Gaussian". Låt nu  $\chi = \delta^2, \psi = \alpha^2 - \beta^2$ . Den momentgenererande funktionen blir:

$$\begin{aligned} \Psi_Z(u) &= E[e^{uZ}] = \int_0^\infty e^{uz} \frac{\delta}{\sqrt{2\pi z^3}} e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{z} + (\alpha^2-\beta^2)z\right)} dz = \\ &= e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2-2u})} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{\delta}{\sqrt{2\pi z^3}} e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2-2u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{z} + (\alpha^2-\beta^2-2u)z\right)} dz = \\ &= e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2-2u})} \int_0^\infty f_z(z; \delta^2, \alpha^2 - \beta^2 - 2u) dz = \\ &= e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2-2u})}. \end{aligned}$$

Låt  $X|Z = z \sim N(\mu + \beta z, z)$ , då får man:

$$\begin{aligned} \Psi_X(u) &= E[e^{uX}] = E[E[e^{uX}|Z]] = \\ &= \{E[e^{uX}|Z = z] = e^{\mu u + \beta z u + \frac{z u^2}{2}}\} = \\ &= E[e^{\mu u + \beta u Z + \frac{u^2}{2} Z}] = \\ &= e^{\mu u} \Psi_Z\left(\beta u + \frac{u^2}{2}\right) = \\ &= e^{\mu u} e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2-2\beta u - u^2})} = \\ &= e^{\delta(\sqrt{\alpha^2-\beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta+u)^2}) + \mu u} \Rightarrow \\ X &\sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu). \end{aligned}$$

$Z$  kan man simulera med en algoritm från Michael, Schucany & Haas (1976). Antag att  $Z$ :s utfall blir  $z$ , då kan  $X$  lätt simuleras som en  $N(\mu + \beta z, z)$ -stokastisk variabel.

### Test av momentskattningar

Med hjälp av denna algoritm för att simulera NIG-stokastiska variabler så testar jag hur bra momentskattningarna av de olika parametrarna är. Detta

går till så att jag simulerar fram flera stickprov med ett givet antal stokastiska variabler från samma  $NIG$ -fördelning i varje. För varje stickprov skattar jag sedan parametrarna. De skattningarna jag får fram kan ses som ett stickprov från momentskattningarnas fördelning, och från detta stickprov skattar jag sedan skattningarnas standardavvikelser, dvs felen för skattningarna. Eftersom  $NIG$ -fördelningen är tänkt att anpassas till aktiedata så kan det vara lämpligt att låta varje stickprov med stokastiska variabler vara lika stort som de typiska stickproven i verkligheten, samt att låta parametrarna i den fördelning som jag simulerar ifrån ha värden som en typisk aktie. Därför sätter jag varje stickprovs storlek till ett tusen, och parametervärdena till  $\alpha = 66.5101, \beta = 0.7887, \delta = 0.0254$  och  $\mu = -0.0007$ . Ju fler stickprov man har, desto säkrare blir skattningen av parameterskattningarnas standardavvikelser, så jag tar fram tusen stickprov. Man får då:

	alfa	beta	delta	my
värde:	66.5101	0.7887	0.0254	-0.0007
stdav:	16.0163	2.1140	0.0052	0.0022

Här ser man att särskilt  $\beta$ :s, men också  $\mu$ :s standardavvikelser är stora. Det gör kanske inte så mycket att skattningen av  $\beta$  är så osäker eftersom den sökta fördelningen är så gott som symmetrisk. Alltså bör  $\beta$  vara nära noll. Om  $\beta$  är lika med noll så är  $\mu$  medelvärdet i fördelningen. Då kan man jämföra problemet med att skatta  $\mu$  här med det faktum att det också i Blacks & Scholes modell är svårt att skatta medelvärdet. I Blacks & Scholes modell kommer man emellertid undan det problemet eftersom medelvärdet inte finns med i prissättningsformeln.

### Lemman

Nedan presenteras två lemmen som kommer till användning i senare kapitel.

#### Lemma 1 (faltning).

Låt  $X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_1, \mu_1)$  och  $X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_2, \mu_2)$ , då är  $X_1 + X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$ .

**Bevis:** Momentgenererande funktionen för  $X_1 + X_2$  är:

$$\begin{aligned} \Psi_{X_1+X_2}(u) &= \Psi_{X_1}(u)\Psi_{X_2}(u) = \\ &= e^{\delta_1(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2})+\mu_1u+\delta_2(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2})+\mu_2u} \\ &= e^{(\delta_1+\delta_2)(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+u)^2})+(\mu_1+\mu_2)u} = \\ &= \Psi_Y(u), \end{aligned}$$

där  $Y \sim NIG(\alpha, \beta, \delta_1 + \delta_2, \mu_1 + \mu_2)$ .

#### Lemma 2 (exponentiell tiltning).

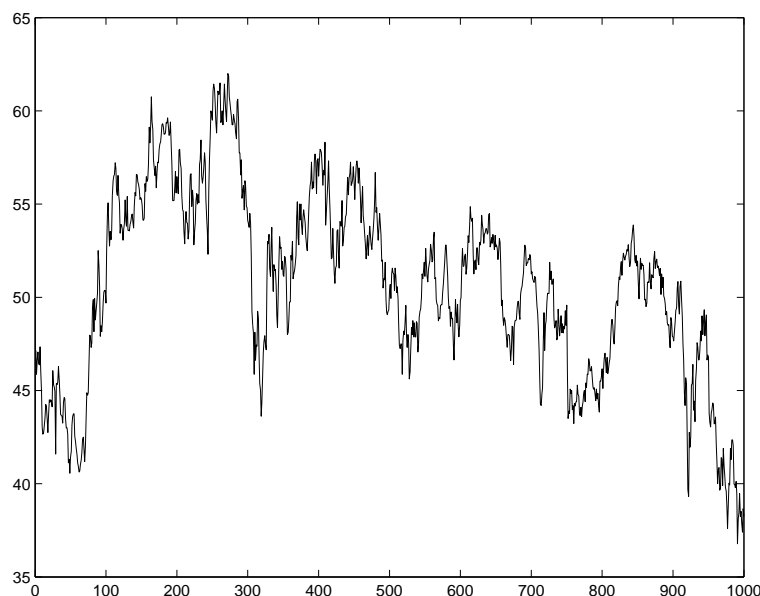
Låt  $X$  vara  $NIG$ -fördelad med täthet  $f(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$  och kumuläntgenererande funktion  $\Phi(u)$ . För  $\theta$  sådana att  $\alpha > |\beta + \theta|$  är  $\exp(\theta x - \Phi(\theta))f(x; \alpha, \beta, \delta, \mu)$

tätheten för en  $NIG$ -fördelad stokastisk variabel med parametrarna  $\alpha, \beta + \theta, \delta$  och  $\mu$ .

**Bevis:**

$$\begin{aligned}
 e^{\theta x - \Phi(\theta)} f(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) &= e^{\theta x - (\delta(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2}) + \mu\theta)} \\
 &\quad \times \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} e^{\beta(x - \mu)} = \\
 &= \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2}} \frac{K_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} e^{(\beta + \theta)(x - \mu)} \\
 &= f(x; \alpha, \beta + \theta, \delta, \mu).
 \end{aligned}$$

Den process  $X_t$  vi vill ha ska alltså ha dagliga inkrement  $X_t - X_{t-1}$  som är  $NIG$ -fördelade. Vi definierar  $X_0 = 0$ , då får man att  $X_t - X_{t-1} \sim X_1$ . Låt alltså  $X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  med lämpliga parametrar, lemma 1 ger då att  $X_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta t, \mu t)$ . Egentligen har vi bara visat det för heltals- $t$ , men det är lätt att se att detta kan generaliseras till alla  $t > 0$ .



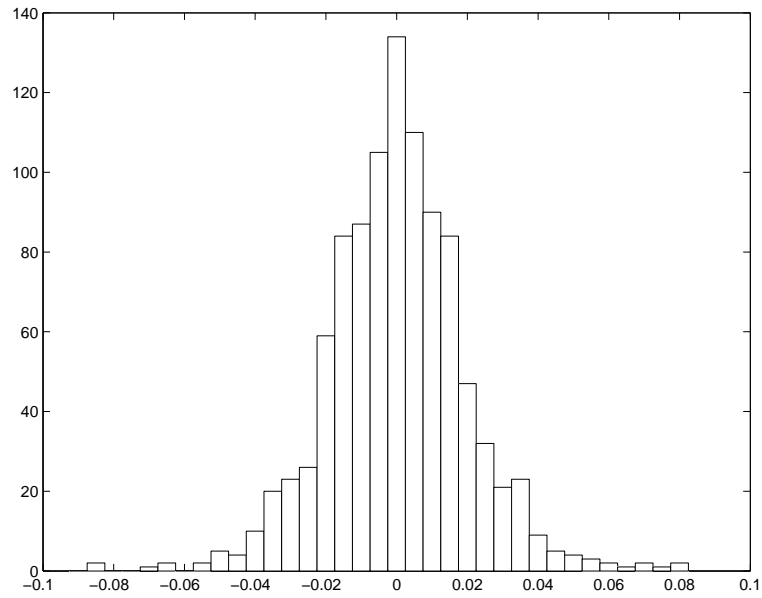
Figur 4: BP:s kursutveckling

## 4 Passform

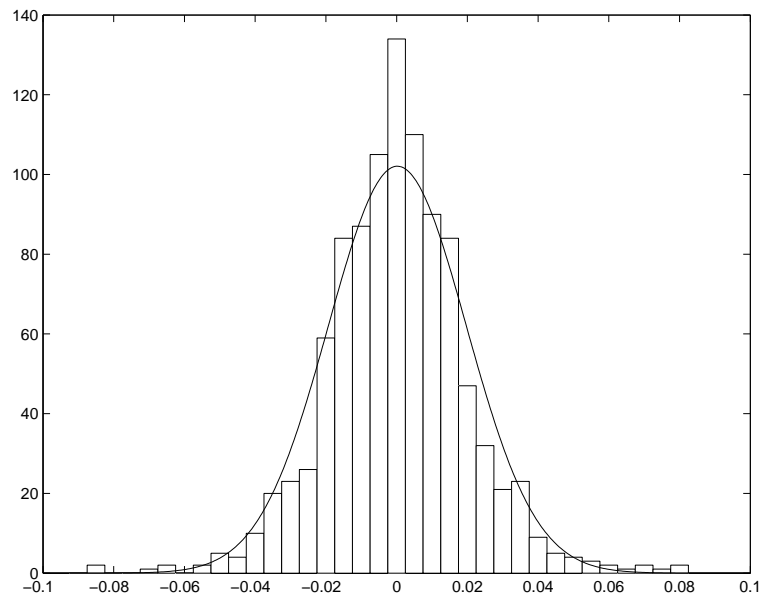
För att se hur bra normal- och NIG-fördelningen passar i verkligheten kan vi titta på en särskild aktie, BP. Observationerna sträcker sig över tusen dagar. Figur 4 visar denna kursutveckling, från 1998-11-18 till 2002-11-12. De dagliga tillväxternas fördelning syns lättast i ett histogram, se figur 5. Till dessa observationer anpassar man lätt en normalfördelning. Denna får parametrarna  $\mu = 0.0002$  och  $\sigma = 0.0195$ .

Man ser tydligt åtminstone en av de två största anledningarna till att normalfördelningen kritiseras. Den empiriska fördelningen brukar ha tyngre svansar och mer massa nära sitt medelvärde än normalfördelningen. Normalfördelningen har så tunna svansar att vissa dagars stora aktierörelser skulle vara helt osannolika om normalfördelningen låg bakom dem. Ibland är den empiriska fördelningen också lite skev, dvs fördelningen för positiva och negativa förändringar är olika.

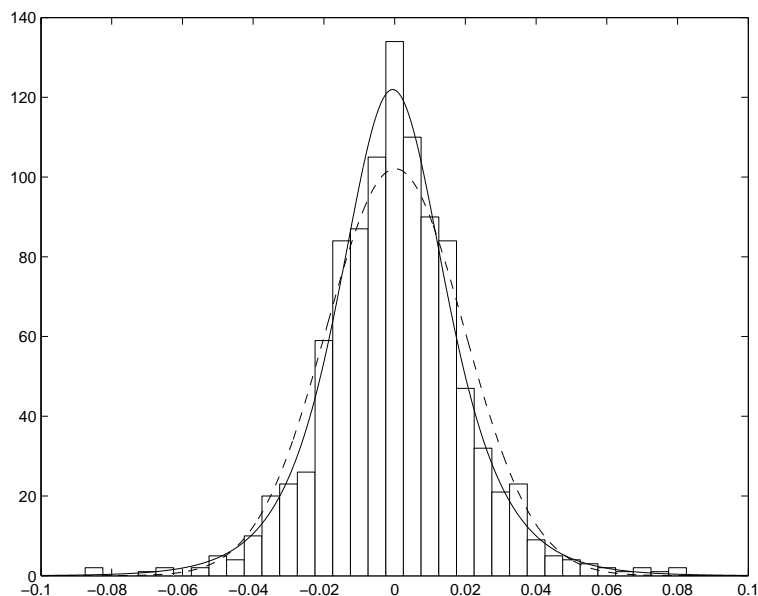
NIG-fördelningen har redan från början en form som stämmer bättre för dessa observationer jämfört med normalfördelningen, se figur 1. NIG-fördelningen har ju dessutom fler parametrar än normalfördelningen och därför bör passformen kunna anpassas än bättre, men som har visats i föregående kapitel är det svårt att skatta beta — skevhetsparametern. Anpassar man NIG-fördelningen till data får man figur 7. NIG-fördelningens parametrar är  $\alpha = 66.5101$ ,  $\beta = 0.7887$ ,  $\delta = 0.0254$  och  $\mu = -0.0007$ . Man ser med ögat att NIG-fördelningen verkar passa mycket bättre än normalfördelningen.



Figur 5: De dagliga tillväxterna för BP



Figur 6: Tillväxterna med anpassad normalfördelning



Figur 7: Anpassad NIG-fördelning (heldragen) och normalfördelning (streckad)

För att statistiskt testa om en viss teoretisk fördelning kan ligga bakom en empirisk fördelning kan man göra ett  $\chi^2$ -test. Ett sådant test ger med en viss indelning av datan:

	chi2	frgr	p-värde
norm.	375.3	15	$<3.47 \cdot 10^{-69}$
NIG	12.8	13	0.4610

Här ser man att NIG-fördelningen passar utmärkt, medan normalfördelningen förkastas på en hög signifikansnivå. Man kan notera att jag har beräknat p-värdet för normalfördelningen med en variant av Markovs olikhet, och det är därför antagligen ännu mindre. Se Gut (1995), s 12 olikhet (8.2) med  $r = 181$ .

Ett annat mått på passform är redundansen som ligger mellan 0 och 1, där 0 betyder perfekt passform. Den har därmed fördelen att vara "skal-fri". Man får för samma data som ovan:

	normal	NIG
Redundans	0.0146	0.0028

Vi kan alltså med säkerhet säga att NIG-fördelningen passar bättre till empiriska data än normalfördelningen. Vi accepterar alltså Barndorff-Nielsens modell för aktietillväxterna.

## 5 Ofullständighet

Den Lévy-process med NIG-fördelade inkrement som vi har föreslagit som  $X_t$  i ekvation (2);

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad (2)$$

visar Barndorff-Nielsen (1995) leder till att det inte finns ett entydigt riskneutralt sannolikhetsmått  $Q$ , som uppfyller ekvation (6), dvs

$$e^{-rt} E^Q[S_t] = S_0. \quad (6)$$

Eberlein & Jacod (1997) har visat att om det riskneutrala måttet inte är unikt så finns det en mängd olika riskneutrala mått. Det kan man tycka inte skulle vara ett så stort problem eftersom det på verkliga marknader ofta finns två föreslagna priser för en och samma vara, nämligen köp- och säljpriset. Eberlein & Jacod visar emellertid att avsaknad av ett unikt riskneutralt mått leder till att alla priser i nedanstående intervall är möjliga riskneutrala priser.

$$[(S_0 - ae^{-rT})^+, S_0] \quad (14)$$

Detta intervall är mycket större, särskilt uppåt, än det observerade intervallet.

För att bestämma ett pris räcker alltså inte principen om arbitragefrihet, det behövs ytterligare någon metod. Gerber & Shiu (1996) respektive Blatt & Rydberg (1997) föreslagit två olika metoder för att finna ett pris för dessa situationer, och dessa kommer att undersökas i kommande kapitel.



## 6 Gerbers & Shius metod

Denna metod för att komma runt problemet att det inte finns ett unikt riskneutralt mått presenterades av Gerber & Shiu (1996). Metoden går ut på att man tiltar den ursprungliga fördelningen så att det diskonterade aktiepriset blir en martingal under det nya måttet. Låt

$$\frac{dP^h}{dP} = \frac{e^{hX_T}}{E[e^{hX_T}]} = e^{hX_T - \Phi(h)T}. \quad (15)$$

$h$  väljs så att

$$\begin{aligned} E^h[S_T e^{-rT}] &= S_0 && \iff \\ E[S_0 e^{-rT + X_T + hX_T - \Phi(h)T}] &= S_0 && \iff \\ S_0 e^{-(r + \Phi(h))T} E[e^{(1+h)X_T}] &= S_0 && \iff \\ \Phi(h + 1) - \Phi(h) - r &= 0 && \iff \end{aligned} \quad (16)$$

$$r = \Phi(h + 1) - \Phi(h). \quad (17)$$

Låt  $h^*$  vara den (enligt Gerber & Shiu) unika lösningen till ekvation (17), och  $P^*$  det mått man får om man sätter in detta  $h^*$  i (15). Man får att priset är:

$$C^{GS}(a, T) = e^{-rT} E^*[(S_T - a)^+], \quad (18)$$

där väntevärdet tas under måttet som ges av (15), med ett  $h$  som löser (17). Observera likheten mellan ekvationerna (5) och (18).

Eberlein & Keller (1995) använde denna metod för att prissätta optioner i en modell där de dagliga tillväxterna var så kallat hyperboliskt fördelade. Både den hyperboliska fördelningen och NIG-fördelningen är specialfall av den generaliserade hyperboliska fördelningen, så därför har de många liknande egenskaper. NIG-fördelningen är emellertid lite enklare att arbeta med.

Man kan ge en viss motivation till användandet av Gerbers & Shius metod om man gör vissa antaganden om en "typisk" optionsköparens nyttofunktion. Begreppet nyttofunktion kanske kräver en förklaring. Vi antar att alla investerare rangordnar olika investeringsalternativ utifrån en nyttofunktion. Denna funktion tilldelar ett "nytto"-värde till varje summa pengar. Investeraren agerar sedan efter vad som ger honom högst förväntad nytta. Man kan göra olika antaganden om nyttofunktionen, och ett antagande som man alltid brukar göra är att den är växande. Detta medför att man föredrar mer framför mindre. En riskneutral investerare har en linjär nyttofunktion, och en riskavers har en konkav.

Låt  $u(x)$  vara den "typiske" köparens nytta av  $x$ . Låt vidare köparen äga  $v$  stycken aktier. Priset på ett derivat, som betalar  $P_T$  vid tiden  $T$ , är  $C$  vid

tiden 0. Ekonomisk teori säger att jämviktspriset kommer att bestämmas så att köparen är likgiltig inför alternativen att köpa eller sälja en liten andel  $a$  av derivatet. Detta kan man uttrycka på följande vis:

$g(a) = E[u(vS_T + a(P_T - Ce^{rT}))]$  ska vara maximal för  $a = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} g'(a) &= E[u'(vS_T + a(P_T - Ce^{rT}))(P_T - Ce^{rT})] \\ &\Rightarrow \\ g'(0) &= E[u'(vS_T)(P_T - Ce^{rT})] = 0 \quad \Leftrightarrow \\ C &= e^{-rT} \frac{E[P_T u'(vS_T)]}{E[u'(vS_T)]}. \end{aligned} \quad (19)$$

Antag att

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1+c}}{1+c} & \text{om } c \neq -1 \\ \log(x) & \text{om } c = -1 \end{cases} \quad (20)$$

Då får man att (19) ovan blir

$$C = e^{-rT} \frac{E[P_T (vS_T)^c]}{E[(vS_T)^c]}.$$

Låt  $P_T = S_T$  och därmed  $C = S_0$ , då får man

$$\begin{aligned} S_0 &= e^{-rT} \frac{E[S_T^{1+c}]}{E[S_T^c]} = \\ &= S_0 e^{-rT} \frac{E[(e^{X_T})^{1+c}]}{E[(e^{X_T})^c]} = \\ &= S_0 e^{-rT} e^{T(\Phi(1+c) - \Phi(c))} \quad \Leftrightarrow \\ r &= \Phi(1+c) - \Phi(c) \\ &\Rightarrow \\ c &= h (!) \end{aligned}$$

Gerbers & Shius metod ger alltså ett sorts jämviktspris för optionen om en typisk köpare har en nyttofunktion som ges av (20). Parametern  $h$  har också en tolkning som parametern  $c$  i (20).

Ett minimi-krav man kan ställa på en metod att prissätta optioner med är att den ska ge Blacks & Scholes pris, då man antar Blacks & Scholes modell. Gerbers & Shius metod uppfyller detta krav. I Blacks & Scholes modell får man, eftersom  $X_T$  är normalfördelad:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \frac{u^2 \sigma^2}{2} \Rightarrow \\ r &= \Phi(h+1) - \Phi(h) \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(h+1) + \frac{(h+1)^2\sigma^2}{2} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h - \frac{h^2\sigma^2}{2} \iff \\
r &= \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{(2h+1)\sigma^2}{2} \iff \\
r &= \mu + h\sigma^2 \iff \\
h^* &= \frac{r - \mu}{\sigma^2} \Rightarrow \\
\frac{dP^*}{dP} &= e^{h^*X_T - \Phi(h^*)T} = \\
&= e^{\left(\frac{r-\mu}{\sigma^2}\right)\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right) - \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{r-\mu}{\sigma^2}\right) + \left(\frac{r-\mu}{\sigma^2}\right)^2 \frac{\sigma^2}{2}\right)T} = \\
&= e^{\frac{r-\mu}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T} = \\
&= \left\{ \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r - \mu}{\sigma} \right\} = \\
&= e^{\theta W_T - \frac{\theta^2}{2}T} = \\
&= \frac{dQ}{dP},
\end{aligned}$$

där  $Q$  är det riskneutrala måttet i Blacks & Scholes modell. Alltså är  $P^*$  och  $Q$  samma mått, och därför ger Gerbers & Shius metod Blacks & Scholes pris i Blacks & Scholes modell.

### Tillämpning på NIG-processen

Gerbers & Shius metod går att använda på den sorts Lévy-process som presenterades i tidigare kapitel. Om  $X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$  så blir ekvation (17):

$$\begin{aligned}
r &= \Phi(h+1) - \Phi(h) \Rightarrow \\
r &= \delta \left( \sqrt{\alpha^2 - (\beta+h)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta+h+1)^2} \right) + \mu. \quad (21)
\end{aligned}$$

Det kan vara intressant att observera att om den ”typiske” köparen ovan är riskneutral, så är  $c = h = 0$ , och då blir H.L. i ekvation (21) lika med  $\Phi(1)$ . Detta är precis aktiens förväntade tillväxt. Ekvationen säger då alltså att aktiens tillväxt är lika med den riskfria räntan, precis som väntat. Eftersom vi inte vet olika köparens  $c$ -värden så måste ekvation (21) lösas numeriskt. Man får då:

**Proposition 2.** Priset på en köption enligt Gerbers & Shius metod i Barndorff-Nielsens modell blir:

$$\begin{aligned}
C^{GS}(a, T) &= S_0 \int_c^\infty f(x; \alpha, \beta + h^* + 1, \delta T, \mu T) dx \\
&\quad - a e^{-rT} \int_c^\infty f(x; \alpha, \beta + h^*, \delta T, \mu T) dx, \quad (22)
\end{aligned}$$

där  $c = -\log(S_0/a)$  och  $h^*$  löser ekvation (17).

**Bevis:**

$$\begin{aligned}
C^{GS}(a, T) &= e^{-rT} E^*[(S_T - a)^+] = e^{-rT} E^*[(S_T - a)^+ \mathbf{1}(S_T > a)] = \\
&= S_0 e^{-rT} E[e^{X_T + h^* X_T - \Phi(h^*)T} \mathbf{1}(X_T > -\log(S_0/a))] \\
&\quad - a e^{-rT} E[e^{h^* X_T - \Phi(h^*)T} \mathbf{1}(X_T > -\log(S_0/a))] \\
&= \{c \stackrel{\text{def}}{=} -\log(S_0/a)\} = \\
&= S_0 e^{-(r+\Phi(h^*))T} E[e^{(1+h^*)X_T} \mathbf{1}(X_T > c)] \\
&\quad - a e^{-rT - \Phi(h^*)T} E[e^{h^* X_T} \mathbf{1}(X_T > c)] = \\
&= \{\text{enligt ekvation (16)}\} = \\
&= S_0 e^{-\Phi(h^*+1)T} \int_c^\infty e^{(h^*+1)x} f(x; \alpha, \beta, \delta T, \mu T) dx \\
&\quad - a e^{-rT} e^{-\Phi(h^*)T} \int_c^\infty e^{h^* x} f(x; \alpha, \beta, \delta T, \mu T) dx = \\
&= \{\text{Lemma 2}\} = \\
&= S_0 \int_c^\infty f(x; \alpha, \beta + h^* + 1, \delta T, \mu T) dx \\
&\quad - a e^{-rT} \int_c^\infty f(x; \alpha, \beta + h^*, \delta T, \mu T) dx.
\end{aligned}$$

## 7 Bladts & Rydbergs metod

Bladt & Rydberg (1997) presenterade en metod att prissätta optioner som fungerar även då marknaden inte är fullständig. Metoden fungerar faktiskt utan att man gör några ekonomiska antaganden. Enkelt uttryckt så bygger den på att man beräknar den förväntade förlusten för den som utfärdar optionen, diskonterat till dagens värde, och låter detta vara optionspriset. Detta väntevärde beräknas under det verkliga sannolikhetsmåttet, men det som gör metoden speciell är de diskonteringsfaktorer man använder. Man låter nämligen varje process' (förväntade) förändringsfaktor vara diskonteringsfaktor. Detta betyder exempelvis att man använder en diskonteringsfaktor för aktiepriser och en annan för kontanta, icke-stokastiska betalningar i framtiden.

Nuvärdet för en icke-stokastisk summa  $a$  som betalas vid tiden  $T$  blir på vanligt vis  $a \exp(-rT)$ . Man antar ju att räntan  $r$  är konstant, och  $a \exp(-rT)$  förräntar sig till  $a$  från tiden 0 (nu) till tiden  $T$ . För aktiepriser  $S_t$  blir det lite annorlunda. Definiera  $\rho$  genom  $\exp(\rho T) = E[S_T]/S_0$ . Med den konvention som beskrevs ovan blir nuvärdet av  $S_T$ :  $S_T \exp(-\rho T)$ . Detta nuvärde,  $S_T \exp(-\rho T)$ , är förstas en stokastisk variabel eftersom  $S_T$  inte är känd vid tiden 0.

För att få fram optionspriset resonerar Bladt & Rydberg så här: Uttryckt i nuvärde så kommer optionen att lösas in om  $S_T \exp(-\rho T) > a \exp(-rT)$ , och i så fall kommer den att leda till en kostnad (nuvärde) på  $S_T \exp(-\rho T) - a \exp(-rT)$ . Alltså blir kostnaden för optionen när man beräknar nuvärden på detta vis:

$$(S_T e^{-\rho T} - a e^{-rT})^+. \quad (23)$$

Tar man väntevärdet av detta uttryck får man ett rättvis pris om utfärdaren av optionen är riskneutral.

$$C^{BR}(a, T) = E[(S_T e^{-\rho T} - a e^{-rT})^+]. \quad (24)$$

Det kan tyckas konstigt att säga att optionen kommer att lösas in om  $S_T \exp(-\rho T) > a \exp(-rT)$ , eftersom den rimligen kommer att lösas in om  $S_T > a$ , och det gäller ju inte alltid att  $\rho = r$ . Det senare är emellertid sant i en riskneutral värld. Hursomhelst så överensstämmer Bladts & Rydbergs pris med Blacks & Scholes då  $S_T$  är som i Blacks & Scholes modell.

$$\begin{aligned} e^{\rho T} &= \frac{E[S_T]}{S_0} = E[e^{X_T}] = \\ &= E\left[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T}\right] \\ &= e^{\mu T} \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \mu \\ &\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C^{BR} &= E[(S_T e^{-\mu T} - a e^{-rT}) \mathbf{1}(S_T e^{-\mu T} > a e^{-rT})] \\ &= E\left[\left(S_0 e^{-\mu T + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} - a e^{-rT}\right)\right. \\ &\quad \left.\times \mathbf{1}\left(S_0 e^{-\mu T + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T} > a e^{-rT}\right)\right] \\ &= \{W_T \stackrel{\text{d}}{=} \sqrt{T} W_1\} = \\ &= E\left[\left(S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma \sqrt{T} W_1} - a e^{-rT}\right)\right. \\ &\quad \left.\times \mathbf{1}\left(-W_1 < \frac{\log(\frac{S_0}{a}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}\right)\right] \\ &= \left\{W_1 \stackrel{\text{d}}{=} -W_1, \quad d_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log(\frac{S_0}{a}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}\right\} = \\ &= S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T} E[e^{-\sigma \sqrt{T} W_1} \mathbf{1}(W_1 < d_2)] - a e^{-rT} P(W_1 < d_2) = \\ &= \left\{N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right\} = \\ &= S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}T} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\sigma \sqrt{T} w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw - a e^{-rT} N(d_2) = \\ &= S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w + \sigma \sqrt{T})^2}{2}} dw - a e^{-rT} N(d_2) = \\ &= \{v \stackrel{\text{def}}{=} w + \sigma \sqrt{T}, \quad d_1 \stackrel{\text{def}}{=} d_2 + \sigma \sqrt{T}, \quad w = d_2 \iff v = d_1\} = \\ &= S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \\ &= S_0 N(d_1) - a e^{-rT} N(d_2) = C^{BS}(a, T).\end{aligned}$$

Detta indikerar att den föreslagna metoden iallafall inte leder helt fel.

Man kan också ge ytterligare motivation till att använda Bladts & Rydbergs modell med följande resonemang:

Placerar man  $S_T \exp(-\rho T)$  i aktien vid tiden 0 så kommer det i medeltal att växa till  $S_T$  fram till tiden  $T$ . På samma sätt kommer  $a \exp(-rT)$  placerat i den riskfria tillgången att växa till  $a$ . Observera att  $S_T$  inte är känt vid tiden 0. I medeltal räcker det för den som har utfärdat en option att göra aktieplaceringen och låna  $a \exp(-rT)$  för att täcka kostnaden  $S_T - a$  vid tiden  $T$ . Antag att utfärdaren känner till  $S_T$ . Då gör han som ovan om

$S_T > a$ , dvs  $S_T \exp(-\rho T) > a \exp(-rT)$ , eftersom de senare H.L och V.L. växer till de förra över tiden. För att kunna göra detta måste utfärdaren ha:

$$(S_T e^{-\rho T} - a e^{-rT})^+.$$

Tyvärr är  $S_T$  okänt, därför får man ta väntevärdet av uttrycket ovan. Då får man återigen:

$$C^{BR}(a, T) = E[(S_T e^{-\rho T} - a e^{-rT})^+].$$

Resonemanget är rimligt om den som utfärdar optionen har en stor portfölj med andra utfärdade optioner vars värden är oberoende av varandra. Enligt stora talens lag är då detta ett "rimligt" pris. Tankesättet påminner om det från livförsäkringsmatematiken, där varje premie bestäms så att den i medeltal räcker till de eventuella betalningarna i framtiden.

### Tillämpning på NIG-processen

Antag nu att  $X_T$  är en mer generell Lévy-process än Blacks & Scholes brownska rörelse, samt att momentgenererande och kumuläntgenererande funktion,  $\Phi$  existerar för denna process.  $\Rightarrow$

$$e^{\rho T} = \frac{E[S_T]}{S_0} = E[e^{X_T}] = e^{\Phi(1)T} \Rightarrow$$

$$\rho = \Phi(1).$$

Man kan nu skriva om  $C^{BR}(a, T)$ :

$$S_T e^{-\Phi(1)T} > a e^{-rT} \iff S_0 e^{X_T - \Phi(1)T} > a e^{-rT}$$

$$\iff X_T > (\Phi(1) - r)T - \log(S_0/a).$$

Låt  $y = (\Phi(1) - r)T - \log(S_0/a)$ .  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} C^{BR}(a, T) &= E[(S_T e^{-\Phi(1)T} - a e^{-rT}) \mathbf{1}(X_T > y)] = \\ &= S_0 e^{-\Phi(1)T} E[e^{X_T} \mathbf{1}(X_T > y)] - a e^{-rT} P(X_T > y) = \\ &= S_0 e^{-\phi(1)T} \int_y^\infty e^x dF_{X_T}(x) - a e^{-rT} P(X_T > y), \end{aligned} \quad (25)$$

där  $F_{X_T}(x)$  är fördelningsfunktionen för  $X_T$ .

Antag nu att Barndorff-Nielsens modell gäller, dvs  $X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ . Bladt & Rydberg valde att stanna vid ekvation (25) och simulera NIG-fördelade stokastiska variabler för att beräkna  $C^{BR}(a, T)$ . Detta är inte nödvändigt, utan man kan med hjälp av mina resultat i kapitel 4 gå några steg till för att få fram ett mer explicit pris:

$$X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu) \Rightarrow \{\text{Lemma 1}\} \Rightarrow X_T \sim NIG(\alpha, \beta, \delta T, \mu T).$$

$$\begin{aligned}
e^{-\Phi(1)T} \int_y^\infty e^x dF_{X_T}(x) &= e^{-\Phi(1)T} \int_y^\infty e^x f(x; \alpha, \beta, \delta T, \mu T) dx = \\
&= \{\text{Lemma 2}\} = \\
&= \int_y^\infty f(x; \alpha, \beta + 1, \delta T, \mu T) dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &= \delta \left( \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} \right) + \mu \Rightarrow \\
y &= \left( \delta \left( \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} \right) + \mu - r \right) T - \log(S_0/a)
\end{aligned}$$

Sammantaget leder detta till att (25) kan skrivas:

$$\begin{aligned}
C^{BR}(a, T) &= S_0 \int_y^\infty f(x; \alpha, \beta + 1, \delta T, \mu T) dx \\
&\quad - a e^{-rT} \int_y^\infty f(x; \alpha, \beta, \delta T, \mu T) dx, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\text{där } y = \left( \delta \left( \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} \right) + \mu - r \right) T - \log(S_0/a).$$

Om man gör variabelsubstitutionen  $u = x - \mu T$  i båda integralerna ovan får man:

**Proposition 3.** Priset på en köption enligt Bladts & Rydbergs metod i Barndorff-Nielsens modell blir:

$$\begin{aligned}
C^{BR}(a, T) &= S_0 \int_z^\infty f(u; \alpha, \beta + 1, \delta T, 0) du \\
&\quad - a e^{-rT} \int_z^\infty f(u; \alpha, \beta, \delta T, 0) du, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\text{där } z = \left( \delta \left( \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} \right) - r \right) T - \log(S_0/a).$$

**Anmärkning:**  $\mu$  ingår inte i proposition 3, till skillnad från proposition 2.



## 8 Jämförelse av metoderna och slutsatser

För att se hur de här metoderna fungerar så har jag använt mig av datan som även användes för att testa passformen för de olika fördelningarna. Priserna har beräknats enligt proposition 1, 2 och 3. Jag har låtit räntan  $r$  vara 4% per år, och  $S_0 = 37.50$ . Nedan ses resultatet.

T är tid till förfalldag, a lösenpris, BS Blacks & Scholes pris, GS Gerbers & Shius pris och BR är Bladts & Rydbergs pris. De två sista kolumnerna ger min- och maxpris enligt Eberlein & Jacod, dvs intervallet i uttryck (14).

T	a	BS	GS	BR	min	max
1	35.00	2.5056	2.5065	2.5065	2.5056	37.5000
1	37.50	0.2951	0.2783	0.2782	0.0060	37.5000
1	40.00	0.0001	0.0018	0.0017	0.0000	37.5000
2	35.00	2.5131	2.5156	2.5158	2.5112	37.5000
2	37.50	0.4190	0.4060	0.4058	0.0120	37.5000
2	40.00	0.0036	0.0082	0.0079	0.0000	37.5000
5	35.00	2.5649	2.5671	2.5676	2.5280	37.5000
5	37.50	0.6679	0.6593	0.6589	0.0300	37.5000
5	40.00	0.0542	0.0597	0.0588	0.0000	37.5000
10	35.00	2.6966	2.6958	2.6965	2.5560	37.5000
10	37.50	0.9531	0.9471	0.9466	0.0600	37.5000
10	40.00	0.1918	0.1946	0.1933	0.0000	37.5000
30	35.00	3.2288	3.2262	3.2263	2.6676	37.5000
30	37.50	1.6867	1.6838	1.6830	0.1796	37.5000
30	40.00	0.7445	0.7450	0.7434	0.0000	37.5000
90	35.00	4.4205	4.4192	4.4185	3.0004	37.5000
90	37.50	3.0237	3.0233	3.0218	0.5361	37.5000
90	40.00	1.9773	1.9783	1.9763	0.0000	37.5000

Som väntat närmar sig GS- och BR-priserna BS-priset då tiden till förfalldagen ökar. Detta är som nämnt tidigare en konsekvens av centrala gränsvärdessatsen. Det faktum att de två alternativa metoderna ger priser som är klart skilda från BS-priset, och att NIG-fördelningen passar så bra till de dagliga tillväxterna, gör att man bör överväga att använda Barndorff-Nielsens modell då det är ett fåtal dagar kvar till förfalldagen. Ett oväntat resultat är att GS- och BR-priserna dessutom ligger mycket nära varandra för alla lösenpriser och tider till förfalldag. Detta är ju bra eftersom man kan anse att priset skall ligga i det intervall som ges av de två priserna, och man vill ju gärna ha ett litet sådant intervall.

Man kan emellertid också ge argument mot de två använda metoderna. Hur känsligt är priset för förändringar i NIG-fördelningens parametrar? I

kapitlet om NIG-fördelningen visade jag hur svårt det är att skatta  $\beta$ . Samma  $\beta$ -parameter påverkas sedan när fördelningen tiltas i de båda metoderna. Detta bör undersökas närmare.

Även om det visar sig att priset inte påverkas så mycket om man har skattat  $\beta$  eller de andra parametrarna fel så finns det allvarigare kritik. Blacks & Scholes lösning på prissättningsproblemet ger också instruktioner om hur man åtminstone teoretiskt kan replikera optionen. Med replikera menas att man kan bilda en portfölj av de två tillgångarna som inte kräver någon in- eller utförsel av pengar, som nästan säkert kommer att vara värd lika mycket som optionen på förfallodagen. Portföljen kräver kontinuerlig ombalansering så den fungerar inte riktigt lika bra i verkligheten. Utfärdaren av en option kan bilda en sådan portfölj när optionen utfärdas och på så vis kan han täcka sina åtaganden på förfallodagen. Det visar sig att Blacks & Scholes pris är precis kostnaden för en sådan portfölj. I Barndorff-Nielsens modell kan man inte bilda en replikerande portfölj med riktigt samma egenskaper som i Blacks & Scholes modell, i sådana fall skulle det finnas ett entydigt pris. Men en approximativt replikerande portfölj skulle ändå vara intressant för utfärdaren. Motiveringen till Bladts & Rydbergs metod beskriver ju något liknande men den metoden kräver att man har ett stort antal optioner, vars värden är oberoende av varandra. Den har ju dock fördelen att man slipper kontinuerlig ombalansering, vilket i verkligheten blir en mycket dyr affär.

Slutligen kan sägas att de båda föreslagna metoderna bör undersökas närmre för se hur känsliga de är för felskattningar av parametrarna. Bladts & Rydbergs metod kan också testas för att se om motiveringen för metoden fungerar i verkligheten. Hursomhelst kan man inte med stöd i mina resultat helt förkasta användandet av Blacks & Scholes modell då det är lång tid kvar till förfallodagen, trots att den inte stämmer särskilt bra överens med verkligheten. Men då det är kort tid kvar kan det vara bra att använda Barndorff-Nielsens modell tillsammans med antingen Gerbers & Shius eller Bladts & Rydbergs metod.

## APPENDIX Matlab-kod

Nedan är  $x$  en vektor med observerade tillväxter.

Täthet:

```
function [y]=nig(x)
global alfa beta delta my;
y=alfa*delta/pi
  *exp(delta*sqrt((alfa^2)-(beta^2))+(beta*(x-my)))
  .*besselk(1,alfa*sqrt(delta^2+((x-my).^2)))
  ./sqrt(delta^2+((x-my).^2));
```

Kumulantgenererande funktion:

```
function [fi]=nigfi(theta)
global alfa beta delta my;
fi=delta*(sqrt((alfa^2)-(beta^2))
  -delta*(sqrt((alfa^2)-((beta +theta).^2))));
```

Momentskattningar:

```
function [Y]=nigest(x)
k1=mean(x); k2=var(x); g1=skewness(x); g2=kurtosis(x)-3;
h1=sqrt(k2); h2=3*g2-(4*(g1^2)); h3=3*g2-(5*(g1^2));
alfa=3*sqrt(h2)/h1/h3;
beta=g1/h1/h3;
delta=3*h1*sqrt(h3)/h2;
my=k1-(3*g1*h1/h2);
Y=[alfa beta delta my];
```

Simulering av NIG-fördelade stokastiska variabler:

```
function [y]=randnig;
global alfa beta delta my;
a=alfa; b=beta; d=delta; m=my;
c=d^2; f=(a^2)-(b^2); mm=sqrt(c/f); v=randn^2;
z=mm+((mm^2)*v/(2*c))-mm/(2*c)*sqrt(4*mm*c*v+((mm*v)^2));
p=mm/(mm+z);
if rand<=p
s=sqrt(z);
else
s=sqrt((mm^2)/z);
end;
y=m+b*(s^2)+(s*randn);
```

Test av momentskattningarna:

```
X=nigest(x);
```

```

diff=[];
for j=1:1000
    stick=[];
    for i=1:1000
        stick=[stick randnig]
    end
    diff=[diff; nigest(stick)-X];
end
kov=diff'*diff/1000
[X; sqrt(diag(kov))']

```

Test av passform:

```

y=[-0.09:0.01:0.08];
N=hist(x,y); s=std(x); m=mean(x);
Enig=[]; Enorm=[];
for k=1:18
    Enig=[Enig quad(@nig,y(k)-0.005,y(k)+0.005)];
    Enorm=[Enorm (normcdf(y(k)+0.005,m,s)
                    -normcdf(y(k)-0.005,m,s))];
end;
Enig=1000*Enig
chi2nig=sum(((N-Enig).^2)./Enig)
pnig=1-chi2cdf(chi2nig,13)
Enorm=1000*Enorm
chi2norm=sum(((N-Enorm).^2)./Enorm)
pnorm=1-chi2cdf(chi2norm,15)
f=N/1000;
H=-sum(f.*log(f));
fnig=Enig/1000;
Hnig=-sum(f.*log(fnig));
fnorm=Enorm/1000;
Hnorm=-sum(f.*log(fnorm));
Rnig=1-(H/Hnig)
Rnorm=1-(H/Hnorm)

```

Blacks & Scholes pris

```

function [x]=callbs(S0,a,T,r);
global alfa beta delta my;
s=sqrt(delta*(alfa^2)/(sqrt((alfa^2)-(beta^2))^3));
d1=(log(S0/a)+((r+(0.5*(s^2)))*T))/(s*sqrt(T));
d2=d1-(s*sqrt(T));
x=(S0*normcdf(d1))-(exp(-r*T)*a*normcdf(d2));

```

Vänsterledet av ekvation (16)

```

function [y]=nigkumekv(x);
global alfa beta delta my r;
y=nigfi((x+1))-nigfi(x)-r;

```

Gerbers & Shius pris

```

function [x]=callgs(S0,a,T,r);
global alfa beta delta my r;
c=log(a/S0);
h=fzero(@nigkumekv,0);
delta=delta*T; my=T*my;
beta=beta+h;
p2=quad(@nig,c,1);
beta=beta+1;
p1=quad(@nig,c,1);
beta=beta-1-h; delta=delta/T; my=my/T;
x=(S0*p1)-(exp(-r*T)*a*p2);

```

Bladts & Rydbergs pris

```

function[x]=callbr(S0,a,T,r);
global alfa beta delta my;
z=(nigfi(1)-my-r)*T-log(S0/a);
delta=T*delta; m=my; my=0;
p2=quad(@nig,z,1);
beta=beta+1;
p1=quad(@nig,z,1);
beta=beta-1; delta=delta/T; my=m;
x=(S0*p1)-(exp(-r*T)*a*p2);

```

## Referenser

- Barndorff-Nielsen (1995): Normal\Inverse Gaussian Processes and the Modelling of Stock Returns, Research Report 300, Aarhus University
- Björk, Tomas (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, New York
- Bladt, Mogens & Rydberg, Tina Hviid (1997): An Actuarial Approach to Option Pricing under the Physical Measure and without Market Assumptions, Research Report 388, Aarhus University
- Djehiche, Boualem (2000): *Stochastic Calculus An Introduction with Applications*, kompendium KTH Stockholm
- Eberlein, Ernst & Jacod, Jean (1997): "On the range of option prices," *Finance and Stochastics* s 131-140
- Eberlein, Ernst & Keller, Ulrich (1995): "Hyperbolic distributions in finance," *Bernoulli* **1**(3) s 281-299
- Gerber, Hans U. & Shiu, Elias S. W. (1996): "Actuarial bridges to dynamical hedging and option pricing," *Insurance: Mathematics and Economics* 18 s 183-218
- Gut, Allan (1995): *An Intermediate Course in Probability*, Springer-Verlag New York
- Jacod, Jean & Protter, Philip (2000): *Probability Essentials*, Springer-Verlag
- Lebedev, N. N. (1972): *Special functions and their applications*, Dover New York
- Lindgren, Bernard W. (1993): *Statistical Theory*, Chapman&Hall/CRC
- Luenberger, David G. (1998): *Investment Science*, Oxford University Press, New York
- Michael, John R., Schucany, William R. & Haas, R. W. (1976): "Generating Random Variates Using Transformations with Multiple Roots," *The American Statistician* vol 30 no 2 s 88-89
- Rydberg, Tina Hviid (1996): The Normal Inverse Gaussian Lévy Process: Simulation and Approximation, Research Report 344, Aarhus University
- Råde, Lennart & Westergren, Bertil (1998): *Mathematics Handbook for Science and Engineering*, Studentlitteratur Lund