

Finansiell Analyse

3. september 1999

Ny nulkupon-rentestrukturmodel

- Unibanks officielle nulkupon-rentestruktur skiftes ud, fra den nuværende Nelson-Siegel model til en mere kompliceret model.
 - Den nye model giver bedre fitning af priser på statsobligationer, og eliminerer blandt andet problemer med fejlagtige sving i den korte ende.
 - Nuværende store rentestrukturspænd i den korte ende forsvinder.
 - For højt-forrentede papirer stiger OAS, men andre nøgletal ændres kun lidt.
 - Ny rentestruktur bruges fra 6/9-99.
-

Problemstilling

De seneste ca. 5 år har Unibank Markets benyttet Nelson-Siegel modellen som nulkupon-rentestruktur model til beregning af nøgletal på danske obligationer. Som beskrevet i det følgende har denne model nogle uheldige egenskaber, som det er ønskværdigt at komme af med. Ses på indeværende år har Nelson-Siegel modellen performet specielt dårligt. Først på året havde renterne et opadgående sving i den korte ende, som modellen ikke fangede. Senere, siden juni, begyndte renterne at bøje kraftig nedad i den korte ende. Dette kunne Nelson-Siegel modellen ikke fange, med store negative YCSer i den korte ende til følge. Der er derfor introduceret en ny nulkupon-rentestrukturmodel, som performer væsentligt bedre.

Al beregning af nøgletal er baseret på en nulkupon-rentestruktur, der angiver hvorledes fremtidige betalinger skal diskonteres. Ved beregning af optionsjusterede nøgletal anvender Unibank Monte Carlo simulation, hvor de fremtidige rentescenarier er kalibreret således at de i snit giver anledning til observerede nulkuponpriser. Det er således nødvendigt at have en nulkupon-rentestruktur som priser de mest likvide

statsobligationer godt, samt har en fornuftig forward rentestruktur.

Nulkupon-rentestrukturen fremkommer ved fitning af en kurve til udvalgte statsobligationer, typisk de mest likvide stående lån og evt. skatkammerbeviser (håndtering af at stående lån og skatkammerbeviser har forskellig antal valørdage er beskrevet i appendix A). For at få forward renter uden vilde spring kræves en rentestruktur, som er rimelig blød. Samtidig ønsker vi at blive fri for sving i kurven, som der ikke er datamæssig grundlag for. Valg af en rentestrukturmodel er derfor nødvendigvis et kompromis mellem kurvemæssig "pænhed" og eksakt fitning af priser.

Hidtil har vi brugt Nelson-Siegel modellen ...

Hidtidig rentestruktur

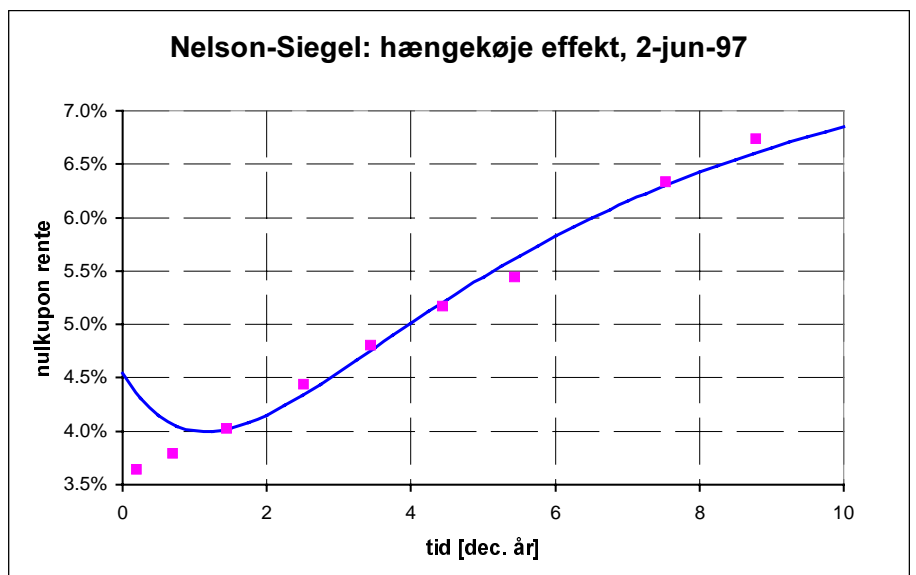
De sidste ca. 5 år har Unibanks officielle rentestruktur været en *Nelson-Siegel* model, givet ved

$$R^{NS}(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \frac{\tau}{t} - \beta_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

... som lider af en såkaldt "hængekøje-effekt"...

hvor $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$ er parametre bestemt ved fitning af priser. Fordelen ved modellen er at den er relativ simpel, meget stabil at estimere, og giver bløde kurver. Nelson-Siegel modellen er derfor ofte et populært valg. Ulempen er at kurven er meget stiv, hvilket kan medføre at for at prisfastsætte lange obligationer godt, så tvinges kurven til at bøje i den korte ende, uden at der er datamæssig grundlag for dette. Dette kaldes for *hængekøje-effekten*, og et typisk eksempel på denne effekt er vist i figur 1. De grå punkterne er bootstrappede renter for de indgående løbetider, og viser at der ikke er datamæssig grundlag for opsvinget i den korte ende.

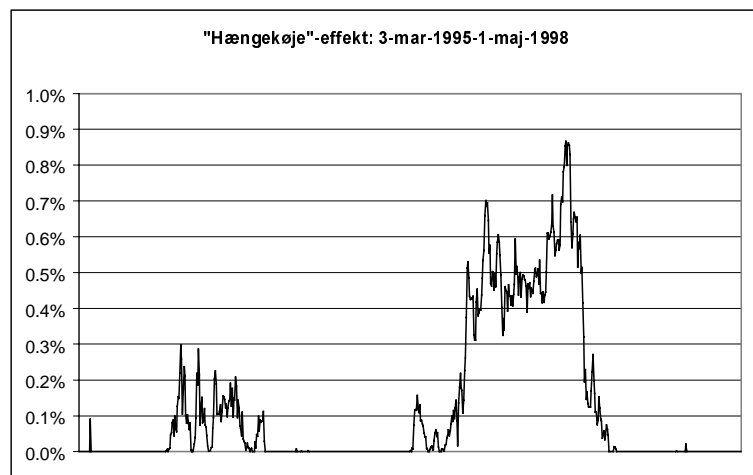
Figur 1.



Hængekøje-effekt har historisk været markant...

Hvor udpræget hængekøje-effekten kan være er illustreret i figur 2, hvor størrelsen af hængekøjen er vist for Nelson-Seigel modellen for daglige observationer i perioden 3-mar-95 til 1-maj-98. Uden for denne periode har rentestrukturen haft *rigtige* opsving i den korte ende, hvorfor perioden er afgrænset til dette tidsrum. Størrelsen af effekten er målt som forskellen på den minimale rente og renten til tiden 0. Betragtes figur 1 er hængekøje-effekten i dette tilfælde 0.5%. Fejlen på rentestrukturen i den helt korte ende er dog endnu større; i figur 1 er der næsten 1% overvurdering af den helt korte rente.

Figur 2.



Som det ses har hængekøje-effekten været hyppigt forekommende. Denne egenskab er klart uønsket, og er en motivation for at finde en alternativ model.

Andre rentestrukturmodeller

Generelt kan vi klassificere rentestrukturmodeller som eksakte, økonomiske, eller matematiske.

Eksakte modeller er modeller som prisfastsætter fejlfrit. Et prominent eksempel er *bootstrap*. En bootstrap kurve er en lineær interpolation mellem renten for hver maturity. Dette gør at kurven ofte har mange knæk, hvilket giver anledning til meget urealistiske forward renter. Denne kurve kan tit være nyttig til at få et overblik over hvordan statspapirerne ligger i forhold til hinanden, men opfylder ikke kravet om at have fornuftige forward renter.

Med økonomiske modeller menes modeller baseret på en økonomisk teori, f.eks. *Cox-Ingersoll-Ross*, *Vasicek*, eller *Longstaff-Schwartz*. Disse modeller minder noget om Nelson-Siegel modellen, uden dog at være bedre.

Matematiske modeller indbefatter modeller som er rent matematiske, uden nogen underliggende teori for hvorfor de ser ud som de gør. Herunder har vi *Nelson-Siegel*, *extended Nelson-Siegel*, polynomier, serier af ortogonale polynomier, kubisk splines på renter eller diskonteringsfaktorer, og rationale funktioner.

Extended Nelson-Siegel modellen er en udvidelse af Nelson-Siegel modellen med et ekstra led. Denne model afviger ikke væsentligt fra Nelson-Siegel modellen, men det ekstra led giver den lidt mere frihed i fitningen. Den prisfastsætter således lidt bedre og hængekøje-effekten reduceres, uden at den dog er fuldstændig elimineret.

Polynomier, serier af ortogonale polynomier og splines ligninger hinanden. De priser potentielt godt, men giver mange bump og sving på kurven, med urealistiske forward renter til følge.

Rationale funktioner er brøker af polynomier. På grund af sådanne funktioners matematiske egenskaber vil de ofte opføre sig bedre end polynomier, men har nogle af de samme problemer, og kan derfor hellere ikke bruges helt ukritisk. Vi har dog fundet at for den korte ende at rentekurven, hvor der typisk er mange obligationer, fitter sådanne modeller bedre end Nelson-Siegel eller extended Nelson-Siegel modellen, uden at give fejlagtige hængekøjer.

Ny hybrid rentestruktur kombinerer det bedste af en rational funktion og extended Nelson-Siegel modellen ...

Nyt approach - hybrid model

Ovenstående erfaringer kan opsummeres ved følgende: i den korte ende klarer en rational funktion sig bedst, hvorimod den ofte giver uønskede sving længere ude. Her klarer extended Nelson-Siegel modellen sig derimod noget bedre, da den giver en mere blød interpolation. I den korte ende er den dog stadig ikke fri for hængekøje-effekten. På baggrund af dette ændres Unibanks officielle renestruktur til en hybrid model, hvor extended Nelson-Siegel modellen bruges for længere løbetider, og en rational funktion for de korte.

Extended Nelson-Siegel modellen er givet ved

$$R^{XNS}(t) = a^2 + (b^2 - a^2) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + d \left(\frac{1 - \exp(-t/\tau)}{t/\tau} - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{t}{2\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

og en rational funktion som

$$R^{Rational}(t) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n t^n}{1 + \sum_{n=1}^N b_n t^n}$$

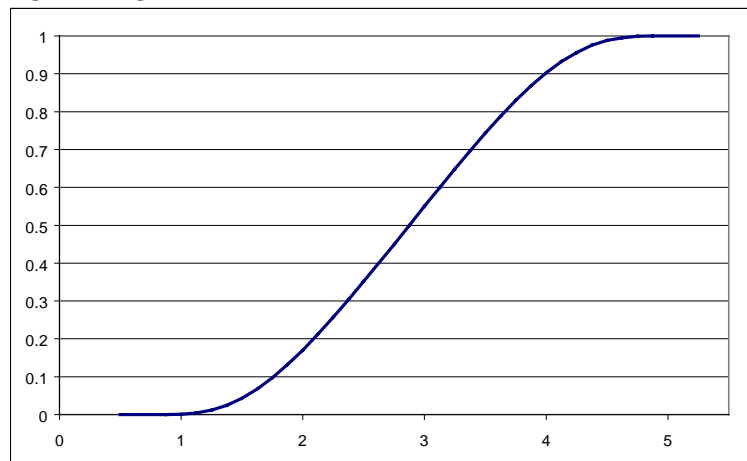
Den hybride rentestruktur defineres som

$$R^{Hybrid}(t) = \left(1 - S\left(\frac{t-t_0}{t_c}\right)\right) R^{Rational}(t) + S\left(\frac{t-t_0}{t_c}\right) R^{XNS}(t)$$

S-kurven giver en blød overgang mellem de to modeller. t_0 er det punkt hvor de to modeller sammenkædes, og t_c angiver hvor skarp overgangen er. I Unibanks rentestruktur bruges $t_0 = 3$ år, $t_c = 1$ år, og for den rationale funktion haves $N=4$.

I figur 3 er vist hvorledes denne overgangsfunktion ser ud.

Figur 3. Sigmoid funktion.



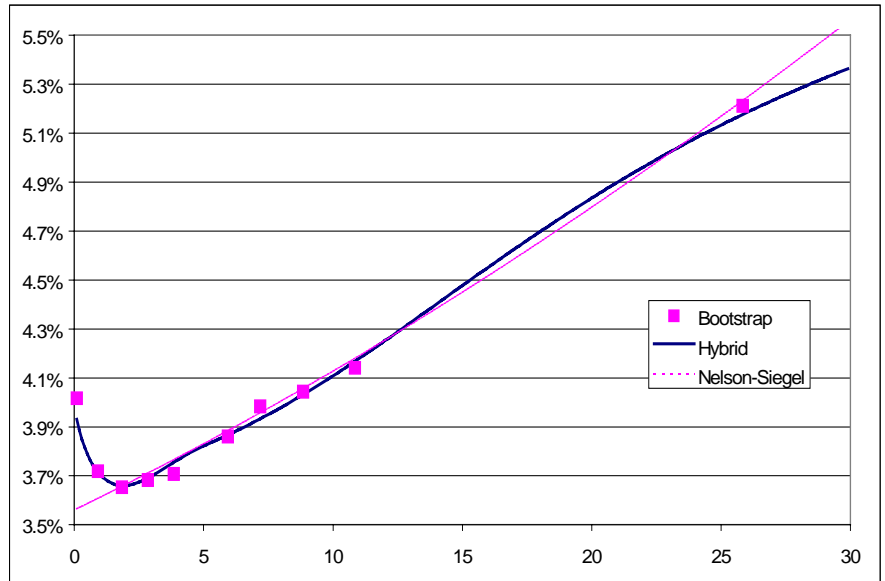
Evaluering

For at vurdere hvordan hybrid modellen performerer i praksis er det illustrativt at betragte den situation der har været i indværende år.

I første halvdel af 1999 har Nelson-Siegel modellen ikke bøjet nok opad...

I figur 4 ses situationen som den var i en lang periode først på året. Af bootstrap-renterne ses at den rigtig rentestruktur skulle krumme opad i den korte ende, men at Nelson-Siegel modellen ikke kunne dette. Altså den modsatte situation af de forgangne år hvor Nelson-Siegel modellen har haft en tendens til at krumme opad, når den ikke skulle.

Figur 4. Rentestrukturer pr. 5-jan-99



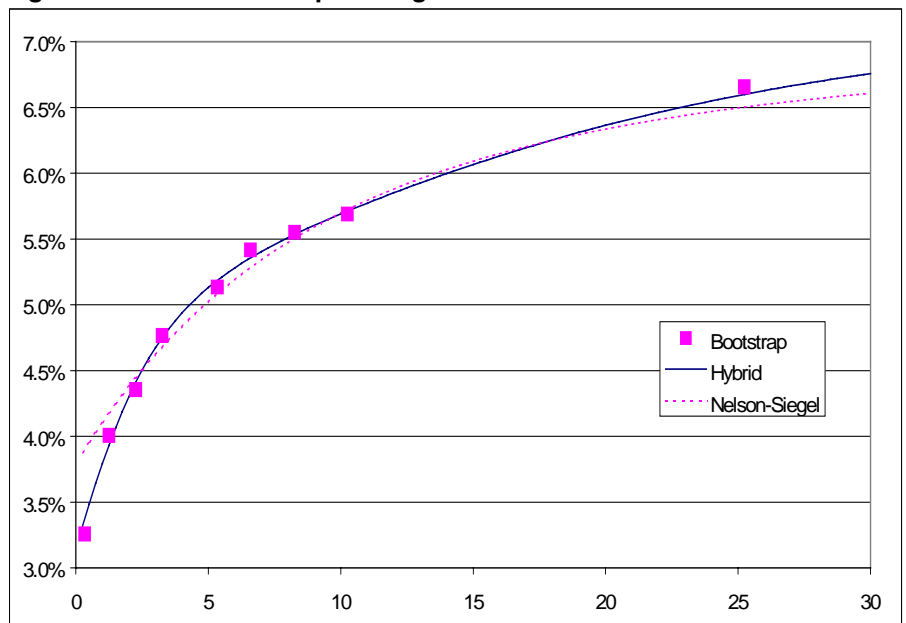
... men i sidste halvår 1999 har Nelson-Siegel modellen bøjet for lidt nedad ...

I figur 5 er situationen fra efteråret vist hvor bootstrap-renterne er krummet kraftigt nedad. Nelson-Siegel modellen er for stiv til at krumme så meget, og fanger derfor ikke denne opførsel.

... derimod har hybrid rentestrukturen performeret godt.

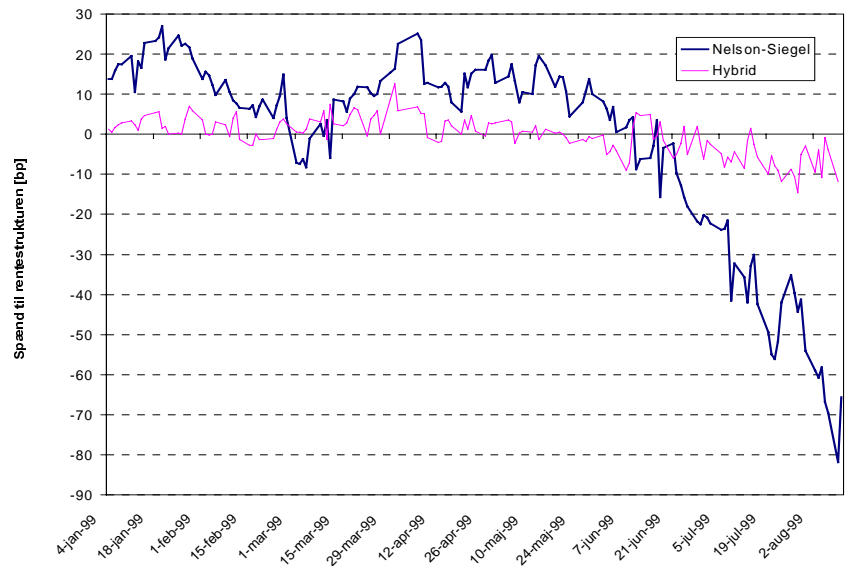
I begge tilfælde klarer hybrid modellen uden problemer at fange den rigtige opførsel.

Figur 5. Rentestrukturer pr. 9-aug-99

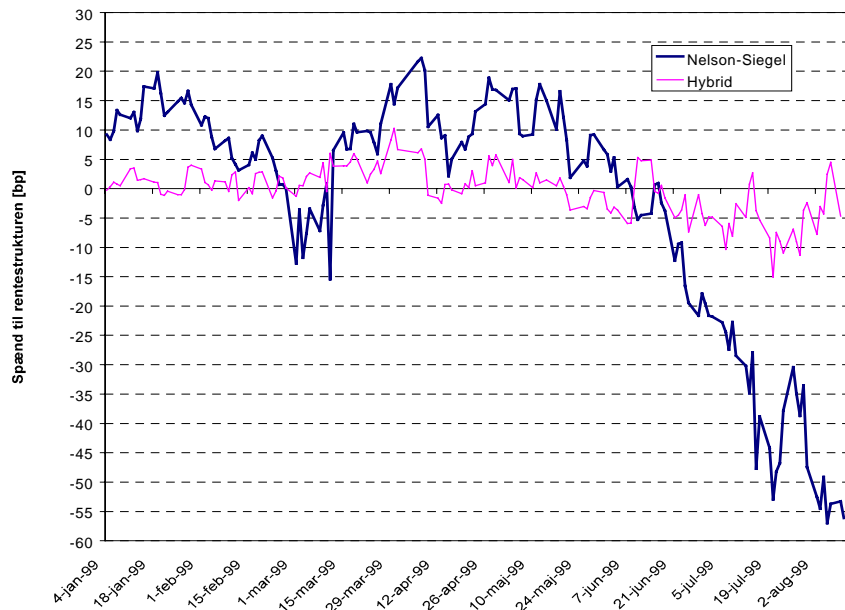


I hvor stor udstrækning disse fænomener har forekommet kan ses ved at betragte rentestrukturspændet for nogle korte statsobligationer i figur 6 og 7. Første halvdel af året ses et relativt højt positivt spænd for Nelson-Siegel modellen, hvorimod det sidst på året er blevet meget negativt. I modsætning hertil har hybrid modellen performet stabilt i hele perioden.

Figur 6. Historisk rentestrukturspænd for 6% St. 1999



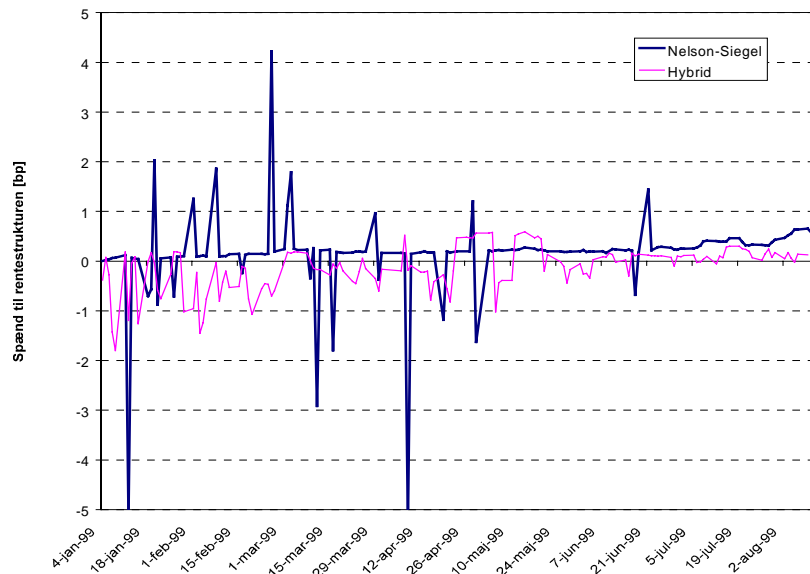
Figur 7. Historisk rentestrukturspænd for 4% Stgb. 2000



Nelson-Siegel modellen har nogle gange haft problemer i den lange ende...

I den lange ende af kurven har Nelson-Siegel modellen ikke haft samme problemer, men som det ses i figur 8 er der flere dage hvor Nelson-Siegel modellen har givet rentestrukturspænd i den lange ende på op til 5bp.

Figur 8. Historisk rentestrukturspænd for 7% St. 2024



Hybrid rentestruktur priser 30% bedre ...

Ved estimation af en rentestruktur model søges standardafvigelsen af misprisfastsætningen på de papirer som indgår minimeret. Målt historisk siden 1994 findes at denne standardafvigelsen falder med ca. 30% ved skift fra Nelson-Siegel modellen til hybrid modellen.

Ikke markant ændringer i nøgletal, men korte papirer stiger i OAS...

Nøgletal

Sammenlignende nøgletal er regnet pr. 9-aug 1999 på Nelson-Siegel rentestrukturen og på hybrid rentestrukturen, og kan ses i nedenstående tabel. De to rentestrukturer er vist i figur 5 for denne dato.

Generelt ændres nøgletal ikke markant. Den største ændring ses på højt-forrentende, korte papirer. Da den nye rentestruktur ligger lavere end Nelson-Siegel modellen i den korte ende medfører dette højere OASer på disse papirer.

Tabel. Sammenlignende nøgletal pr. 9-aug-1999

<i>Isin</i>	<i>Navn</i>	<i>Ny OAS</i>	<i>Gml. OAS</i>	<i>Diff. OAS</i>	<i>Ny BPV</i>	<i>Gml. BPV</i>	<i>Diff. BPV</i>	<i>Ny CVX</i>	<i>Gml. CVX</i>	<i>Diff. CVX</i>
DK0002005065	4% UNIK A 2009	34	38	-4	4.02	4.03	-0.01	0.20	0.21	-0.01
DK0002004928	5% UNIK A 2019	78	81	-3	6.57	6.61	-0.04	0.63	0.68	-0.06
DK0002004845	5% UNIK A 2029	73	76	-3	7.83	7.86	-0.03	0.92	0.94	-0.02
DK0002003797	6% UNIK A 2009	88	88	0	3.62	3.47	0.15	-1.41	-1.08	-0.33
DK0002000348	6% UNIK A. 2016	115	117	-2	5.77	5.66	0.11	0.12	0.06	0.06
DK0002003953	6% UNIK A 2019	119	121	-2	6.57	6.34	0.23	0.35	0.05	0.30
DK0002000421	6% UNIK A. 2026	101	103	-2	7.52	7.50	0.02	0.58	0.49	0.09
DK0002004092	6% UNIK A 2029	107	111	-4	7.73	7.71	0.02	0.72	0.68	0.05
DK0002001825	7% UNIK A. 2016	159	157	2	5.14	5.01	0.14	-1.02	-1.19	0.17
DK0002004175	7% UNIK A 2019	169	167	2	5.86	5.66	0.19	-1.27	-1.43	0.16
DK0002001908	7% UNIK A. 2026	136	137	-1	7.19	6.88	0.31	-0.19	-0.76	0.58
DK0002004258	7% UNIK A 2029	150	151	-1	7.70	7.19	0.51	-0.23	-0.82	0.59
DK0002002047	8% UNIK A. 2016	201	195	5	3.31	3.22	0.09	-1.54	-1.67	0.14
DK0002004332	8% UNIK A 2019	225	219	5	3.87	3.75	0.12	-1.79	-1.94	0.16
DK0002002120	8% UNIK A. 2026	188	183	5	4.71	4.56	0.15	-2.25	-2.44	0.19
DK0002004415	8% UNIK A 2029	208	202	5	5.07	4.90	0.17	-2.39	-2.62	0.23
DK0002003011	9% UNIK A. 2006	104	95	9	1.62	1.55	0.07	-0.78	-0.94	0.16
DK0009719361	9% NYK A. 2010	127	120	7	1.72	1.65	0.07	-1.05	-1.12	0.07
DK0009732034	9% NYK A. 2012	159	151	8	1.86	1.80	0.06	-1.14	-1.21	0.07
DK0002002393	9% UNIK A. 2016	169	159	10	1.83	1.75	0.08	-1.47	-1.61	0.14
DK0009732380	9% NYK A. 2022	108	98	10	1.62	1.54	0.08	-1.63	-1.81	0.18
DK0009331043	9% BRF A. 2024	137	127	10	1.88	1.80	0.08	-1.88	-2.06	0.18
DK0009713166	10% NYK A. 2007	94	88	6	1.51	1.43	0.08	-0.94	-1.10	0.16
DK0009717159	10% NYK A. 2010	90	82	8	1.26	1.19	0.08	-1.12	-1.27	0.15
DK0009732547	10% NYK A. 2012	100	90	9	1.05	0.98	0.06	-1.03	-1.18	0.14
DK0009732703	10% NYK A. 2022	33	19	14	0.17	0.08	0.09	-0.76	-0.88	0.12
DK0009320277	11% BRF A. 2010	101	93	9	0.92	0.84	0.08	-1.06	-1.22	0.16
DK0009716698	11% NYK A. 2020	131	118	13	0.45	0.38	0.07	-0.84	-1.02	0.18
DK0009717902	12% NYK A. 2010	17	6	11	0.19	0.12	0.07	-0.73	-0.98	0.24

*Morten Holm Pedersen
Modeller
3333 6683
MHOLM@unibank.dk*

Unibank Markets er en afdeling i Unibank A/S.

Dette materiale er udarbejdet af Unibank Markets, en afdeling i Unibank A/S, som generelt informationsmateriale til personlig orientering for de investorer, som Unibank Markets har udleveret materialet til. anbefalinger skal ikke opfattes som tilbud om køb eller salg af de pågældende papirer. Materialet er alene udarbejdet på basis af offentligt tilgængeligt materiale. Kilderne anses for at være pålidelige, men Unibank Markets garanterer ikke for, at oplysningerne er nøjagtige eller komplette. Materialet er gennemgået omhyggeligt og vurderingerne er foretaget efter vort bedste skøn. Alle vurderinger og estimater gælder pr. den anførte dato og kan ændres uden videre. Unibank A/S påtager sig intet ansvar for eventuelle dispositioner foretaget på baggrund af materialet. Unibank A/S og/eller andre selskaber i Unidanmark-gruppen kan have lange eller korte positioner af værdipapirer omtalt i materialet, samt foretage køb eller salg af disse værdipapirer. Endvidere kan Unibank A/S og/eller andre selskaber i Unidanmark-gruppen være involveret i corporate finance aktiviteter, commercial-paper programmer eller emissioner eller andre bankaktiviteter for virksomheder, der er omtalt i materialet. Mekanisk, fotografisk eller anden gengivelse af hele materialet eller dele deraf er ikke tilladt ifølge gældende lov om ophavsret.

Unibank A/S
Unibank Markets

Torvegade 2
DK-1786 København V

Telefon 33 33 33 33

Appendix 1: Håndtering af forskellige valørdage

For at få flere datapunkter i den korte ende af rentestrukturen kan bruges både skatkammerbeviser, med 2 dages valør, og stående lån, med 3 dages valør. Dette gøres ved at operere med en 0-valør dages rentestruktur som så fremskrives n dage for at prisfastsætte et papir med n dages valør. Resultatet af fitningen er således denne 0-valør dages rentestruktur, som så kan fremskrives 3 dage for at få den sædvanlige rentestruktur.