EXAMENSARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Hur många permutationer har kvadratrötter?

av

Katarina Banda

2006 - No 5

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 10691 STOCKHOLM

Hur många permutationer har kvadratrötter?

Katarina Banda

Examensarbete i matematik 10 poäng

Handledare: Rikard Bøgvad

2006

Innehåll

Kapitel 1

Introduktion

Genererande funktioner är ett redskap, eller snarare en hel verktygslåda, som är hopplockad av matematikens olika godbitar och lämpar sig för en mängd av problem. Genererande funktioner väver samman analys, algebra, kombinatorik, mm. Dessutom ger de mycket ofta tacksamt eleganta lösningar. Vill vi veta vad det 176:e Fibonaccitalet är? Vill vi kanske veta hur många av alla möjliga permutationer, av en viss mängd element, som har kvadratrötter? Eller vill vi bara bistå med beslutsångest när någon planterar om blommorna på balkongen? I så fall har vi knappt börjat!

Detta arbete önskar ge en liten glimt av genererande funktioner och deras användningsområden. Det är omöjligt att, i ett svep, presentera deras fullständiga makt. Arbetet har, under sin skapelse, visat mig att ju mer jag upptäcker, desto mer inser jag att det finns kvar att upptäcka. Tanken är att förmedla denna känsla till de som har ett hum om matematiken.

Huvudsakligen är informationen i detta arbete hämtat från Herbert S. Wilfs bok "Generatingfunctionology". Denna bok har även inspirerat till ett mera vardagligt och lättförståligt språk mitt imellan alla formler. För övrigt låg Ralph P. Grimaldis bok "Discrete and combinatorial mathematics" och Norman L. Biggs bok "Descrete Mathematics" nära till hands.

Det som inte går att få ur en bok, nämligen motivation, förståelse och mängder av tålamod, vill jag tacka min handledare Rikard Bøgvad för.

Kapitel 2

Ordinära genererande funktioner

Vi börjar med definitionen och motiverar sedan intresset för genererande funktioner.

Definition 1. *Låt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vara en följd av reella tal. Funktionen*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \tag{2.1}$$

är en genererande funktion *för den givna talföljden.*

En genererande funktion är alltså ett redskap vi använder vid lösande av problem som vi vet har en talserie $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ som svar. Det kan t ex handla om ett enkelt urvalsproblem (selection problem), eller antalet heltalslösningar till ekvationen $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 12$ där $c_i \geq 0$ för $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Visserligen finns det andra enkla metoder att lösa den sortens problem och genererande funktioner kan kännas något överkvalificerade. De kommer dock väldigt väl till hands då vi möter ett flertal restriktioner på ekvationens lösningar.

Exempel 1. *Bland många röda, blåa, vita och gula blommor (som enbart skiljer sig åt med färgen) vill vi välja 12 stycken. På hur många sätt kan vi göra detta så att vi har minst* 6 *stycken vita, ett jämnt antal röda och inte fler än* 5 *gula blommor? Med andra ord söker vi antalet heltalslösningar till ekvationen*

$$c_{röd} + c_{blå} + c_{gul} + c_{vit} = 12$$

där $c_{vit} \geq 6, c_{röd}$ är jämnt, $0 \leq c_{gul} \leq 5$ och alla c_i är ickenegativa heltal. Vi löser problemet på följande vis. Det finns bara ett sätt att välja 0*, eller* 2*, eller* 4 *... stycken bland oändligt många, identiska röda blommor, därför associeras potensserien $1 + x^2 + x^4 + \ldots$ med de röda blommorna. På samma* *sätt associeras serien $1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$ med de blåa blommorna, $x^6 + x^7 + x^8 + \ldots$ med de vita, samt polynomet $1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^5$ med de gula blommorna. Svaret på vår fråga är nu helt enkelt koefficienten framför x^{12} i utvecklingen av genererande funktionen*

$$f(x) = (1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)(x^6+x^7+x^8+\ldots)(1+x+x^2+\ldots+x^5) \tag{2.2}$$

eller mer bestämt 49, eftersom vi har kopplat genererande funktionens polynom till antalet heltalslösningat till den från början givna funktionen. Hade det istället handlat om totalt 15 blommor med samma restriktioner på de fyra färgerna hade svaret givits av koefficienten framför x^{15} i genererande funktionen 2.2.

Uppenbarligen, om vi totalt vill ha tolv blommor och minst 6 av blommorna ska vara vita, så får vi aldrig ta mer än 6 blommor av vardera resterande färg. Vi skulle nu kunna nöja oss med att representera t ex urvalet av röda blommor med polynomet $1+x^2+x^4+x^6$, blåa med $1+x+x^2+\ldots+x^6$ och så vidare, men det är ofta lättare att hantera oändliga potensserier än ändliga polynom.

I exemplet ovan var vår uppgift att hitta koefficienten a_{12} i den genererande funktionen $f(x)$. Vi kan med hjälp av genererande funktioner vilja hitta ett exakt värde eller ett uttryck för a_n. Skulle vi till exempel, med hjälp av genererande funktioner, kunna ge ett uttryck för det n:te talet i serien: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, det vill säga talserien som rekursivt definieras genom $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 2\ ,\ a_0 = 0\ ,\ a_1 = 1)$, också känd som Fibonaccitalen?

Vi tittar först på den bekanta geometriska serien

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \tag{2.3}$$

Vi kan med all rätt reagera på att serien endast konvergerar då $x \in (-1, 1)$. Detta är ingen huvudbry i denna lek, eftersom vi endast är intresserade av koefficienterna i utvecklingen då vi arbetar med genererande funktioner. Vi betraktar då serien som ett algebraiskt objekt snarare än analytiskt och behöver inte bry oss om för vilka värden på x serien konvergerar.

$\frac{1}{1-x}$ är alltså den genererande funktionen för talföljden $1, 1, 1, \ldots$. Vi kan derivera potensserien och får då

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) =$$
$$= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

$\frac{x}{(1-x)^2}$ är då genererande funktionen för talserien $0, 1, 2, 3, \ldots$. Vi kan fortsätta på detta sätt och konstatera att

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big) = \frac{x+1}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots) =$$

$$= 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots$$

genererar talföljden $1^2, 2^2, 3^2, 4^{,} \dots$ och $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ genererar $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ Vidare genererar

$$x\frac{d}{dx}\Big(\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\Big) = 0^3 + 1^3x + 2^3x + \dots$$

följden $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$ och så vidare.

Exempel 2. *Vi vänder nu på steken och frågar: vilken funktion genererar en given talföljd? Vi tar Fibonaccitalen som exempel. Dessa kan rekursivt skrivas som*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, (n \geq 1, F_0 = 0, F_1 = 1) \tag{2.4}$$

Vi söker den genererande funktionen $F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n$. Vi börjar med att multiplicera ekvationen (2.4) med x^n och summera över $n \geq 1$:

$$VL : \sum_{n\geq 1} F_{n+1}x^n = F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \dots =$$

$$= \frac{F(x)}{x} - 1 = \frac{F(x) - x}{x}$$

Detta eftersom

$$F(x) = F_0 + F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \dots$$

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{F_0}{x} + F_1 + F_2x^1 + F_3x^2 + F_4x^3 + \dots$$

och eftersom $F_0 = 0$ och $F_1 = 1$ har vi att

$$\sum_{n\geq 1} F_{n+1}x^n = \frac{F(x)}{x} - 1$$

$$HL : \{F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots\} + \{F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \dots\} =$$

$$= \{F(x)\} + \{xF(x)\}$$

Vi har alltså

$$\frac{F(x) - x}{x} = F(x) + xF(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Vi har nu funktionen som genererar Fibonaccitalen. Helt spontant känns inte resultatet tillfredsställande. En skulle hellre se ett explicit uttryck för det n:te Fibonaccitalet. Vi fortsätter därför med att partialbråksuppdela $F(x)$.

$$1 - x - x^2 = (1 - xr_-)(1 - xr_+), \text{ där } (r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)} = \\
&= \frac{1}{r_+ - r_-}\Big(\frac{1}{1-xr_+} - \frac{1}{1-xr_-}\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\sum_{j\geq 0} r_+^j x^j - \sum_{j\geq 0} r_-^j x^j\Big)
\end{aligned}
$$

Vi söker koefficienten till x^n för det n:te Fibonaccitalet. Tack vare de snälla geometriska serierna tar nu lösningarna den begripliga formen:

$$
F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(r_+^n - r_-^n\big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\Big), n = 0, 1, 2, \ldots
$$

Kapitel 3

Exponentiella genererande funktioner

Vi har nu tagit ett litet smakprov på vad som kallas ordinära genererande funktioner (ofta förkortat med OGF), som till exempel hjälper oss att hitta antalet lösningar till urvalsproblem, där ordningen inte spelar någon roll. Säg nu att vi vill ta ett steg till och söka ett likvärdigt verktyg vid lösning av "omstruktureringsproblem"(rearangement problems), där ordningen självfallet spelar roll.

Vi börjar med att minnas *binomialteoremet*:
För alla $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

$(1+x)^n$ är alltså OGF för talföljden $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \ldots$ Men $\binom{n}{k}$ är ju antalet sätt att bland n element välja k element på ett sätt där ordningen ej spelar roll och upprepning ej förekommer.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.1}$$

Samtidigt vet vi att antalet sätt att välja k element av n utan upprepning där ordningen spelar roll är

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

det vill säga $k!$ är antalet delmängder med samma element men olika ordning. Alltså är

$$(1+x)^n = P(n,0) + \frac{P(n,1)x^1}{1!} + \frac{P(n,2)x^2}{2!} + \ldots + \frac{P(n,n)x^n}{n!}$$

Definition 2. *Låt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vara en följd av reella tal. Funktionen*

$$f(x) = a_0 + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \tag{3.2}$$

är en exponentiell genererande funktion *(ofta förkortad EGF) för den givna talföljden.*

Vi såg ovan att $(1+x)^n$ är EGF till $P(n,k)$, men varför kallas den just för *exponentiell* genererande funktion? Notera att Maclaurinutvecklingen av e^x är

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{3.3}$$

e^x är alltså, förutom den exponentiella genererande funktionen för $1, 1, 1, 1, \ldots$, även den ordinära genererande funktionen för $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots$

Exempel 3. *Bland många röda, vita, blåa och gula blommor ska vi välja 12 stycken att plantera på balkongräckets blomsterlåda. Hur många olika blomsterrader kan vi skapa, om blommorna enbart skiljer sig åt med färgen och vi vill ha ett jämnt antal röda blommor och ett udda antal vita blommor? Den exponentiella genererande funktionen som associeras till problemet är*

$$f(x) = \Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\Big)^2 \Big(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\Big) \Big(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\Big) =$$

$$= (e^x)^2 \big(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\big)\big(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\big) = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!} - 1\Big) = \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4x)^i}{i!}\Big)$$

Det sökta antalet blomsterrader är nu koefficienten framför $\frac{x^{12}}{12!}$, det vill säga $\frac{1}{4} 4^{12} = 4^{11}$.

En tanke som kan vara värd att ägna lite tid är faktumet att potensserier är deriverbara. Så om vi har en egf f som genererar talföljden $\{a_n\}_0^\infty$, vad genererar f'?

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!}$$

f' genererar alltså $\{a_{n+1}\}_0^\infty$ och via induktion kan vi snabbt övertyga oss om att det alltid gäller att om f genererar talföljden $\{a_n\}_0^\infty$ så, för varje $h \geq 0$ genererar $\frac{d^h f}{dx^h}$ talföljden $\{a_{n+h}\}_0^\infty$. Vi kan självklart vända på detta och inse att om $\phi(x) = \sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ är känd, så kan vi alltid få ut a_n som $a_n = \phi^{(n)}(0)$.

Exempel 4. *Vi går nu tillbaka till Fibonaccitalen för att jämföra de två sorterna av genererande funktioner. Följande rekursion beskriver Fibonaccitalen*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ , \ (n \geq 0)$$

Resonemanget ovan visar att den sökta exponentiella genererande funktionen löser differentialekvationen

$$f'' = f' + f$$

Detta är en differentialekvation med konstanta koefficienter och karakteristiska ekvationen $x^2 = x + 1$ *med lösningarna* $r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. *Vi löser alltså differentialekvationen med*

$$f(x) = c_1 e^{r_+ x} + c_2 e^{r_- x}$$

och bestämmer konstanterna $c_1 = 1/\sqrt{5}$ *och* $c_2 = -1/\sqrt{5}$ *med hjälp av startvärdena* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, *det vill säga* $f(0) = 0$ *och* $f'(0) = 1$. *Sammanfattnigsvis har vi*

$$f = \frac{e^{r_+ x} + e^{r_- x}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(1 + \frac{r_+ x}{1!} + \frac{r_+^2 x^2}{2!} + \frac{r_+^3 x^3}{3!} + \ldots - 1 - \frac{r_- x}{!} - \frac{r_-^2 x^2}{2!} - \frac{r_-^3 x^3}{3!} - \ldots \Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(1 + (r_+ - r_-) \frac{x}{1!} + (r_+^2 - r_-^2) \frac{x^2}{2!} + (r_+^3 - r_-^3) \frac{x^3}{3!} + \ldots \Big) \qquad (3.4)$$

Eftersom n:te Fibonaccitalet ges av koefficienten till $\frac{x^n}{n!}$ *i 3.4 ser vi enkelt att*

$$F_n = \frac{r_+^n - r_-^n}{\sqrt{5}}$$

Resultatet är betryggande nog det samma som vi fick genom ordinära genererande funktioner, fastän vägen dit var lite olika. Så nu är det upp till var och en att välja vad man tycker mest om - partialbråksuppdelning eller differentialekvationer.

Kapitel 4

Permutationer

En *permutation* av en icke-tom mängd X är en bijektion från X till X. Vanligtvis sätter vi X lika med $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Som exempel kan vi visa α, en enkel permutaion av $\mathbb{N}_5$ där α definieras av ekvationerna

$$\alpha(1) = 2\ ,\ \alpha(2) = 4\ ,\ \alpha(3) = 5\ ,\ \alpha(4) = 1\ ,\ \alpha(5) = 3$$

Antalet permutationer av n element är naturligtvis samma som antalet injektioner från $\mathbb{N}_n$ till sig själv, det vill säga

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

Vi gör som alla andra och kallar alla permutationer av $\mathbb{N}_n$ för den symmetriska gruppen S_n och förklarar det, kanske klarare, som, mängden val där ordningen spelar roll och återläggning inte är tillåten. Med andra ord omorganiserar vi elementen efter ett givet "schema" som bestäms av permutationen. Som exempel innehåller S_3 , som väntat, $3! = 6$ permutationer. Dessa är:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Ett kompaktare sätt att skriva samma sak är

$$(1)\ (2)\ (3) \quad (1)\ (2\ 3) \quad (1\ 2)\ (3)$$

$$(1\ 2\ 3) \quad (1\ 3\ 2) \quad (1\ 3)\ (2)$$

Detta kallas "cykelnotation"(cycle notation). Detta "schema" beskriver hur vi ska röra oss runt i en permutationscykel, eller vilka termer som permuterar till vilka. (1 3 4 2)(5) visar till exempel att från ettan går man till trean, från trean till fyran, från denna vidare till tvåan och sen tillbaka till ettan och så håller man på runt, runt, ett steg i taget. Från femman går vi alltid bara tillbaka till femman. Det är alltså en permutation av fem element uppdelat i två cykler. För enkelhetens skull, eller ibland av rent slarv, betraktar man en permutation och dess omorganisering (coresponding rearrangement) som samma sak, men detta kan stöka till det när en talar om succesiv omorganisering (successive rearrangement). På det stora hela bör man minnas att en permutation är en sorts funktion. När vi betraktar en permutation som en funktion är det enklare att förstå hur de borde sättas ihop. Det går lätt att visa att följande gäller:

• Om $f \in S_n$ och $g \in S_n$ så $f \circ g \in S_n$.
• $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ men $f \circ g \neq g \circ f$.
• Det existerar en identitetsfunktion id så att $id \circ f = f = f \circ id$. Denna är $id(i) = i\ ,\ i \in \mathbb{N}_n$.
• För varje $f \in S_n$ existerar inversen $f^{-1} \in S_n$ så att $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$

Exempel 5. *Vi kopplar av nu med lite enkel sammansättning av permutationer. Låt* $\sigma = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8)$ *och* $\tau = (1\ 3\ 5\ 7)\ (2\ 6)\ (4)\ (8)$ *då kan vi snabbt kontrollera att*

$$\sigma\tau = (1\,6\,4\,7\,8)\,(2\,5)\,(3)$$

$$\tau\sigma = (1)\,(3\,6)\,(5\,8\,7\,2\,4)$$

$$\sigma^2 = (1\,3\,2)\,(4\,6\,5)\,(7)\,(8)$$

$$\sigma^{-1} = (2\,1\,3)\,(5\,4\,6)\,(8\,7)$$

$$\tau^{-1} = (3\,1\,7\,5)\,(6\,2)\,(4)\,(8)$$

Kapitel 5

Symmetriska gruppens cykelindex

Första sortens Stirlingtal ger oss antalet permutationer av n element och som har exakt k cykler. Vi vill gå längre och inte bara titta på antalet cykler hos en permutation utan antalet cykler av varje längd. Låt $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ vara en följd av ickenegativa heltal så att $n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots$ är ändlig. Vi vill då söka antalet permutationer av n element och som har exakt a_1 cykler av längd 1, a_2 cykler av längd 2, osv...För en given permutation σ kallar vi vektorn $\mathbf{a}(\sigma)$ för sigmas cykeltyp (cycle type of σ), dvs den talar om antalet cykler av varje längd hos σ. Låt nu $c(\mathbf{a}(\sigma))$ vara det önskade antalet permutationer. Då kan vi kalla

$$\phi_n(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots=n \\ a_1\geq 0, a_2\geq 0,\ldots}} c(\mathbf{a}) x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots$$

för det cykliska index av symmetriska gruppen S_n.

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots$$

och vi summerar över alla heltalslösningar till ekvationen $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots = n$. Vi vill gärna kunna bestämma $\phi_n(\mathbf{x})$, för då skulle koefficienten till varje $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ vara antalet permutationer av n element och vars cykeltyp är $\mathbf{a}$. Vi ska därför ge oss på att hitta genererande funktionen

$$C(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\text{inf}} \phi_n(\mathbf{x}) \frac{t^n}{n!}$$

Vi ska börja med att hitta den exakta formen för $c(\mathbf{a})$ och sen visa att dess genererande funktion faktiskt genererar följden. Antalet permutationer av typ $\mathbf{a}$ är alltså $c(\mathbf{a})$, men, för ett givet $\mathbf{a}$, hur många permutationer τ har $\mathbf{a}$ som cykeltyp? För att svara på frågan tar vi hjälp av ett lemma.

Lemma 1. *Låt m, a, k vara givna heltal. Antalet sätt att välja ka element från m olika element och arrangera dem i a cykler av längd k är*

$$f(m,a,k) = \frac{m!}{(m-ka)!k^a a!}$$

Bevis: Det finns $\frac{m!}{(m-ka)!}$ sätt att välja en ordnad ka-tupel av de m elementen. Varje ka-tupel vill vi ha ordna i a cykler av längd k, men det spelar ingen roll vilken ordning cyklerna kommer. Antalet sätt att ordna a cykler är ju $a!$. Vidare har vi i varje cykel k möjliga sätt att skriva upp samma cykliska permutation, (ty $(1 \quad 2 \quad 3)$ är samma sak som $(2 \quad 3 \quad 1)$). Vi har alltså k^a likadana permutationscykler i varje ka-tupel.

Vi återgår till frågan: hur många permutationer τ har $\mathbf{a}$ som cykeltyp? Lemma 1 ger att om vi har n element och en följd av ickenegativa heltal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sådana att $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots = n$ så är

$$f(n,a_1,1)f(n-a_1,a_2,2)f(n-a_1-2a_2,a_3,3)f(n-a_1-2a_2-3a_3,a_4,4)\ldots =$$

$$= \frac{n!}{(n-a_1)!a_1!1^{a_1}} \frac{(n-a_1)!}{(n-a_1-2a_2)!a_2!2^{a_2}} \frac{(n-a_1-2a_2)!}{(n-a_1-2a_2-3a_3)!a_3!3^{a_3}} \ldots =$$

$$= \frac{n!}{a_1!a_2!a_3!\ldots 2^{a_2}3^{a_3}4^{a_4}\ldots}$$

antalet sätt att dela in elementen i a_1 cykler av längd 1, a_2 cykler av längd 2, a_3 cykler av längd 3, osv. Vi har därigenom bevisat följande sats:

Sats 1. *Låt $\mathbf{a}$ vara en följd av ickenegativa heltal för vilka $\sum_j ja_j = n$. Då är antalet permutationer av n element och cykeltyp $\mathbf{a}$*

$$c(\mathbf{a}) = \frac{n!}{\prod_{j\geq 1} a_j! j^{a_j}}$$

Vi kan nu fortsätta vår jakt på den genererande funktionen för antalen $c(\mathbf{a})$, det vill säga

$$C(\mathbf{x},t) = \sum_{n\geq 0} \phi_n(\mathbf{x}) \frac{t^n}{n!} =$$

$$= \sum_{t\geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots=n \\ a_1\geq 0, a_2\geq 0,\ldots}} c(\mathbf{a})\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = \sum_{t\geq 0} \frac{t^n}{n!} \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots=n \\ a_1\geq 0, a_2\geq 0,\ldots}} c(\mathbf{a}) x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots =$$

$$= \left(\sum_{a_1\geq 0} \frac{(tx_1)^{a_1}}{1^{a_1}a_1!} \right) \left(\sum_{a_2\geq 0} \frac{(tx_2)^{a_2}}{2^{a_2}a_2!} \right) \left(\sum_{a_3\geq 0} \frac{(tx_3)^{a_3}}{3^{a_3}a_3!} \right) \ldots =$$

$$= e^{tx_1} e^{\frac{t^2x_2}{2}} e^{\frac{t^3x_3}{3}} e^{\frac{t^4x_4}{4}} \ldots =$$

$$= exp\left(\sum_{j\geq 1}\frac{x_j t^j}{j}\right)$$

Vi kan sammanfatta detta i följande sats

Sats 2. *Koefficienterna till* $\frac{t^n}{n!}$ *i*

$$C(\mathbf{x},t) = exp\left(\sum_{j\geq 1}\frac{x_j t^j}{j}\right)$$

är cykelindex till S_n*, det vill säga genererande funktionen* $\phi_n(\mathbf{x})$ *ovan (antalet permutationer (av n element) av varje möjlig cykeltyp). Med andra ord kommer koefficienten till* $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\frac{t^n}{n!}$ *vara antalet permutationer av n element och cykeltyp* $\mathbf{a}$.

Detta kan generaliseras till en formel för exponentiella familjer, men det lämnar vi för ett annat arbete.

Kapitel 6

Rötterer av pmutationer

Låt σ vara en permutation. Vi vill beskriva och räkna de σ som har kvadratrötter, dvs för vilka det finns en permutation τ sådan att $\sigma = \tau^2$, eller, mer generellt, de σ som har en j:te rot om det finns ett τ så att $\sigma = \tau^j$. Vi vill kunna hitta antalet permutationer av n element som har j:te tötter. Vi börjar med kvadratrötter.

6.1 Kvadratrötter av permutationer

Låt τ vara en enkel, cyklisk permutation:

$$8 \to 3 \to 13 \to 19 \to 7 \to 12 \to 8$$

När vi kvadrerar τ går vi två steg åt gången, dvs τ bildar två cykler:

$$8 \to 13 \to 7 \to 8 \text{ och } 3 \to 19 \to 12 \to 3$$

Vi kan snabbt konstatera att cykler av jämn längd bildar två cykler vid kvadrering, medan cykler av udda längd förblir en cykel av samma längd fast med ny ordning av elementen. En cykel, i τ^2, av jämn längd kan bara vara ett resultat av uppdelning av en dubbelt så lång τ i två cykler. Vänder vi på kakan kan vi konstatera att, om σ har en kvadratrot, så måste antalet av dess cykler av jämn längd, vara jämnt.

Sats 3. *En permutation σ har en kvadratrot om och endast om antalet cykler av σ som var och en har jämn längd är jämnt.*

Bevis: Antag först att σ är sådan att antalet cykler av σ som vardera har jämn längd är jämnt. Vi kan då konstruera ett τ sådant att $\sigma = \tau^2$. För att göra det väljer vi ett par cykler av samma jämna längd flätar ihop dem till en cykel av dubel längd. Om cyklerna är

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_m) \text{ och } (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_m)$$

så bildar vi τ enligt följande

$$(a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad a_3 \quad b_3 \quad \dots \quad a_m \quad b_m)$$

När vi satt ihop alla cykelpar av jämn längd återstår cyklerna av udda längd. Varje cykel av udda längd $2m+1$ i σ bygger vi om till en lika lång cykel i τ enligt följande. Om cykeln i σ är

$$(c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_{2m} \quad c_{2m+1})$$

möbleras elementen om och cyklen kommer i τ vara

$$(c_1 \quad c_{m+2} \quad c_2 \quad c_{m+3} \quad c_3 \quad \dots \quad c_m \quad c_{2m+1} \quad c_{m+1})$$

Låt oss nu definiera $f(n,2)$ som antalet permutationer av n element som har kvadratrötter. Vi vill hitta genererande funktionen för talföljden $\{f(n,2)\}_{n=1}^{\infty}$. Om vi tänker oss en cykeltypsvektor (cycle type vector) **a** för en permutation som har kvadratrötter, måste i den följden varje tal med jämnt index vara jämnt, medan de med udda index kan vara godtyckliga. Tack vare sats 2 vet vi att koefficienten till $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\frac{t^n}{n!}$ i $\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i t^i}{i}\right\}$ är antalet permutationer av n element och med cykeltyp **a**. Vi måste nu ur detta få fram summan av de koefficienter som vi är intresserade av, nämligen **a**-vektorer för vilka tal med jämn index är jämna. Vi gör på följande vis: eftersom alla värden på udda indexerade heltalen är tillåtna sätter vi $x_i = 1$ för alla udda i. För att bara välja de jämna potenerna i x_{2i} använder vi $cosh$-serien. Varför? Jo, vi kan ha ett svagt minne av att $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ (se annars t.ex. “Analys i en variabel“ av Arne Persson och Lars-Christer Böiers avsnitt 1.11 om de hyperbolliska funktionerna). Taylorutvecklar vi uttrycket får vi:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\Big(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots\Big) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

det vill säga bara de termer med jämna exponenter i utvecklingen av e^x. Således använder vi $cosh(x_{2i}\frac{t^{2i}}{2i})$ och sätter här $x_{2i} = 1$. Vi kan nu dra slutsatsen att $f(n,2)$, antalet permutationer av n element och som har kvadratrötter uppfyller

$$\sum_{n\geq 0} f(n,2)\frac{t^n}{n!} = e^t cosh(\frac{t^2}{2})e^{\frac{t^3}{3}}cosh(\frac{t^4}{4})e^{\frac{t^5}{5}}\ldots =$$

$$= exp\Big(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+\ldots\Big)\prod_{m\geq 1} cosh(\frac{t^{2m}}{2m}) =$$

$$= \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \prod_{m\geq 1} cosh(\frac{t^{2m}}{2m}) =$$

$$= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + 3\frac{t^3}{3!} + 12\frac{t^4}{4!} + 60\frac{t^5}{5!} + 270\frac{t^6}{6!} + \dots$$

För att klargöra tankegången bör vi kanske påpeka följande

$$log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}\big(log(1+x) - log(1-x)\big)$$

$$exp\Big(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \dots\Big) =$$

$$= exp\Big(\frac{1}{2}\big(log(1+x) - log(1-x)\big)\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{e^{log(1+x)}}{e^{log(1-x)}}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Vi kan konstatera att följden $\{f(n,2)\}$ börjar med

$$1, 1, 1, 3, 12, 60, 270, 1890, \dots$$

6.2 j:te rötter av permutationer

Det här var roligt och nu börjar allvaret. Vi söker nämligen $\{f(n,j)\}_{n\geq 0}$, det vill säga antalet permutationer av n element som har j:te rötter. Vi börjar med att införa lite nya beteckningar. Om p är ett primtal och n är ett heltal kommer vi att med $e(p,n)$ mena den högsta potensen av p som delar n. För varje par av positiva heltal (m,j) kommer vi skriva

$$((m,j)) = \prod_{p|m} p^{e(p,j)}$$

Vårt första steg är generalisering av sats 3, det vill säga att fastställa för vilka permutationer σ det existerar en permutation τ sådan att $\sigma = \tau^j$ (j givet).

Sats 4. *En permutation σ har j:te rötter om och endast om det för varje $m = 1, 2, 3, \dots$ gäller att antalet cykler av längd m hos σ är en multipel av ((m,j)).*

Bevis: Låt $\sigma = \tau^j$ vara en permutation av längd m, $m = 1, 2, 3, \ldots$Vi tänker oss en cykel av längd r i τ. I τ^j kommer denna cykel bidra med sgd(r,j) cykler av längd $\frac{r}{sgd(r,j)}$. Därför måste v_m cyklerna av längd m i σ komma från cykler av längd r i τ där $r/sgd(r,j) = m$. Tittar vi nu på ekvationen $r = sgd(r,j)m$ ser vi att r måste vara en multipel av $m((m,j))$. I så fall måste alla cykler av längd m i σ komma från komma från cykler av längder som är multipler av $m((m,j))$ i τ. Omvänt måste varje sådan cykel i τ bidra med en multipel av $((m,j))$ m-cykler i σ. Alltså är antalet cykler av längd m i σ multipler av $((m,j))$.

Det här blev kanske lite rörigt, så vi konstruerar en rot. Låt σ vara en permutation som uppfyller kravet. Vi konstruerar en j:te rot. Sätt $g = ((m,j))$. Antalet cykler av längd m är nu en multipel av g, så vi buntar ihop dem i g cykler av längd m per knippe. Varje knippe kommer att bilda en ny cykel av längd mg genom att i en cykel med mg platser först placera ut en cykel av längd m så att det finns lika många toma platser mellan elementen. Det vill säga första elementet i m-cykeln placeras på plats 1 i mg-cykeln, andra elementet i m-cykeln placeras på plats $g + 1$ i mg-cykeln, och så vidare tills hela m-cykeln är utplacerad. Tag sedan nästa m-cykel i knippen och placera ut den på samma sätt med första elementet på plats 2, andra elementet på plats $g + 2$, och så vidare. Fortsätter vi på detta sätt tills knippen är slut har vi bildat roten till knippen. Fortsätter vi så för alla knippen har vi bildat den j:te roten till σ. Vi sätter lite siffror på tillvaron i ett exempel.

Exempel 6. *Låt oss beskriva σ på följande vis:*

$$(1\,4)\,(2\,5)\,(3\,6)\,(7\,10\,13)\,(8\,11\,14)\,(9\,12\,15)$$

σ uppfyller kraven för att ha en 3:e rot, eftersom antalet cykler av längd 2 ar en multipel av $((2,3)) = 1$ och antalet cykler av längd 3 är en multipel av $((3,3)) = 3$. Vi konstruerar nu enligt ovan en 3:e rot till σ, det vill säga sätter ihop ett τ som uppfyller $\tau^3 = \sigma$. Cyklerna av längd 3 bildar bara en "knippe" och placeras ut i en nio platser stor cykel. Vi börjar med cykeln (7 10 13)*:*

$$(7\,\_\,\_\,10\,\_\,\_\,13\,\_\,\_),$$

fyller på med cykeln (8 11 14)*:*

$$(7\,8\,\_\,10\,11\,\_\,13\,14\,\_)$$

och avslutar med (9 12 15)*:*

$$(7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15).$$

Men vem påstår att vi måste just placera ut cyklerna i denna ordning? Kan vi lika gärna börja med (81114)*? Javisst! Vi kan testa lite fort och konstatera att bland andra*

$$(8\,7\,9\,11\,10\,12\,14\,13\,15).$$

lika väl som

$$(9\,7\,8\,12\,10\,11\,15\,13\,14).$$

uppfyller sin del av $\tau^3 = \sigma$.

Nu återstår cykler av längd 2 att omorganisera så att elementen står 3 "steg" ifrån varandra enligt den cykliska notationen. Enligt sats 4 kan vi behandla en cykel åt gången. Detta är sant efersom om vi "hoppar" från element ett tre steg i cykeln $(1\,4)$*, hamnar vi på det andra elementet (och vice versa). Alltså är* τ *till exempel:*

$$(1\,4)\,(2\,5)\,(3\,6)\,(7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15).$$

Nu måste man ju fråga sig: kan man inte baka ihop de där cyklerna av längd 2? Absolut! $\tau^3 = \sigma$ *uppfylls ju även då* τ *är:*

$$(1\,2\,3\,4\,5\,6)\,(7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15).$$

Slutsats? Det känns mycket frestande att modifiera sats 4 och påstå att en permutation σ *har minst en j:te rot om...*

För att nu fortsätta jakten på den exponentiella genererande funktionen för talföljden $\{f(n, j)\}$ fortsätter vi som för kvadratrötterna ovan. Först bestämmer vi att $exp_q(x)$ är den delen av utvecklingen av e^x som har potenser som är delbara med q, alltså

$$exp_q(x) = \sum_{j\geq 0} \frac{x^{jq}}{(jq)!} \text{ , } (q = 1, 2, 3, \ldots)$$

Som förut är $exp_1(x) = e^x$ och $exp_2(x) = cosh(x)$. För att hitta $exp_3(x)$ tittar vi först på en längre härledning av $exp_2(x)$ med "roots of unity" eller "de Moivre Numbers", det vill säga rötterna $\xi_k = e^{(2\pi ik)/n}$ till ekvationen $x^n = 1$. För enkelhetens skull låter man $k = 0, 1, 2 \ldots, n-1$, då 1 alltid är en rot till ekvationen. Om en potensserie konvergerar mot en funktion f kan vi plocka ut en viss del av serien. Om vi löser ekvationen $x^2 = 1$ enligt ξ ovan får vi ± 1, vilket vi redan visste. Funktionen f som potensserien konvergerar mot har nu egenskapen att

$$\frac{f(\xi_0 x) + f(\xi_1 x)}{2} = \sum_r a_{2r} x^{2r}$$

bara innehåller termerna med positiva potenser i utvecklingen av $f(x)$. Detta gäller eftersom

$$\frac{1^n + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{, om } n \text{ är udda} \\ 0 & \text{, om } n \text{ är jämn} \end{cases}$$

I vårt fall är $f(x) = e^x$ och $\sum_r a_{2r}x^{2r} = cosh(x)$. Om vi nu följer samma steg för $n = 3$ ser vi att $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = e^{(2\pi i)/3}$ och $\xi_2 = e^{(4\pi i)/3}$ och eftersom

$$\frac{\xi_0^n + \xi_1^n + \xi_2^n}{3} = \begin{cases} 1 & \text{, om } n \text{ är delbart med 3} \\ 0 & \text{, annars} \end{cases}$$

vet vi att

$$\frac{f(\xi_0 x) + f(\xi_1 x) + f(\xi_2 x)}{3} = \sum_r a_{3r}x^{3r}$$

Detta utvecklas för de övriga $exp_n(x)$. Vi har följande

$$\frac{1}{r}\sum_{\xi^r=1} \xi^n = \begin{cases} 1 & \text{, om } n \text{ delar r} \\ 0 & \text{, annars} \end{cases}$$

På samma sätt som för kvadratrötterna kan vi alltså plocka fram alla "dugliga" delar av potenserna och sammanfatta det som

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n,j)\frac{x^n}{n!} = \prod_{m=1}^{\infty} exp_{((m,j))}\left(\frac{x^m}{m}\right) \text{ , } (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

Nu kan vi pusta ut, ta en fika och på kul kolla vad som händer när vi stoppar in olika värden på j och n i våran vackra skapelse.

Vi börjar med $k = 1$ och kollar om vi kommer fram till något som känns rätt. Först konstaterar vi att $((m, 1)) = 1$ för alla värden på m. Vi har då

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n,1)\frac{x^n}{n!} = \prod_{m=1}^{\infty} exp\left(\frac{x^m}{m}\right).$$

För att kaffet inte ska kallna kan vi begränsa oss till $1 \geq n \geq 5$ och kallar därför termer som innehåller enbart x med högre potens än 5 för r när vi utvecklar ekvationen ovan.

$$\prod_{m=1}^{\infty} exp\left(\frac{x^m}{m}\right) = exp_1\left(\frac{x^1}{1}\right)exp_1\left(\frac{x^2}{2}\right)exp_1\left(\frac{x^3}{3}\right)exp_1\left(\frac{x^4}{4}\right)exp_1\left(\frac{x^5}{5}\right)+\text{r} =$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^5}{5!}+\text{r}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+3\frac{x^4}{4!}+\text{r}\right)\left(1+2\frac{x^3}{3!}+\text{r}\right)\left(1+6\frac{x^4}{4!}+\text{r}\right)\left(1+24\frac{x^5}{5!}+\text{r}\right) =$$

$$1 + x + 2\frac{x^2}{2!} + 6\frac{x^3}{3!} + 24\frac{x^4}{4!} + 120\frac{x^5}{5!} + \text{r} =$$

$$1 + 1!x + 2!\frac{x^2}{2!} + 3!\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{x^4}{4!} + 5!\frac{x^5}{5!} + \text{r} =$$

Eftersom $\sigma^1 = \sigma$ måste alla möjliga permutationer av n element ha en första rot. Vi har redan nämnt att antalet permutationer av n element är $n!$. Därför känns det betryggande att utvecklingen ovan resulterar i att koefficienten framför $x^n/n!$ är just $n!$. Vi fortsätter med att utveckla ekvationen för $j = 2$. $((1,2)) = 1$, $((2,2)) = 2$, $((3,2)) = 1$, $((4,2)) = 2$ och $((5,2)) = 1$.

$$\prod_{m=1}^{\infty} exp\left(\frac{x^m}{m}\right) = exp_1\left(\frac{x^1}{1}\right)exp_2\left(\frac{x^2}{2}\right)exp_1\left(\frac{x^3}{3}\right)exp_2\left(\frac{x^4}{4}\right)exp_1\left(\frac{x^5}{5}\right)+\mathrm{r} =$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\mathrm{r}\right)\left(1+3\frac{x^4}{4!}+\mathrm{r}\right)\left(1+2\frac{x^3}{3!}+\mathrm{r}\right)\left(1+\mathrm{r}\right)\left(1+24\frac{x^5}{5!}+\mathrm{r}\right) =$$

$$= 1 + x + 1\frac{x^2}{2!} + 3\frac{x^3}{3!} + 12\frac{x^4}{4!} + 60\frac{x^5}{5!} + \mathrm{r}$$

Ennu en gång möter vi ett resultat som vi känner igen, kvadratrötter har vi nämligen redan gått igenom en gång. Såhär känns det då tryggt att fortsätta och få lösningarna $\{f(n,3)\} = \{1, 2, 4, 16, \ldots\}$, $\{f(n,4)\} = \{1, 1, 3, 9, 45, \ldots\}$, och så vidare.

Kapitel 7

Analys till dessert

Ja, vad kan vi tänka oss att stöka till med nu då? Genererande funktioner lämnar oss ofta med talserier vi kan arbeta vidare med för att hitta, till exempel koefficienten till det n:te talet i utvecklingen. Med låt oss nu anta att vi inte är så kräsna och bara vill veta ungefär hur stort ett tal är. Tag det här med permutationer som exempel. Kan vi få reda på hur många permutationer av n element vi kan förvänta oss, om vi har restriktionen att inga cykler är av kortare längd än q?

Vi såg i kapitlet innan att koefficienterna till $\frac{x^n}{n!}$ i utvecklingen av

$$\prod_{m=1}^{\infty} exp\left(\frac{x^m}{m}\right)$$

där m är cykellängden, ger antalet pemutationer av n element. Att införa restriktionen att alla cykler ska vara längre än q är helt enkelt att istället utveckla

$$\prod_{m=q+1}^{\infty} exp\left(\frac{x^m}{m}\right)$$

Vi kan nu ta hjälp av att

$$log\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

och utveckla tankegången med

$$\prod_{m=q+1}^{\infty} exp\left(\frac{x^m}{m}\right) = exp\left(\sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{x^m}{m}\right)$$

$$= exp\left(log\frac{1}{1-x} - \sum_{1\geq m\geq q} \frac{x^m}{m}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-x} e^{-\{x+x^2/2+\dots+x^q/q\}}$$

Kalla denna funktion för $f_q(x)$.

Här kan vi trassla in lite analys. Vi vill nu ha reda på hur $f_q(x)$ uppför sig asymptotiskt. Analysen pekar fort på att man ska leta efter singularitet närmast origo för att kunna bestämma största radien för vilken cirkeln runt origo inte innesluter någon singularitet. Vi vill nu alltså ha den genererande funktionen korrekt från analysens synpunkt för att kunna titta på konvergens. Tidigare har det bara handlat om koefficienterna till x och inte x själv.

Den enda singulariteten hos $f_q(x)$ i det ändliga planet är $x = 1$ och då samma som

$$\frac{1}{1-x}e^{-H_q}$$

där H_q är det q:te harmoniska talet

$$H_q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{q}$$

Funktionen

$$g(x) = \frac{1}{1-x}e^{-\{x+x^2/2+\ldots+x^q/q\}} - \frac{1}{1-x}e^{-H_q}$$

är då korrekt ur analysens synpunkt i hela planet eftersom den är lika med 0 då $x = 1$.

Om $\{c_n\}$ skulle vara koefficienterna till $\frac{x^n}{n!}$ i utvecklingen av $f_q(x)$ runt origo och $\{d_n\}$ koefficienterna i utvecklingen av $\frac{1}{1-x}e^{-H_q}$ så skulle skillnaden, $c_n - d_n$, vara mycket liten då n skulle vara stor. Det går att visa att skillnaden (det vill säga n:te koefficienten i $g(x)$) är av storleksordningen $O(\epsilon^n)$ då $n \to \infty$ för varje $\epsilon > 0$. Mer kräsna än så kan vi inte vara och därför kan vi approximera de ”okända” koefficienterna till $f_q(x)$ med de i den enklare funktionen $\frac{1}{1-x}e^{-H_q}$.

Om vi gömmer analysen igen kan vi sammanfatta resonemanget. Om vi kallar antalet permutationer av n element och med alla cykler större än q för $f(n,q)$, det vill säga det som ovan skulle vara

$$f_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n,q)\frac{x^n}{n!}$$

approximeras $f(n,q)$ enligt

$$\frac{f(n,q)}{n!} = e^{-H_q}$$

Detta var bara en kort glimt av genererande funktionernas enorma värld, som slingrar sig in i alla matematikens hörn och kanter. Genererande funktioner bygger broar mellan analys, algebra, kombinatorik och mycket annat. Dagens datorer gör dessutom rekursionerna åt oss och avlastar oss från att monotont räkna för hand. Vem har tid och lust att räkna, när man kan ägna sig åt matematik istället?

Litteraturförteckning

[1] Herbert S. Wilf, **Generatingfunctionology**, Academic Press, Inc., 1994.

[2] Ralph P. Grimaldi, **Discrete and combinatorial mathematics**, Pearson Education, Inc. USA 2004.

[3] Norman L. Biggs, **Discrete mathematics**, Oxford University Press, Oxford 2002.

[4] Arne Persson & Lars-Christer Böiers, **Analys i en variabel**, Studentlitteratur, Lund 2001.

[5] **Mathworld:** http://mathworld.wolfram.com, april 2006