# EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

# الجبر

[æl'dʒæbr]

av

**Pejman Altafi**

2005 - No 13

# الجبر

[æl'dʒæbr]

Pejman Altafi

---

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Paul Vaderlind

2005

**Sammanfattning**

Detta examensarbete ger en kort sammanfattning av den algebra som utvecklades från 700- till 1400-talet i den muslimska världen. Det var muslimska matematiker som fortsatte utvecklingen av grekernas matematik och det är tack vare dessa vetenskapsmän som matematiken är var den är idag. Denna tids vetenskapsmän kom i kontakt med många civilisationer och samlade all den vetenskap som de hittade för att sedan vidareutveckla det och föra det vidare. Till exempel kommer det decimala talsystemet som vi använder idag ursprungligen från Indien. Detta system utvecklades av muslimer och fördes sedan vidare till väst.

# Innehåll

# 1 Förord

Vad hände efter grekernas (matematiska) storhetstid? Vad gjordes inom matematiken under de århundraden som följde? Tog européerna vid precis där grekerna slutade?

Vetenskapen som utvecklades under den islamiska perioden, och då i synnerhet matematiken, lade grunden till mycket av den vetenskap som återfinns i världen idag. Att många är obekanta med denna periods betydelse är bland annat på grund av den felaktiga uppfattningen att muslimska matematiker endast översatte (bevarade, återskapade) de grekiska, indiska och babyloniska verken.

En annan missuppfattning är att alla vetenskapsmän som var verksamma under denna tid var araber och därför kallas ibland ämnet som behandlas i detta arbete felaktigt för "arabisk matematik". Detta beror på att de flesta vetenskapliga verk var skrivna på arabiska, som var den tidens officiella vetenskapliga språk. Faktum är att man lika gärna skulle kunna kalla ämnet för "persisk matematik" med tanke på det stora antalet persiska matematiker. Men båda dessa namn är felaktiga. Ett mer korrekt namn är *muslimsk matematik*, inte för att alla matematiker var muslimer (det fanns bland annat kristna och judiska matematiker), men för att islam hade ett stort inflytande över tidens vetenskapsmän. Ett mycket stort geografiskt område var under muslimsk styre och eftersom islam uppmuntrar sökandet efter kunskap ansågs det fint att ägna sig åt vetenskap.

I samband med islams utveckling till öst och väst i slutet av 600-talet kom muslimerna i kontakt med den utvecklade vetenskapen i andra civilisationer. De tog till sig all den kunskap som fanns och översatte grekiska, indiska och babyloniska verk till arabiska. Det tog inte länge förrän de viktigaste grekiska verken såsom Euklides *Elements* och *Data* och Diophantus *Arithmetica* var tillgängliga på arabiska. Man kan säga att muslimerna samlade all vetenskap, sammansatte det och utvecklade det.

Målet med detta arbete är att ge en sammanfattning av den algebra som utvecklades mellan 700- och 1400-talet i den muslimska världen. Stor vikt kommer att läggas på härledningar och bevis som lades fram av muslimska vetenskapsmän, även om innehållet omfattar korta historiska presentationer som är oundvikliga.

Det är viktigt att komma ihåg att muslimerna under en lång period inte hade matematiska symboler att arbeta med. Symboler började användas mycket sent, kanske i början av 1200-talet, men inte ens då använde alla matematiker symboler. Att allt beskrevs med ord gjorde arbetet mycket mödosamt.

Efter en kort introduktion går vi igenom ämnet aritmetik eftersom det är starkt kopplat till algebra. Som al-Samawal beskriver:

> *Algebra är ämnet som handlar om att manipulera de okända med hjälp av aritmetiska operationer, på samma sätt som aritmetiker manipulerar det kända.*

Sedan fortsätter vi med ämnet algebra och presenterar de viktigaste prestationerna inom bland annat ekvationslösning och kombinatorik.

Till sist måste nämnas att detta arbete ämnar ge en mycket kort sammanfattning av den muslimska algebran. Att kartlägga detta ämne in i minsta detalj i ett examensarbete är helt omöjligt med tanke på dess omfattning. Dessutom kommer många matematiker (några av de framstående) som bidragit till utvecklingen av algebran att utelämnas. Notera också att mycket av det material som har gett oss kunskap om den muslimska matematiken har översatts för inte så länge sedan och det återstår mycket material som ännu inte har översatts.

Jag skulle vilja tacka min handledare Paul Vaderlind för hans tålamod och hjälp under skrivandet av detta examensarbete.

# 2 Inledning

## 2.1 Arabiska ord i matematiken

Ett antal matematiska ord har sitt ursprung i det arabiska språket. Ordet *algebra* kommer från *al-jabr* som troligen först användes av Kharazmi i boktiteln *kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* och hänvisar till operationen att flytta över ett negativt värde från en sida till den andra i en ekvation så att den blir positiv:

$$2x + 1 = 3 - x \Longrightarrow 3x + 1 = 3 \tag{1}$$

*al-muqabala* hänvisar till att subtrahera ett positivt värde från båda sidor av en ekvation:

$$4x = 2x + 5 \Longrightarrow 2x = 5 \tag{2}$$

I en latinsk översättning av Kharazmis aritmetiska verk finns orden *Dixit Algorismi* som betyder *Kharazmi säger*. Ordet algorismi blev så småningom förknippad med aritmetiska operationer och blev slutligen förvandlad till ordet *algorithm*.

## 2.2 Ett inledande exempel

Muslimerna använde i början inga symboler, utan de beskrev allting med ord. Icke-positiva tal var också betydelselösa. Detta ledde till att deras beskrivningar blev mycket omfattande och arbetet mycket ineffektivt.

Kharazmi skulle ha förklarat problemet och lösningen för ekvationen $x^2 + 6x = 55$ på följande sätt:

> *What must be the square which, when increased by six of its own roots, amounts to fifty-five?*
>
> *The solution is this: You halve the number of roots, which in the present instance yields three. This you multiply by itself; the product is nine. Add this to fifty-five; the sum is sixty-four. Now take the root of this which is eight, and subtract from it half the number of the roots, which is five. This is the root of the square which you sought for.*

Med hjälp av moderna beteckningar kan vi förvandla beskrivningen ovan till

$$x = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 55} - \frac{6}{2} = 5 \tag{3}$$

vilket är lösningen till vår ekvation.

## 2.3 Muslimska matematiker

Vi ska nu ge korta biografier av de matematiker som det talas om i detta arbete.

### 2.3.1 Kharazmi, cirka 780-850

Mohammad Ebne Moosa **Kharazmi** är den första kända och förmodligen den viktigaste muslimska matematikern. Vi känner inte till så mycket om hans liv annat än att han var en av de första aktiva vetenskapsmännen i *bayt al-hikma* (Visdomens hus) i Bagdad. Utöver matematik var Kharazmi verksam inom astronomi och geografi. Han konstruerade en världskarta som visade den geografiska läget för hav, öar och städer och som bland annat var ämnat att användas av härskare som ville få sig en uppfattning om det område som de styrde.

För mer om Kharazmi, se avsnitt 4.3.

### 2.3.2 ibn Turk, cirka 800-talet

Abd al-Hamid ibn Wasi **ibn Turk** al-Jili levde och verkade under samma period som Kharazmi. Han skrev boken *kitab al-jabr wa'l muqabala* (Boken om beräkning med återställande och reduktion). Utöver detta vet vi inte mycket om honom.

### 2.3.3 al-Uqlidisi, cirka 920-980

Det vi känner till om aritmetikern Abu al-Hasan Ahmad-ibn Ibrahim **al-Uqlidisi** är från två av hans böcker. *kitab al-fusul fi-l-hisab al-hindi* (Boken om kapitel i indisk aritmetik), som han skrev år 952 i Damaskus, är den äldsta bevarade arabiska boken som behandlar aritmetik.

### 2.3.4 Karaji, cirka 953-1029

Vi vet att Ebne Hossein **Karaji** levde i Baghdad under största delen av sitt liv. Hans namn visar att han eller hans föräldrar kom från staden Karaj i Iran. Karajis främsta arbete var inom algebra där han anses vara den som totalt frigjorde algebran från geometri, bland annat genom att introducera symboler. Han var också verksam inom geometri.

### 2.3.5 Khayyam, 1048-1131

Matematikern, poeten, filosofen och astronomen Hakim Omar **Khayyam** är utan tvekan den mest kända muslimska matematikern i väst. Dock är det inte främst hans matematiska verk utan hans poesi och då speciellt *roba'iyyat* som har gjort honom känd i väst. Också i sitt hemland, Iran, är han mer känd som poet än som matematiker. Men han är utan tvekan en av de största muslimska matematikerna och hans behandling av kubiska ekvationer är en mycket stor prestation.

Khayyam föddes i staden Neyshabpur i Iran under en tid då Iran var ockuperat av Seljukerna. I sitt algebraiska verk har han förklarat svårigheterna för honom att forska och han tackar abu-Tahir som gav honom stöd när han år 1070 flyttade till Samarkand:

> *I had not been able to find time to complete this work, or to concentrate my thoughts on it, hindered as I had been by troublesome obstacles . . . Most of our contemporaries are pseudo-scientists who mingle truth with falsehood, who are not above deceit and pedantry, and who use the little that they know of the sciences for base material purposes only. When they see a distinguished man intent on seeking the truth, one who prefers honesty and does his best to reject falsehood and lies, avoiding hypocrisy and treachery, they despise him and make fun of him. When God favored me with the intimate friendship of His Excellency, our glorious and unique Lord, the supreme judge, the Imam, Sayid abu-Tahir . . . after I had despaired of meeting such a man . . . who combined in himself profound power in science with firmness of action . . . my heart was greatly rejoiced to see him . . . My power was strengthened by*

> *his liberality and his favors. In order that I might come nearer to his sublimed position I found myself obliged to take up again the work which the vicissitudes of time had caused me to abandon in summarizing what I had verified of the essence of philosophical theories.*

I mitten av 1070-talet erbjöd Malik-Shah Khayyam att sätta upp ett observatorium i Esfahan. Han accepterade erbjudandet vilket ledde till att Khayyam under 18 år tillsammans med stora astronomer producerade viktiga astronomiska resultat. Khayyam beräknade bland annat årets längd till 365,24219858156 dagar. Resultatet är anmärkningsvärt dels på grund av antalet decimaler vilket visar ambitionsnivån men också för att resultatet är mycket exakt fram till fem decimaler.

Maktskifte i Iran år 1092 medförde att alla finansiella medel till observatoriet i Esfahan upphörde och därmed blev Khayyam tvungen att avsluta sina astronomiska studier. Men han gav inte upp forskningen. Senare arbetade han med sin mest anmärkningsvärda bidrag till matematiken, det vill säga klassificeringen av kubiska ekvationer.

### 2.3.6 al-Samawal, cirka 1125-1174

**al-Samawal** ibn Yahya ibn Yahuda al-Maghribi föddes i Baghdad av judiska föräldrar. När han var 13 år började han sina studier i matematik och det tog inte lång tid innan han bemästrade all den matematiska kunskap som fanns vid den tiden. Han började studera tidigare muslimska matematikers verk på egen hand. Mest imponerad var han av Karajis arbete inom matematik men han tyckte inte att det var helt komplett. Vid 19 års ålder skrev han sitt stora matematiska verk *al-bahir fi al-jabr* (Det strålande i algebran).

När han var omkring 40 år konverterade al-Samawal till islam. Mycket av det vi vet om honom är tack vare den självbiografi som han skrev, där han bland annat berättar varför han konverterade.

al-Samawal var också kunnig i medicin och han skrev bland annat boken *The Companion's Promenade in the Garden of Love* som bland annat innehöll erotiska berättelser. Hans kur mot depression är:

> *. . . well-lighted houses, the sight of running water and verdure, warm baths and music.*

### 2.3.7 Tusi, cirka 1135-1213

Väldigt lite är känt om Sharafeddin Mozaffar **Tusi**. Vi vet att han var född i Tus, som idag ligger i nordöstra Iran. Vi vet också att han arbetade som lärare i flera delar av den muslimska världen, bland annat Damaskus, Aleppo (i Syrien) och Bagdad.

Tusi uppfann det linjära astrolabiumet som användes för att bestämma en himlakropps position.

### 2.3.8 ibn Mun'im, 1200-talet

Vi vet mycket lite om Ahmad al-Abdari **ibn Mun'im**. Han levde och verkade med stor sannolikhet i Marrakech under härskaren Ya'kub al-Nasir. Förutom det är det inte mycket information om hans liv som har kommit fram till oss.

### 2.3.9 Kashi, cirka 1380-1429

Mycket av det vi vet om Ghiaseddin Jamshid **Kashi** beror på att han noterade det exakta datum då han avslutade sina verk. Han föddes i Kashan i centrala Iran. Kashi växte upp i en period av fattigdom som orsakades av Timurs erövring av stora regioner, däribland Iran. Han studerade matematik och astronomi samtidigt som han flyttade runt till olika städer. Efter Timurs död tog hans son Shahrokh över makten i Iran och ekonomin började blomstra. Konst och vetenskap blev viktigare och vetenskapsmän blev högt ansedda. Med den nya atmosfären förbättrades också Kashis liv markant.

Omkring år 1420 öppnade Samarkands dåvarande härskare Ulug Beg (Shahrokhs son) ett universitet för teologiska och vetenskapliga studier. Han bjöd Kashi till detta universitet för att studera.

Bland Kashis mest anmärkningsvärda prestationer är hans approximation för $2\pi$ vilket han gav med 16 decimalers noggrannhet. För att uppnå denna precision beräknade han omkretsen av en inskriven och en omskriven polygon på 805306368 sidor. Innan han återger lösningen bestämmer han sig för hur noggrant svaret ska vara och sedan utför han beräkningarna på ett sätt så att felen i approximationerna inte ska påverka det slutliga resultatets precision. Kashi ambition är att noggrannheten i beräkningarna ska vara så stor att när resultatet används för att beräkna "universums omkrets" så ska felet inte vara större än bredden på en hästs hårstrå.

Kashis viktigaste verk är boken *The Key to Arithmetic* som var ämnat för att undervisa studenter som bland annat läste astronomi, arkitektur och redovisning.

Kashi var utan tvekan en av de största vetenskapsmännen i sin tid. Efter Kashis död beskrev Ulug Beg honom som:

> *. . . a remarkable scientist, one of the most famous in the world, who had a perfect command of the science of the ancients, who contributed to its development, and who could solve the most difficult problems.*

# 3 Aritmetik

## 3.1 Sammanfattning

Den första boken från den muslimska världen som behandlar aritmetik är *kitab al-jam wal-tafriq bi hisab al-hind* (Boken om addition och subtraktion i indisk aritmetik), skriven av Kharazmi. I denna bok introducerar han 9 symboler för de första 9 talen och en cirkel för att representera en tom plats. Han visar hur man skriver ett tal i det decimala talsystemet och fortsätter med att ge algoritmer för de fyra räknesätten samt halvering, dubblering och beräkning av kvadratrötter. Kharazmi visar också att man kan kontrollera sina beräkningar med hjälp av *regeln att kasta bort nior*.

Under år 952 skrev al-Uqlidisi boken *kitab al-fusul fi-l-hisab al-hindi* (Boken om kapitel i indisk aritmetik). Boken kompletterade Kharazmis verk på flera sätt, bland annat genom att behandla decimalbråk. al-Uqlidisi sammanfattade också metoder för att utföra operationer på papper istället för sandtavla. Han ger anledningen till att man kommer att överge sandtavlan för papper och penna som följande:

> *Many a man hates to show the dust board in his hands when he needs to use this art of calculation for fear of misunderstanding from those present who see it in his hands. It is unbecoming him since it is seen in the hands of the good-for-nothings earning their living by astrology in the streets.*

Dock var inte verket helt komplett eftersom al-Uqlidisi endast behandlade division med 2 och 10.

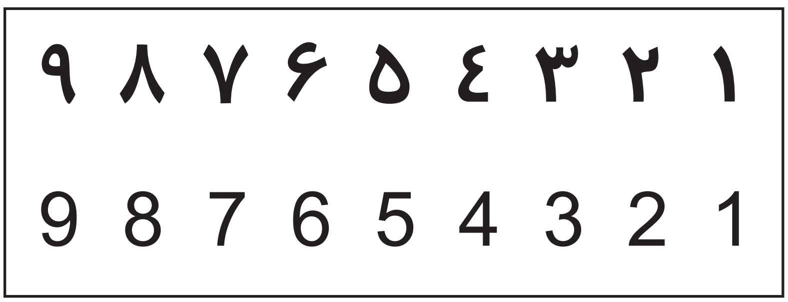
Däremot behandlade al-Samawal bråkdelar i sin bok *Treatise on Arithmetic* på ett mer utförligt sätt. Som exempel dividerade han 210 med 13 och visade att detta inte går jämnt ut, men att det kan utföras hur långt som helst.

Men arbetet var inte helt utfört förrän Kashi, i sin bok *The Key to Arithmetic* visade en total förståelse för bråkdelar och införde beteckningar för att representera tal med decimaldel. Kashi använde en vertikal linje för skilja åt heltalsdelen från decimaldelen i ett tal.

## 3.2 Det decimala talsystemet

Under den islamiska matematikens tid användes tre olika talsystem. Den första var *fingeruppräkning* vilket användes av affärsmän. Den andra var det *sexagesimala systemet* som kom från babylonierna. Att detta system var i basen 60 gjorde det enkelt att göra trigonometriska beräkningar. Därför användes det sexagesimala talsystemet inom astronomin. Det tredje var det *indiska talsystemet* eller det *decimala positionssystemet* som så småningom utvecklades till det system som vi använder idag.

I den översta raden i figur 1 ser vi de arabiska siffrorna som används idag. Man kan klart se liknelser mellan dessa och de latinska siffrorna, exempelvis genom att rotera tvåan eller sjuan 90 grader moturs.




Figur 1

Det *decimala talsystemet* som vi använder idag är ett *positionssystem* med bas 10. Ett positionssystem är ett talsystem där varje siffras position talar om dess värde. Till exempel för att räkna ut vilket värde 329 representerar tar man varje siffra och multiplicerar med en potens av 10 beroende på siffrans plats och adderar resultaten:

$$329 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^0 \tag{4}$$

Detta talsystem har sina rötter i Indien. Efter Islams födelse i mellanöstern hade muslimerna ambitionen att sprida sin religion till resten av världen. De kom då i kontakt med andra civilisationer och på så sätt tog de till sig många vetenskapliga verktyg såsom det decimala talsystemet. I Europa dök detta system först upp i Spanien (där muslimerna hade stor framfart). Det tog dock många år innan västvärlden började använda det decimala talsystemet. Från början ville man inte ändra på sitt eget system men allteftersom insåg man fördelen med det decimala talsystemet. Beräkningar blev mycket enklare och effektivare. Dessutom behövde man endast tio symboler. Med det gamla systemet måste man definiera många symboler för att representera stora tal.

al-Uqlidisi berättar varför det decimala systemet slutligen kommer att segra:

> *Most scribes will have to use it because it is easy, quick, and needs little precaution, little time to get the answer, and little keeping of the heart busy with the working that he has to see between his hands, to the extent that if he talks, that will not spoil his work; and if he leaves it and busies himself with something else, when he returns back to it, he will find it the same and thus proceed, saving the trouble of memorizing it and keeping the heart busy with it. Most calculators will have to use it with numbers that cannot be managed by the hand because they are big.*

## 3.3 Regeln att kasta bort nior

För att kontrollräkna utförande av fördubbling och multiplikation presenterade Kharazmi *regeln att kasta bort nior*. Nedan följer regeln för multiplikation:

> *Dividera det första talet med nio och behåll det som blir kvar mindre än nio. Dela sedan det andra med nio och behåll det som blir kvar. Multiplicera sedan det som har blivit kvar av det första talet med det som har blivit kvar av det andra talet och kasta bort nio, om det finns i detta. Om nio inte finns i det, så är detta tecknet. Om emellertid nio finns i det, så kasta bort nio och behåll det som blir kvar, så är detta tecknet. Multiplicera sedan ditt tal och dela det du får med nio, och om det som blir kvar är lika med tecknet, så har du funnit rätt tal.*

**Exempel 1.** *Vi ska kontrollera om* $15 \cdot 40 = 600$.

$$\begin{cases} 15 = 6 \mod 9 \\ \\ 40 = 4 \mod 9 \end{cases} \Longrightarrow 6 \cdot 4 = 24 = 6 \mod 9 \tag{5}$$

*Men* $600 = 6 \mod 9$. *Det stämmer alltså.*

Det som Kharazmi inte nämner är att regeln att kasta bort nior endast är ett *nödvändigt* villkor.

al-Uqlidisi behandlar också regeln att kasta bort nior, men med två kompletteringar. För det första nämner han att regeln ger ett *nödvändigt* villkor. För det andra visar han att resten av ett tal dividerat med nio inte ändras om man kastar om siffrorna i talet, utan resten är lika med summan av alla siffrorna i talet, eventuellt reducerad med nio ett antal gånger.

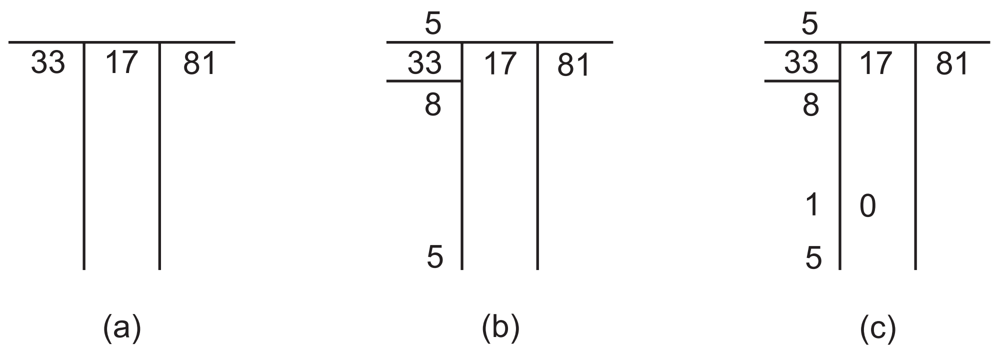
## 3.4 Rötter

I den här delen visar vi exempel på beräkningar av kvadratrötter och högre rötter enligt Kashis bok *The Key to Arithmetic*. Kashi var inte den första att utföra sådana beräkningar men hans text är den som är helt bevarad och därför ska vi presentera hans beräkningar.

### 3.4.1 Kvadratrötter

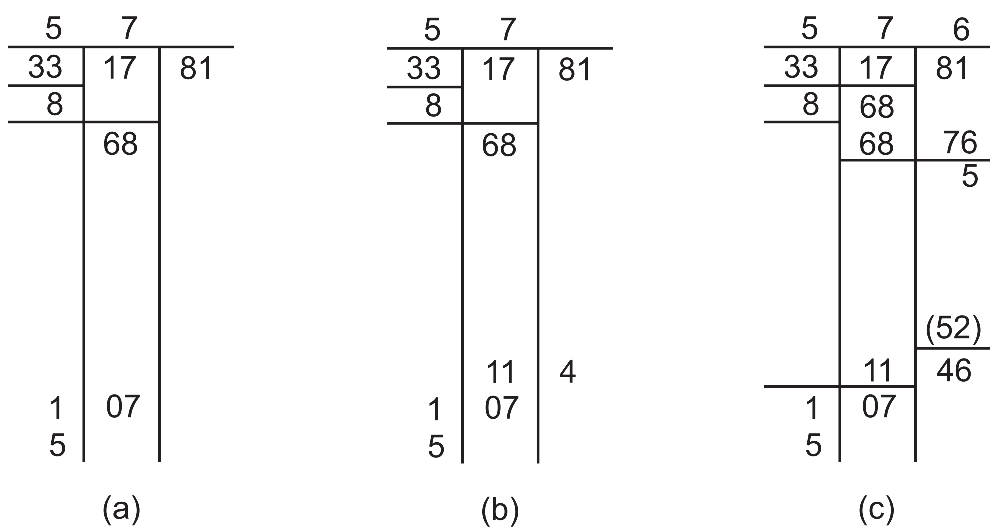
Vi ska nu gå igenom Kashis beräkning av kvadratrötter. Han beräknar kvadratroten av 331781 genom att dela talet i par, det vill säga 33, 17 och 81 vilket han kallar för "cykler". Detta förklarar han med att talen 1, 100, 10000, ... har heltalsrötter. Alltså står talen 81, 17 och 33 för antalet heltal, hundratal respektive tiotusental. Han drar en linje över talet och mellan cyklerna (figur 2(a)).

För att hitta rotens första siffra söker han det största heltal $n$ så att $n^2 \leq 33$. Det är $n = 5$ vilket han skriver både ovanpå och en bit under 33 (figur 2(b)). Nu subtraherar han 25 från 33 och får 8 vilket han skriver under 33. Sedan dubblerar han den delen av roten som han hittade, det vill säga 5, och skriver resultatet (10) ovanför 5 (figur 2(c)). Nästa steg är att hitta $x$ så att $(100 + x) \cdot x \leq 817$. Test visar att $x = 7$, och han skriver detta ovanför 17 och




Figur 2

bredvid 10 längst ner. Sedan beräknar han $(100+7)\cdot 7 = 749$, subtraherar det från 817 och skriver ner resultatet 68 (figur 3(a)). Han fördubblar den sista siffran i 107 och får 114 vilket han skriver ovanför 107 med en förflyttning ett steg till höger (figur 3(b)). Observera svaret 57 och det dubbla 114 längst ner.




Figur 3

Han vill nu hitta $x$ så att $(1140 + x) \cdot x \leq 6881$. Efter test kommer han fram till att $x = 6$. Han beräknar $6881 - 1146 \cdot 6 = 5$ och fördubblar den sista siffran i 1146 för att få 1152 (figur 3(c)). Således finner han den ungefärliga kvadratroten 576 och dess dubbla värde 1152. I nästa steg ökar han 1152 med

1 och får 1153. Sedan delar han resten 5 med 1153 för att få det ungefärliga svaret $576\frac{5}{1153}$. Kvadrering av detta värde ger svaret 331780.996 vilket visar att våra beräkningar ovan resulterar i ett svar med ett litet fel.

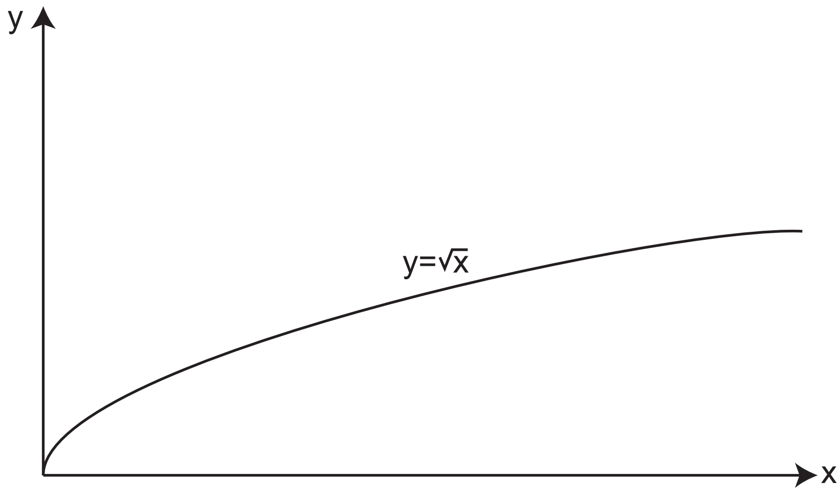
Vi ska nu visa varför den ovanstående metoden ger ett (ganska) korrekt svar. När vi ska beräkna heltalsdelen av talet $N = abcdef$ så vet vi att det största heltalet $r$ så att $r^2 \leq N$ består av hälften så många siffror som $N$, i detta fall tre siffror. Det är just därför som vi delar $N$ is cykler. När det gäller decimaldelen så använder vi oss egentligen av "linjär interpolation". I kvoten $\frac{5}{1153}$ är $5 = 331781 - (576)^2$ och $1153 = 1 + 2 \cdot 576 = (1 + 576)^2 - 576^2 = 577^2 - 576^2$. Alltså, för att ta reda på decimaldelen av svaret behöver vi endast använda oss av linjär interpolation en teknik som var känt sedan långt tidigare. Vi kan tänka oss en tabell som i figur 4.

| N | √N |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 4 | 2 |
| ....... | ....... |
| 331776 | 576 |
| 332929 | 577 |
| ....... | ....... |
| 1000000 | 1000 |

Figur 4

Så, för att hitta $\sqrt{2}$, ser vi att $1 < 2 < 4$ vilket medför att $1 < \sqrt{2} < 2$. Vidare har vi att $2-1 = 1$ och $4-1 = 3$. Därför ligger 2, $\frac{1}{3}$ från 1. Alltså är $\sqrt{2} = 1\frac{1}{3}$.

Som vi ser är beräkningen baserat på att $\sqrt{x}$ är proportionellt i förhållande till $x$ vilket betyder att grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är en rät linje. Även om detta är inkorrekt så kan vi se att felet inte blir så stort eftersom denna graf är ungefär linjär för $x > 1$ (figur 5).




Figur 5

### 3.4.2 Högre rötter

Vi ska nu visa hur Kashi approximerade femteroten av $N = 44240899506197$. Precis som i fallet med kvadratrötter börjar han med att dela in talet i cykler, men denna gång i cykler om fem tal från höger. Detta gör han eftersom potenser av 10 vars femterötter är heltal är $1, 10^5, 10^{10}, \ldots$. Han ställer upp dessa cykler i en tabell som illustreras i figur 6.

Kashi fortsätter nu med att hitta det största heltal, $a$, så att $a^5 < 4424$. Detta ger att $a = 5$. Så han sätter talet 5 i Resultatraden över den första cykeln och i rotraden. Han sätter talen $5^2$, $5^3$ och $5^4$ i kvadratraden, kubraden respektive kvadrat-kvadratraden. Till sist sätter han $4424 - 5^5 = 1299$ i talraden. Detta tal representerar $1299 \cdot 10^{10}$.

Nu startar han processen som kallas "en gång upp till kvadrat-kvadratraden", genom att addera det senast insatta talet i rotraden, det vill säga 5, till det senast erhållna rotsiffran, det vill säga 5, och skriva summan, det vill säga 10, i rotraden ovanför 5. Han multiplicerar summan med 5 och sätter produkten, $10 \cdot 5$, över $5^2$ i kvadratraden och adderar båda för att få $75 = 5^2 + 50$. Summan multiplicerar han med 5 och lägger produkten $75 \cdot 5$ över $5^3$ i kubraden. Återigen adderar han dessa och får $500 = 5^3 + 75 \cdot 5$. Sedan multiplicerar han summan med 5 och sätter $500 \cdot 5$ över $5^4$ i kvadrat-kvadratraden. Till sist adderar han dessa för att få $3125 = 5^4 + 500 \cdot 5$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Resultatraden | | | |
| Talraden | 4 4 2 4 | 0 8 9 9 5 | 0 6 1 9 7 |
| Kvadrat-kvadratraden<br>Raden av det andra av talet | | | |
| Kubraden<br>Raden av det tredje av talet | | | |
| Kvadratraden<br>Raden av det fjärde av talet | | | |
| Rotraden<br>Raden av det femte av raden | | | |

Figur 6

Nu börjar han med 10 i rotraden och repeterar processen ovan ända till kubraden. Sedan börjar han med 15 och repeterar processen ända till kvadratraden. Till sist sätter han $20 + 5 = 25$ i rotraden.

Alltså har han fått fram alla tal i den första kolumnen. Han flyttar nu 3125 en plats, 1250 två platser, 250 tre platser och 25 fyra platser till höger, och han sätter 25 längst ner i nästa kolumn (under cykeln 08995) som i figur 7. Nu söker han $b$ så att

$$f(b) = b((((250b + b^2) + 250 \cdot 10^2)b + 1250 \cdot 10^3)b + 3125 \cdot 10^4) \\ \leq 129908995 = D \qquad (6)$$

Eftersom $f(4) = 146665024 > D$ och $f(3) = 105695493 < D$ så kommer Kashi fram till att $b = 3$. Nu ser han att $530^5 < N$ och $540^5 > N$ och därför har Kashi hittat den andra siffran i svaret.

Vi ska nu göra ett kort avbrott i beräkningarna för att se varför denna metod leder till det en korrekt approximation. Låt binomialkoefficienten $C_k^n$ (se vidare kapitel 4.7) stå för antalet sätt att välja $k$ saker från en mängd av $n$ saker ($k < n$). Binomialsatsen för grad två blir då

| | | | |
|---|---|---|---|
| Resultatraden | 5 | | |
| Talraden | 4 4 2 4<br>3 1 2 5<br>1 2 9 9 | 0 8 9 9 5<br>= D | 0 6 1 9 7 |
| Kvadrat-kvadratraden<br>Raden av det andra av talet | 3 1 2<br>3 1 2 5<br>2 5 0 0<br>6 2 5 | 5<br>Sista steget upp till kvadrat-kvadratraden | |
| Kubraden<br>Raden av det tredje av talet | 1 2<br>1 2 5 0<br>7 5 0<br>5 0 0<br>3 7 5<br>1 2 5 | 5 0<br>Tredje steget upp till kvadrat-kvadratraden | |
| Kvadratraden<br>Raden av det fjärde av talet | 2 5 0<br>1 0 0<br>1 5 0<br>7 5<br>7 5<br>5 0<br>2 5 | 2 5 0<br>Andra steget upp till kvadrat-kvadratraden | |
| Rotraden<br>Raden av det femte av raden | 2 5<br>2 0<br>1 5<br>1 0<br>5 | Andra steget upp till kvadrat-kvadratraden<br>2 5 | |

Figur 7

$$(A+B)^2 - A^2 = (C_2^2 B + C_1^2 A)B \tag{7}$$

På samma har vi för grad fem att

$$\begin{gathered}(A+B)^5 - A^5 = \\ ((((C_5^5 B + C_4^5 A)B + C_3^5 A^2)B + C_2^5 A^3)B + C_1^5 A^4)B\end{gathered} \tag{8}$$

I detta fall är $A = 5 \cdot 10^2$ och $B = b \cdot 10$. Sätter vi in dessa värden i ekvation

8 så blir den lika med

$$10^5((((b+\mathbf{25}\cdot 10)b+\mathbf{250}\cdot 10^2)b+\mathbf{1250}\cdot 10^3)b+\mathbf{3125}\cdot 10^4)b \tag{9}$$

Observera att talen i fetstil stämmer överens med funktionen $f(b)$. Alltså genererar Kashis teknik binomialkoefficienter, i detta fall binomialkoefficienterna $C_1^5$, $C_2^5$, $C_3^5$, $C_4^5$. Med hjälp av dessa koefficienter erhålls sedan

$$\begin{cases} 5^1 \cdot C_1^5 = 25 \\ 5^2 \cdot C_2^5 = 250 \\ 5^3 \cdot C_3^5 = 1250 \\ 5^4 \cdot C_4^5 = 3125 \end{cases} \tag{10}$$

Men fortfarande är det inte dessa tal som Kashi räknar med utan

$$\begin{cases} 25 \cdot 10^6 \\ 250 \cdot 10^7 \\ 1250 \cdot 10^8 \\ 3125 \cdot 10^9 \end{cases} \tag{11}$$

Det är just därför som Kashi förflyttar 25, 250, 1250 och 3125 fyra, tre, två respektive en plats till höger.

Vi återgår nu till beräkningarna. Det som följer är illustrerat i figur 8. Kashi placerar siffran 3 ($b=3$) i resultatraden och i rotraden bredvid 25 (för att bilda talet 253). Han beräknar $253 \cdot 3 = 759$ som han sätter ovanför 25000. Han adderar dessa två tal för att få 25759. Detta multiplicerar han med 3 och skriver resultatet 77277 ovanför 1250000 i kvadratraden. Han adderar 77277 till 1250000 för att få 1327277. Han multiplicerar detta med 3 och adderar resultatet, 3981831, med 31250000 i kvadrat-kvadratraden. Summan 35231831 multiplicerar han till sist med 3 och subtraherar resultatet, 105695493, från 129908995 i talraden. Han har hittat $D' = D - 3$.

Kashi startar nu processen "en gång upp till kvadrat-kvadratraden" på liknande sätt som tidigare. (Han sätter 253+3=256 och $256 \cdot 3 = 768 \ldots$). Nu börjar han med 256 i rotraden och repeterar processen ända upp till kubraden. Samma procedur gäller upp till kvadratraden med start i 259. Till sist sätter han 265 (= 262 + 3) i rotraden. Han flyttar sedan de översta talen i varje rad så att de ska representera konstanterna i polynomet:

$$g(c) = ((((2650c + c^2) + 28090 \cdot 10^2)c + 1488770 \cdot 10^3)c + 39452405 \cdot 10^4)c \quad (12)$$

| Resultatraden | 5 | 3 | |
|---|---|---|---|
| Talraden | 1 2 9 9<br>1 0 5 6<br>2 4 3 | 0 8 9 9 5<br>9 5 4 9 3 = $f$ (3)<br>1 3 5 0 2 = $D'$ | 0 6 1 9 7 |
| Kvadrat-kvadratraden<br>Raden av det andra av talet | 3 9<br>3 9 4<br>4 2<br>3 5 2<br>3 9<br>3 1 2 | 4 5 2 4 0<br>5 2 4 0 5<br>2 0 5 7 4<br>3 1 8 3 1<br>8 1 8 3 1<br>5<br>Fjärde steget för beräkning av $f$ (3) | 5 |
| Kubraden<br>Raden av det tredje av talet | 1 4<br>1 4<br>1 3<br>1 2 | 1 4 8 8 7<br>8 8 7 7 0<br>8 1 9 1 2<br>0 6 8 5 8<br>7 9 5 8 1<br>2 7 2 7 7<br>7 7 2 7 7<br>5 0<br>Tredje steget för beräkning av $f$ (3) | 7 0 |
| Kvadratraden<br>Raden av det fjärde av talet | | 2 8<br>2 8 0 9 0<br>7 8 6<br>2 7 3 0 4<br>7 7 7<br>2 6 5 2 7<br>7 6 8<br>2 5 7 5 9<br>7 5 9<br>2 5 0<br>Andra steget för beräkning av $f$ (3) | 0 9 0 |
| Rotraden<br>Raden av det femte av raden | | 2 6 5<br>2 6 2<br>2 5 9<br>2 5 6<br>2 5 3<br>Första steget för beräkning av $f$ (3) | 2 6 5 |

Figur 8

Siffran $c$ måste uppfylla exakt samma villkor som siffran $b$, vilket är att det ska vara den största siffran så att $g(c)$ inte är större än $24213502 \cdot 10^5$. Kashi hittar $c = 6$. I figur 9 visas beräkningen av $g(c)$ av det som står inuti klamrarna. $D''$ står för en sista differensen. För tredje gången startar han processen “en gång upp till kvadrat-kvadratraden”. Kommande steg motsvarar det som vi har gått igenom tidigare.

| Resultatraden | 5 | 3 | 6 | |
|---|---|---|---|---|
| Talraden | 242 | 13502 | 06197 | |
| | 242 | 13502 | 06176 | |
| | | | 21 | = D″ |
| Kvadrat-kvadratraden | 41 | 26949 | 58080 | Sista steget upp till kvadrat-kvadratraden |
| | | 91365 | 90384 | |
| Raden av det andra av talet | 40 | 35583 | 67696 | Summan av de två raderna under |
| | | 90343 | 17696 | |
| | 39 | 45240 | 5 | x 6 |
| Kubraden | | 15399 | 06560 | Sista steget upp till kubraden |
| | | 171 | 41496 | |
| Raden av det tredje av talet | | 15227 | 65064 | Tredje steget upp till kvadrat-kvadratraden |
| | | 170 | 45448 | |
| | | 15057 | 19616 | Summan av de två raderna under |
| | | 169 | 49616 | |
| | | 14887 | 70 | x 6 |
| Kvadratraden | | 28 | 72960 | |
| | | | 16044 | |
| Raden av det fjärde av talet | | 28 | 56916 | Andra steget upp till kubraden |
| | | | 16008 | |
| | | 28 | 40908 | Andra steget upp till kvadrat-kvadratraden |
| | | | 15972 | |
| | | 28 | 24936 | Summan av de två raderna under |
| | | | 15936 | |
| | | 28 | 090 | |
| Rotraden | | | 2680 | x 6 |
| | | | 2674 | |
| Raden av det femte av raden | | | 2668 | Första steget upp till kubraden |
| | | | 2662 | Första steget upp till kvadrat-kvadratraden |
| | | | {2656 | Påbörja beräkning av $g(c)$ |

Figur 9

Nästa steg för Kashi är att beräkna decimaldelen. Han adderar de översta talen i varje rad (figur 9) och ökar resultatet med 1:

$$\begin{array}{rr} & 412694958080 \\ & 1539906560 \\ & 2872960 \\ & 2680 \\ + & 1 \\ \hline & 414237740281 \end{array} \tag{13}$$

Sedan säger han att femteroten av talet ifråga är

$$536 + \frac{21}{414237740281} \tag{14}$$

För att hitta decimaldelen använder Kashi approximationen

$$(n^k + r)^{1/k} = n + \frac{r}{(n+1)^k - n^k} \tag{15}$$

Explicit räknar han ut

$$(n+1)^k - n^k = C_1^n \cdot n^{(k-1)} + C_2^n \cdot n^{k-2} + \ldots + 1 \tag{16}$$

Detta är linjär interpolation som vi har diskuterat tidigare. Därför att $n^k + r$ är $r$ enheter av det totala $(n+1)^k - n^k$ enheter mellan två efterföljande $k$:te-potenser. Alltså sätter linjär interpolation den $k$:te roten, $(n+r)^{1/k}$, $r/[(n+1)^k - n^k]$ av vägen mellan de två $k$:te-rötterna $n$ och $n+1$.

# 4 Algebra

## 4.1 Sammanfattning

Eftersom alla koefficienter som behandlades av muslimska matematiker var positiva definierade de olika klasser av ekvationer för andra- respektive tredjegradsekvationer. I detta kapitel summerar vi de olika typer av ekvationer som Kharazmi (andragradsekvationer) och Khayyam (tredjegradsekvationer) behandlade. Sedan visar vi hur al-Samawal använde sig av induktionsbevis. Till sist ger vi en kort introduktion till ämnet kombinatorik under den muslimska tiden.

## 4.2 Vad är algebra?

Al-Samawal var den första som gav en exakt beskrivning av ämnet algebra:

> *Algebra är ämnet som handlar om att manipulera de okända med hjälp av aritmetiska operationer, på samma sätt som aritmetiker manipulerar det kända.*

Denna beskrivning kom cirka två århundraden efter att Karaji helt hade separerat algebra från geometri. Man brukar kalla detta för *aritmetisering av algebra*. Karaji åstadkom detta genom att ersätta geometriska operationer (som algebra dittills hade varit beroende av) med operationer av en aritmetisk natur. Han presenterade också monomialerna, $x^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) och återgav regler för addition, subtraktion, multiplikation och division av två godtyckliga monomialer.

Karaji visade att följden av monomialer kan utvecklas hur långt som helst genom att ge den rekursiva definitionen:

> *Know that the ratio of part of a thing to part of a square, is like the ratio of part of a square to part of a cube, is like the ratio of part of a cube to part of a square-square, is like the ratio of part of a square-square to part of a square-cube, and therefore the proportion of parts continues to infinity in accordance with this rule.*

Med dagens symboler skulle Karajis ord översättas till:

$$\frac{1}{x} \div \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \div \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} \div \frac{1}{x^4} = \dots \tag{17}$$

Karaji gav en liknande definition för $x^k$ för positiva $k$ som med dagens beteckning skulle lyda:

$$\frac{x}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{x^3}{x^4} = \dots \tag{18}$$

Med andra ord visade Karaji att man kan få $x^k$ om man multiplicerar den förra monomialen $x^{k-1}$ med $x$.

## 4.3 Algebrans fader

Den första kända matematikern i den muslimska världen, var Kharazmi. Han var verksam i början av 800-talet och utförde sitt arbete i *bayt al-hikma* (Visdomens hus) i Bagdad, en institution där tidens vetenskapsmän kunde ägna sig åt översättning av gamla verk (från Grekland, Babylonien, Indien, ...), och egen forskning.

Kharazmis arbete omfattar aritmetik, algebra, trigonometri, astronomi och geografi (han utvecklade bland annat en karta över den muslimska världen). Hans två mest kända böcker är *kitab al-jam wal-tafriq bi hisab al-hind* (Boken om addition och subtraktion enligt indisk beräkning) i aritmetik och *kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* (Den korta boken om beräkning med återställande och reduktion) i algebra.

I sina matematiska verk framgår det klart att Kharazmi var intresserad av att lösa praktiska problem. Tydligen ville han utveckla en handbok som vanligt folk hade användning av (kanske är det därför som han och hans efterträdare inte behandlade icke-positiva tal i sina problem). Trots detta, gav han geometriska bevis för alla algebraiska utföranden.

Kharazmi introducerade den gamla matematiken från Grekland och Indien till den muslimska världen och grundlade den flera hundra år långa utvecklingen av matematik som följde.

## 4.4 Andragradsekvationer

I sin klassifiering av ekvationer behandlade Kharazmi tre olika storheter; *kvadraten* ($x^2$), *roten* av kvadraten($x$), och de absoluta *talen*. Han insåg att det finns sex typer av ekvationer:

$$
\begin{array}{lll}
(i) & \text{Kvadrater lika med rötter,} & ax^2 = bx \\
(ii) & \text{Kvadrater lika med tal,} & ax^2 = c \\
(iii) & \text{Rötter lika med tal,} & bx = c \\
(iv) & \text{Kvadrater och rötter lika med tal,} & ax^2 + bx = c \\
(v) & \text{Kvadrater och tal lika med rötter,} & ax^2 + c = bx \\
(vi) & \text{Rötter och tal lika med kvadrater,} & bx + c = ax^2
\end{array}
\tag{19}
$$

Anledningen till att Kharazmi delade andragradsekvationer i ovanstående sex klasser är att han (liksom de flesta efterföljande muslimska matematikerna) endast behandlade positiva tal. I ekvationerna ovan är alla koefficienter och rötter positiva. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ skulle vara betydelselös och felaktig för Kharazmi eftersom den alltid skulle sakna positiva rötter ($a, b$ och $c$ är ju positiva).

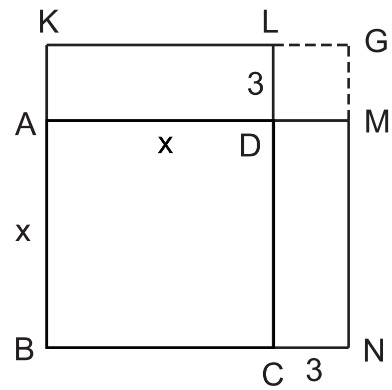
Nedan kommer vi att gå igenom bevisen för ekvationerna av typ ($iv$) och ($v$).

### 4.4.1 $ax^2 + bx = c$

I avsnitt 2.2 såg vi hur lösningen till ett problem av typ ($iv$) presenterades av Kharazmi.

Han kommer fram till denna lösning med hjälp av geometri. I figur 10 representeras $x^2$ av arean av kvadraten $ABCD$. Summan av arean av de båda rektanglarna $AKLD$ och $CDMN$ representerar $6x$. Summan av dessa tre blir 55. Men den lilla kvadraten $DLGM$ har ju arean $3 \times 3 = 9$. Alltså har hela figuren arean $9 + 55 = 64$. Samtidigt är $\sqrt{64} = 8$ längden av sidan av hela figuren, det vill säga, $x + 3 = 8$. Alltså är $x = 3$.

Kharazmi gav metoder för att komma fram till lösningen, steg för steg med hjälp av exempel.




Figur 10

#### 4.4.2 $ax^2 + c = bx$

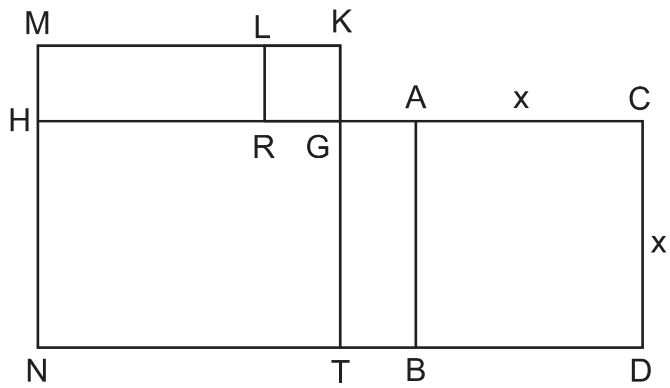
Vi kommer att behandla det speciella fallet där $a = 1$. Kharazmis ordagranna lösning kan översättas till

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}^2\right) - c}. \tag{20}$$

vilket visar att han var kapabel att hitta två rötter till denna ekvation, åtminstone numeriskt. Han ger också villkoret för lösning:

> *If the product [of half the number of roots with itself ] is less than the number connected with the square, then the instance is impossible; but if the product is equal to the number itself, then the root of the square is equal to half the number of roots alone, without either addition or subtraction.*

Det geometriska beviset för ekvation av typ $x^2 + c = bx$ som Kharazmi gav och som presenteras nedan behandlar endast subtraktion i ekvation (20).




Figur 11

I figur 11, representeras $x^2$ och $c$ av kvadraten $ABCD$ respektive rektangeln $ABNH$. Följaktligen representeras $b$ av $HC$. Skär $HC$ i punkten $G$ så att $HG = GC$. Förläng $TG$ till $K$ så att $GK = GA$, och komplettera rektangeln $GKMH$. Välj punkten $L$ på $KM$ så att $KL = GK$ och komplettera kvadraten $KLRG$. Det följer att rektangeln $MLRH$ är lika med rektangeln $GATB$. Eftersom arean av kvadraten $KMNT$ är $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ och eftersom denna kvadrat utan kvadraten $KLRG$ är lika med rektangeln $ABNH = c$, har vi att kvadraten

$$KLRG = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \tag{21}$$

Men,

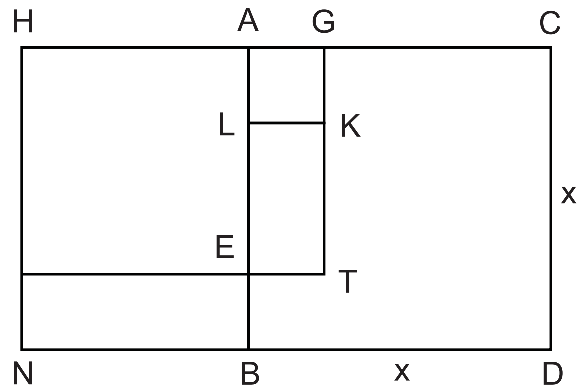
$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = KG = AG \tag{22}$$

Från detta följer att

$$x = AC = CG - AG = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \tag{23}$$

ibn Turk gav i sin bok *kitab al-jabr wal-muqabala* en komplett geometrisk lösning till ekvationer av typ $x^2 + c = bx$. Han noterade att $G$, som är mittpunkten av $HC$ lika gärna kunde ligga på $HA$ som i figur (11) eller på $AC$

som i figur (12).




Figur 12

Utförandet liknar Kharazmis men här är

$$x = AC = CG + GA = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}. \qquad (24)$$

Ibn Turk gav också ett exempel på när en ekvation av typen $x^2 + c = bx$ är *omöjlig*, det vill säga saknar lösning:

> *there is the logical necessity of impossibility in this type of equation when the numerical quantity ... is greater than* [*the square of* ] *half the number of roots*

Som exempel kan vi titta på $x^2 + 30 = 10x$.

## 4.5 Tredjegradsekvationer

Khayyam definierar algebra på följande sätt:

*By the help of God and with His precious assistance, I say that Algebra is a scientific art. The objects with which it deals are absolute numbers and measurable quantities which, though themselves are unknown, are related to "things" which are known, whereby the determination of the unknown quantities is possible. Such a thing is either a quantity or a unique relation, which is only determined by careful examination. What one searches for in the algebraic art are the relations which lead from the known to the unknown, to discover which is the object of Algebra as stated above. The perfection of this art consists in knowledge of the scientific method by which one determines numerical and geometric unknowns.*

Khayyam var den första matematikern att systematiskt klassificera och lösa alla typer av tredjegradsekvationer. För att göra detta använder Khayyam kägelsnitt och han återger inga algebraiska algoritmer för att lösa tredjegradsekvationer (lik de som Kharazmi återgav för lösning av andragradsekvationer). Han utmanar dock framtida matematiker att överkomma denna hinder:

*Perhaps someone else who comes after us may find it out in the case, when there are not only the first three classes of known powers, namely the number, the thing and the square.*

I Khayyams behandling av algebra kopplas ämnet starkt ihop med geometri. Men han är väl medveten om geometrins begränsning, vilket han förklarar i sin definition av algebraiska lösningar:

*Algebraic solutions are accomplished by the aid of equations; that is to say, by the well-known method of equating these degrees one with the other. If the algebraists were to use the square of the square in measuring areas, his result would be figurative and not real, because it is impossible to consider the square of the square as a magnitude of a measurable nature. What we get in measurable quantities is first one dimension, which is the "root" or the "side" in relation to its square; then two dimensions, which represent the "surface" and the (algebraic) "square" representing the square surface and finally, three dimensions, which represent the "solid". The cube in quantities is the solid bounded by six squares, and* *since there is no other dimension, the square of the square does not fall under measurable quantities. This is even more true in the case of higher powers.*

Han förstod alltså att man inte kunde lösa algebraiska ekvationer högre än dimension tre med hjälp av geometri.

Khayyam delade in tredjegradsekvationer i två olika klasser, *enkla* och *sammansatta*. De enkla ekvationerna bestod av två termer och de sammansatta av fler än två. De sammansatta ekvationerna delade han också in i två klasser, nämligen *trinomiala* och *tetranomiala* ekvationer. Varje sådan klass blev indelat i mindre delklasser. Hela indelningen illustreras nedan.

1. Enkla (binomiala) ekvationer:

$$\begin{array}{llllll} (i) & a = x & (ii) & a = x^2 & (iii) & a = x^3 \\ (iv) & bx = x^2 & (v) & bx = x^3 & (vi) & cx^2 = x^3 \end{array} \tag{25}$$

2. Trinomiala kvadratiska ekvationer:

$$\begin{array}{llll} (vii) & x^2 + bx = a & (viii) & x^2 + a = bx \\ (ix) & bx + a = x^2 & & \end{array} \tag{26}$$

3. Trinomiala kubiska ekvationer, reducerbara till kvadratiska ekvationer:

$$\begin{array}{llll} (x) & x^3 + cx^2 = bx & (xi) & x^3 + bx = cx^2 \\ (xii) & x^3 = cx^2 + bx & & \end{array} \tag{27}$$

4. Trinomiala kubiska ekvationer:

$$\begin{array}{llll} (xiii) & x^3 + cx^2 = a & (xiv) & x^3 + bx = a \\ (xv) & x^3 + a = cx^2 & (xvi) & x^3 + a = bx \\ (xvii) & x^3 = cx^2 + a & (xviii) & x^3 = bx + a \end{array} \tag{28}$$

5. Tetranomiala ekvationer där summan av tre termer är lika med den fjärde termen:

$$\begin{array}{llll} (xix) & x^3 + cx^2 + bx = a & (xx) & x^3 + cx^2 + a = bx \\ (xxi) & x^3 + bx + a = cx^2 & (xxii) & cx^2 + bx + a = x^3 \end{array} \tag{29}$$

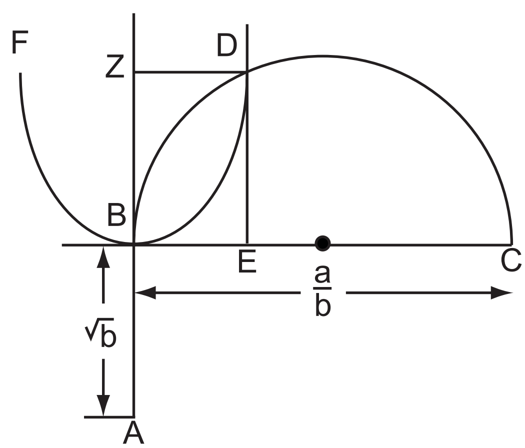
6. Tetranomiala ekvationer där summan av två termer är lika med summan av de andra två:

$$\begin{array}{llll} (xxiii) & x^3 + cx^2 = bx + a & (xxiv) & x^3 + bx = cx^2 + a \\ (xxv) & x^3 + a = cx^2 + bx & & \end{array} \tag{30}$$

Liksom sina företrädare behandlade Khayyam endast positiva tal. Att exempelvis en ekvation som $x^3 + a = 0$ inte återfinns i Khayyams klassificering beror på att denna inte har någon positiv rot. I de fall det inte alltid finns en positiv lösning ger han villkoren för när det finns ingen, en respektive två lösningar, beroende på om kägelsnittet och cirkeln skär varandra i ingen, en eller två punkter. Hans härledning av beviset av ekvationer av typ $(xiv)$ följer nedan.

### 4.5.1 $x^3 + bx = a$

Vi ska här se hur Khayyam löste fallet *en kub och rötter är lika med ett tal.* Han var mycket noggrann med att ekvationsdelarna skulle överensstämma geometriskt. Eftersom $x$ representerar sidan av en kub, så måste $b$ representera en kvadrat ($bx$ står då för en kub) medan $a$ representerar en kub.




Figur 13

I figur 13, låt $AB$ vara lika med sidan av kvadraten $b$, det vill säga $AB = \sqrt{b}$. Rita $BC$ vinkelrät mot $AB$ så att $BC \cdot AB^2 = a$, det vill säga $BC = a/b$.

Förläng $AB$ till $Z$ och konstruera en parabel med brännpunkt $B$, styrlinje $BZ$, och parameter $AB$. Med dagens notation har parabeln ekvationen $x^2 = \sqrt{b}y$. Konstruera en halvcirkel på linjen $BC$ med ekvationen

$$\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \tag{31}$$

Halvcirkeln och parabeln skär varandra i punkten $D$. $x-$koordinaten för denna punkt, det vill säga $BE$, är lösningen till ekvationen.

### 4.5.2 Villkor för $x^3 + a = cx^2$

Vi ska nu presentera Tusis härledning av villkoren för att ekvationen $x^3 + a = cx^2$ ska ha två, en eller ingen lösning.

Han börjar med att skriva ekvationen i formen $x^2(c - x) = a$. Sedan bildar han funktionen

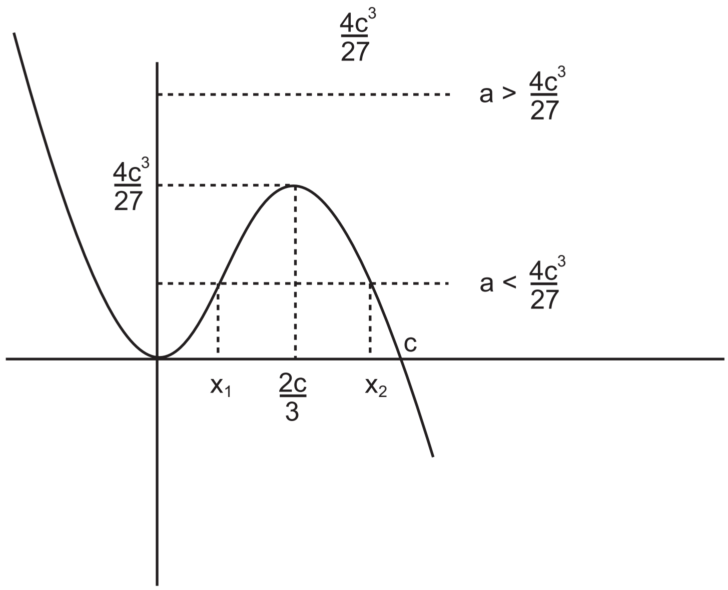
$$f(x) = x^2(c - x) \tag{32}$$

Nu ser man att ekvationen $x^2(c - x) = a$ har lösning om funktionen $f(x)$ når upp till värdet av $a$. Han söker således maximum för $f(x)$ vilket fås för $x_0 = \frac{2c}{3}$. Han fortsätter med att bevisa (geometriskt) att detta värde är korrekt (figur 14). Vidare kommer han fram till att

$$f(x) \leq \frac{4c^3}{27} \tag{33}$$

Nu noterar Tusi följande:

$$\begin{cases} \frac{4c^3}{27} < a \Longrightarrow \text{ekvationen har inga rötter} \\ \frac{4c^3}{27} = a \Longrightarrow \text{ekvationen har en rot} \\ \frac{4c^3}{27} > a \Longrightarrow \text{ekvationen har två rötter} \end{cases} \tag{34}$$




Figur 14

## 4.6 Induktionsbevis

al-Samawal ger följande sats i sin bok *al-bahir fi al-jabr* (Det strålande i algebran):

> *Om vi vill summera kuberna av de tal som följer på varandra från ett så multiplicerar vi summan med sig själv. Produkten är summan av deras kuber.*

Med dagens notationer skulle satsen lyda:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left( \sum_{k=1}^{n} k \right)^2 \tag{35}$$

Satsen var känd sedan ett hundratal år tillbaka men al-Samawal ger också ett bevis för det. Han bevisar satsen för de fyra första talen:

> *Låt $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ och $\overline{DE}$ vara dessa tal som följer på varandra i naturlig ordning från ett. Jag påstår att summan av kuberna på $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ och $\overline{DE}$ är lika med kvadraten på $\overline{AE}$.*

I beviset utvecklas $\overline{AE}^2$ till $\left(\overline{AD}+\overline{DE}\right)^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + 2\overline{AD}\cdot\overline{DE}$. Termen $\overline{AD}^2$ förutsätts vara bevisad $\left(\overline{AD}^2 = \overline{AB}^3 + \overline{BC}^3 + \overline{CD}^3\right)$ och resten av beviset genomförs med kända algebraiska regler.

För att bevisa satsen genomför al-Samawal en härledning för fallet $n = 4$, förutsatt att satsen är känd för $n = 3$. Trots att al-Samawal inte definierar induktionsprincipen ser vi klart att utförandet är ett induktionsbevis.

## 4.7 Kombinatorik

Vi ska här återge ibn Mun'ims beräkning av antalet kombinationer av $r$ element från en mängd av $n$ element ($n \geq r$). Med detta menar vi antalet sätt man kan välja $r$ element från en mängd av $n$ element utan repetition. Vi skriver då

$$C_r^n \tag{36}$$

ibn Mun'im undersökte problemet att hitta antalet ord som kan bildas med hjälp av de 28 bokstäverna i det arabiska språket. Han börjar med att undersöka problemet att hitta antalet kombinationer av 10 färger ($c_i$, $i = 1, \ldots, 10$), det vill säga

$$C_1^{10} + C_2^{10} + \ldots + C_{10}^{10} \tag{37}$$

Först observerar han att $C_1^{10} = 10$. För att beräkna $C_2^{10}$ gör han en lista på alla kombinationer av 2 färger enligt följande:

$$\begin{array}{l} (c_2, c_1) \\ (c_3, c_1), (c_3, c_2) \\ (c_4, c_1), (c_4, c_2), (c_4, c_3) \\ \ldots \\ (c_{10}, c_1), (c_{10}, c_2), \ldots, (c_{10}, c_9) \end{array} \tag{38}$$

Nu ser han att

$$C_2^{10} = C_1^1 + C_1^2 + \ldots + C_1^9 = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45 \tag{39}$$

Sedan fortsätter ibn Mun'im med att beräkna $C_3^{10}$:

> *To determine the number of combinations of three colors, one first combines the third color with the first and the second, then combines the fourth color with each pair of colors among the three colors which precede it - the first, the second, and the third - then combines the fifth color with each pair of colors among the four preceding colors, ... to the combination of the tenth color with each pair of colors among the nine preceding colors. But each pair of colors is a combination from the second line*

Alltså gör han en lista på alla kombinationer av tre färger enligt följande:

$$\begin{array}{l} (c_3, (c_2, c_1)) \\ (c_4(c_2, c_1)), (c_4(c_3, c_1))(c_4, (c_3, c_2)) \\ \ldots \\ (c_{10}, (c_2, c_1)), (c_{10}, (c_3, c_1)), \ldots, (c_{10}, (c_9, c_8)) \end{array} \tag{40}$$

Nu ser han att

$$C_3^{10} = 1 + 3 + 6 + \ldots + 36 = C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 \ldots + C_2^9 \tag{41}$$

vilket han redan tidigare har beräknat. Vad ibn Mun'im egentligen härleder är formeln

$$C_k^n = C_{k-1}^{k-1} + C_{k-1}^k + C_{k-1}^{k+1} + \ldots + C_{k-1}^{n-1} \tag{42}$$

Vidare undersöker han problemet att hitta antalet permutationer av bokstäver i ett ord:

> *The problem is: We want to determine a canonical procedure to determine the number of permutations of the letters of a word of*

*which the number of letters is known and which does not repeat any letter. If the word has two letters, it is clear that there will be two permutations, since the first letter may be made the second and the second the first. If we augment this by one letter and consider a three letter word, it is clear that, in each of the permutations of two letters of a two letter word, the third letter may be before the two letters, between the two letters, or in the final positions. The letter of a three letter word therefore have six permutations. If the word is now augmented by another letter to make a four letter word, the fourth letter will be in each of the six permutations* [*in one of four positions*]*. The four letter word will thus have twenty-four permutations.*

ibn-Mun'im kommer fram till att hur långt ett ord än är så hittar man antalet permutationer av dess bokstäver genom att multiplicera ett med 2 med tre ... upp till antalet bokstäver.

# Referenser

[1] Bashmakova, I. G. and Smirnova, G. S. (2000), *The Beginnings and Evolution of Algebra*, Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

[2] Berggren, J. L. (1986), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag.

[3] Johansson, B. G. (2004), *Matematikens historia*, Studentlitteratur AB.

[4] Kasir, D. (1931), *The Algebra of Omar Khayyam*, New York.

[5] Katz, V. J. (1998), *A History of Mathematics: An Introduction*, 2 ed., Addison Wesley.

[6] www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/