

# Binomialmodeller

Analys av dess tillämpning i en spelstrategi  
och för prissättning av optioner

Kandidatuppsats i Matematik  
av  
Jens Holmberg



# Binomialmodeller

---

## Referat

I denna uppsats behandlar vi två problem där tyngdpunkten ligger i analysen av dess respektive binomialmodell. Inledningsvis analyserar vi ett spel, till vilket vi söker en optimerad spelstrategi, och tittar närmare på hur små förändringar av förutsättningarna påverkar utgången av spelet. Då de bakomliggande beräkningarna till detta problem är omfattande har vi genomgående använt oss utav datorsimuleringar för att lättare åskådliggöra problemets natur.

Vidare ger vi en härledning av Black-Scholes formel för prissättning av en europeisk aktieoption med hjälp av den binomialmodell som presenterades av Cox, Ross och Rubinstein år 1979. Denna modell bygger på att tiden fram till optionens mognad delas upp i ett större antal tidssteg där utvecklingen av aktiepriset mellan varje tidssteg antas följa någon av två möjliga vägar. Vi visar hur optionspriset med hjälp av denna modell konvergerar mot Black-Scholes optionsformel då vi använder allt fler tidssteg.

Vi ger också ett kompletterande bevis av centrala gränsvärdesatsen då det visar sig att denna sats är av avgörande vikt i analysen av båda dessa problem.



# Förord

---

Detta är en kandidatuppsats i matematik vilken är utförd på matematiska institutionen vid Stockholms universitet. Professor Jan-Erik Björk har varit min examinator och universitetslektor Yishao Zhou min handledare.

## Erkännanden

Jag vill tacka både min examinator Jan-Erik Björk och handledare Yishao Zhou för att under arbetets gång kommit med värdefulla synpunkter och intressanta frågeställningar.

Måsklappan, Stockholms skärgård juli 2003

Jens Holmberg



# Innehåll

---

1 Inledning .....	1
2 Analys av en optimerad spelstrategi .....	3
2.1 Problemställning .....	3
2.2 Grundläggande analys .....	3
2.2.1 Gränsvärdesanalys .....	6
2.3 Inverkan av ränteeffekter .....	8
2.3.1 Gränsvärdesanalys .....	9
3 Härledning av Black-Scholes optionsformel.....	15
3.1 Fastställning av binomialmodellens parametrar .....	15
3.2 Binomialmodellens konvergens .....	16
4 Slutsatser .....	23
Referenser .....	25
Appendix.....	27
A1 Bevis .....	27
Centrala gränsvärdessatsen .....	27
Harmoniska serien .....	33





# 1 Inledning

---

Vikten av att beskriva verkligheten med hjälp av matematik har alltid varit stor. Det visar sig dock ofta svårt att ta hänsyn till alla faktorer varav vi vanligtvis gör vissa förenklingar och antaganden för att göra problemen mer hanterbara. På detta sätt formar vi en godtagbar matematisk modell av verkligheten vilken vi sedan kan analysera.

I denna uppsats tittar vi närmare på en sådan modell vilken ger svar på hur vi kan värdera aktieoptioner. Denna modell, allmänt kallad binomialmodellen, bygger på att tiden  $t$  fram till optionens mognad diskretiseras i ett större antal tidssteg. Vidare görs antagandet att utvecklingen av aktiepriset mellan varje tidssteg kan anta något av två värden. Utvecklingen av aktiepriset bildar således ett binomialträd där löven representerar de möjliga värden aktien kan anta vid tiden  $t$ . För att nu kunna värdera motsvarande option måste vi göra rimliga antaganden av hur denna utveckling kan se ut. Vi kommer att resonera kring dessa frågor men också analysera resultaten av att använda allt mindre tidssteg för att på detta sätt simulera utvecklingen i kontinuerlig tid.

Inledningsvis analyserar vi ytterligare en binomialmodell som framträder ur ett spel som bygger på att vi får singla ett mynt maximalt  $n$  gånger, men med möjligheten att sluta när som helst innan dess. Med hjälp av en given vinstformel är nu vårt mål att avgöra den förväntade vinsten. Vi visar hur vi kommer fram till en optimal och generell strategi vilken vi ska följa under spelet gång. Vi undersöker också konsekvenserna av att låta ränterelaterade förluster ingå i beräkningarna av vår aktuella vinst. Under förutsättningen att vi får använda ett obegränsat antal kast visar det sig att dessa ränteförluster får stor inverkan för utgången av spelet.



## 2 Analys av en optimerad spelstrategi

---

I detta kapitel kommer vi att analysera ett till synes relativt enkelt problem men som visar sig innehålla en rad intressanta och mer djupgående observationer. Vi kommer till en början angripa problemet numeriskt där vi tar hjälp av datorsimuleringar men också, när det är möjligt, visa hur vi kommer fram till samma resultat rent analytiskt.

### 2.1 Problemställning

Ett spel går ut på att singla ett mynt maximalt  $n$  gånger. För varje krona ökar vinsten med ett och minskar med ett för varje klave. Vinsten  $v$  efter  $k$  kast ges då av

$$v(h, k) = 2h - k \quad (1)$$

där  $h$  är antalet kast med krona som utgång. Vi ska senare analysera problemet då vinsten är beroende av räntan  $r$  enligt formeln

$$v(h, k, r) = (2h - k) \cdot e^{-rk} \quad (2)$$

vilket då kan tolkas som nuvärdet av den vinst som ges av (1) om tiden representeras av  $k$ . Vinstformeln (1) är således ett specialfall av (2) med  $r=0$ . Vidare får vi när som helst sluta innan vi gjort alla  $n$  kasten. Om vinsten är negativ då vi slutar sätter vi vinsten noll. Med nämnda kriterier är nu målet att hitta den optimala spelstrategin och med hjälp av denna beräkna den förväntade vinsten.

### 2.2 Grundläggande analys

Inledningsvis bestämmer vi den optimala spelstrategin. Då målet är att maximera vinsten är det bara intressant att fortsätta efter  $k$  kast om den förväntade vinsten, då vi fortsätter, är större än den aktuella vinsten  $v$ . Vi definierar denna strategi som

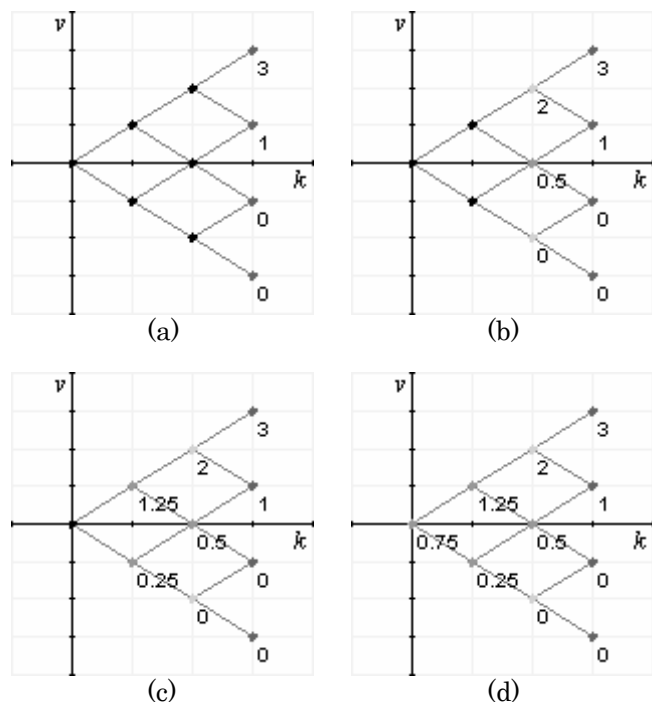
$$\Pi_n(h, k) = \max(v(h, k), \frac{1}{2}\Pi_n(h, k+1) + \frac{1}{2}\Pi_n(h+1, k+1)) \quad (3)$$

där då  $k = n$

$$\Pi_n(h, n) = \begin{cases} v(h, n), & v(h, n) \geq 0 \\ 0, & v(h, n) < 0 \end{cases}$$

Denna generella strategi leder till att vi kan beräkna den förväntade vinsten. Vi börjar med att beräkna den förväntade vinsten om vi fortsätter för alla möjliga vinster efter  $n-1$  kast. Detta görs genom att för varje vinst efter  $n-1$  kast beräkna medelvärdet av de två möjliga vinsterna efter  $n$  kast. Vi kan nu avgöra om vi ska fortsätta eller inte för alla möjliga vinster efter  $n-1$  kast. Genom att fortsätta på detta sätt och successivt beräkna

de förväntade vinsterna baklänges får vi fram den förväntade vinsten vid början av kastserien,  $\Pi_n(0, 0)$ . FIGUR 1 illustrerar hur  $\Pi_3(0, 0) = 0.75$  beräknas.



**FIGUR 1** Beräkning av  $\Pi_3(0, 0) = 0.75$ . Gråa punkter indikerar att vi ska fortsätta, ljusgrå att det inte spelar någon roll om vi fortsätter eller stannar och mörkgrå att vi ska stanna. (a) Beräkningens början. (b)-(c) Mellanliggande beräkningar. (d) Sista beräkningen.

En intressant fråga är om det finns möjligt att beräkna  $\Pi_n(0, 0)$  utan att successivt beräkna  $\Pi_n(h, k)$  baklänges. För att svara på det kan vi studera skillnaden  $\Pi_{k+1}(0, 0) - \Pi_k(0, 0)$ .  $\Pi_n(0, 0)$  kan då uttryckas som den teleskopande summan

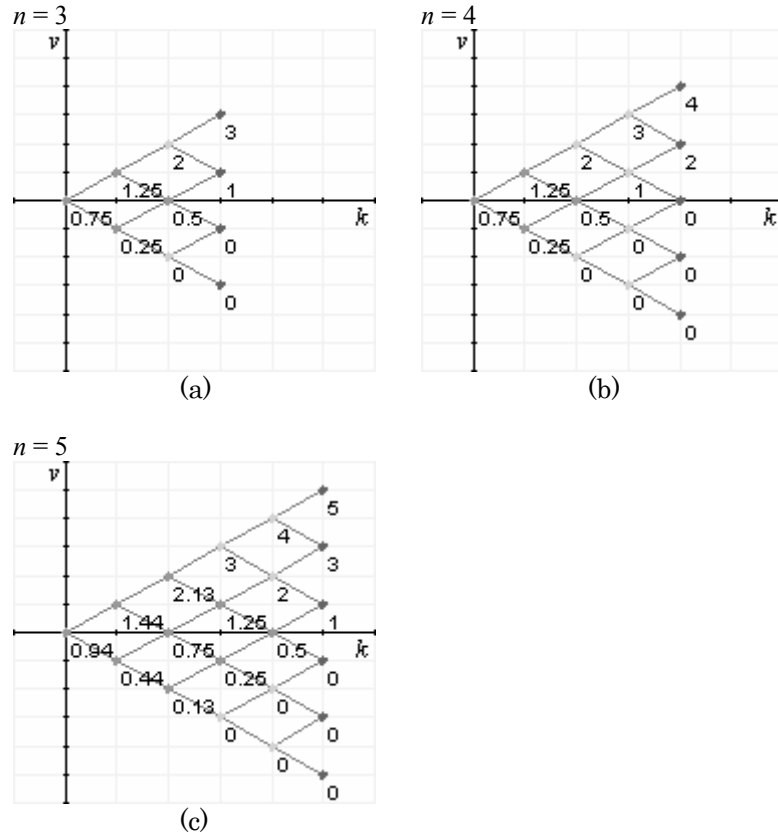
$$\sum_{k=0}^{n-1} \Pi_{k+1}(0, 0) - \Pi_k(0, 0) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

där  $\Pi_0(0, 0) = v(0, 0) = 0$ .

Av figuren framgår att  $\Pi_3(h, k) \geq v(h, k)$  vilket betyder att vi alltid kan fortsätta kasta. I de fall  $\Pi_3(h, k) = v(h, k)$  är det naturligt att stanna men vi kan förstås lika gärna fortsätta, i vårt fall gäller detta endast då  $h = 2$  och  $k = 2$  vilket ger  $\Pi_3(2, 2) = v(2, 2) = 2$ .

Generellt gäller att  $\Pi_n(h, k) \geq v(h, k)$  då  $v(h, k) = 2h - k$ . Detta är sant pga. att  $1/2 \cdot v(h, k+1) + 1/2 \cdot v(h+1, k+1) = 2h - k = v(h, k)$  samt om  $v(h, k) < 0$  då vi stannar sätts  $v(h, k)$  till noll. Vi kan nu bestämma oss för att alltid utnyttja alla  $n$  kasten.

Vidare observerar vi att det enda fallet då vi tjänar på att få ytterligare ett kast efter  $n$  kastade är när vi befinner oss i punkten  $(k, v) = (n, 0)$ . Av detta följer att  $n$  måste vara jämn, se FIGUR 2.



**FIGUR 2** Att få ytterligare ett kast efter  $n$  kastade är bara fördelaktigt om vi befinner oss i punkten  $(k, v) = (n, 0)$ . **(a)-(b)**  $\Pi_4(0, 0) - \Pi_3(0, 0) = 0$ . **(b)-(c)**  $\Pi_5(0, 0) - \Pi_4(0, 0) > 0$ . Färgerna har samma betydelse som i FIGUR 1.

Den förväntade vinstökningen av ett extra kast ges då av

$$\Pi_{2k+1}(0,0) - \Pi_{2k}(0,0) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

dvs. sannolikheten att vi fått lika många krona som klave efter  $n = 2k$  kast multiplicerat med den förväntade vinsten av kast  $n + 1$ . Vi kan använda denna formel i och med att  $\Pi_n(h, k) \geq v(h, k)$  för alla vägar som leder till punkten  $(k, v) = (n, 0)$ . Det finns alltså *ingen* väg till  $(n, 0)$  där vi skulle ha slutat innan vi kastat alla  $n$  kasten.  $\Pi_n(0, 0)$  kan nu uttryckas som

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \Pi_{2k+1}(0,0) - \Pi_{2k}(0,0) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

viket slutligen då ger

$$\Pi_n(0,0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

där  $\Pi_0(0, 0) = v(0, 0) = 0$ .

Ett alternativt sätt att beräkna  $\Pi_n(0, 0)$  är att summera de  $v(h, k) = x > 0$  multiplicerat med sannolikheten att  $v(h, k) = x$  då  $k = n$ .

Då antalet kast med krona som utgång,  $h$ , efter  $k$  kast är binomialfördelat [7] får vi att

$$\Pi_n(0,0) = \sum_{h=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^n \binom{n}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^n (2h-n) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

där  $\Pi_0(0,0) = v(0,0) = 0$ .

### 2.2.1 Gränsvärdesanalys

Intuitivt borde gränsvärdet av  $\Pi_n(0,0)$  vara oändligheten då  $n \rightarrow \infty$ . Detta kan motiveras av att den förväntade vinsten, om vi fortsätter, aldrig är mindre än den aktuella. Om vi dessutom får ett oändligt antal kast är den förväntade vinsten alltid större än den aktuella,  $\Pi_\infty(h,k) > \Pi_n(h,k)$ .

Sedan tidigare har vi att

$$\Pi_n(0,0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

och då  $n \rightarrow \infty$  kan vi uttrycka gränsvärdet,  $\Pi_\infty(0,0)$ , som

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_k \quad (9)$$

där

$$a_k = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \quad (10)$$

För att bevisa att  $\Pi_\infty(0,0) = \infty$  kan vi utnyttja att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty \quad (11)$$

Om vi nu kan visa att  $a_k \geq b_k$  för alla  $k \geq q$  följer att  $\Pi_\infty(0,0) = \infty$ . Detta visas med hjälp av ett induktionsbevis [8]. Vi börjar med att konstatera att  $a_k \geq b_k$  för  $k=q=4$  då  $a_4 = 0.2734375 \geq 0.25 = b_4$ . Om kvoten  $\lambda_k = a_{k+1}/a_k \geq b_{k+1}/b_k = \mu_k$  för alla  $k \geq q$  är följaktligen  $a_{k+1} \geq b_{k+1}$  för alla  $k \geq q$ .

Då

$$a_k = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \quad (12)$$

följer att

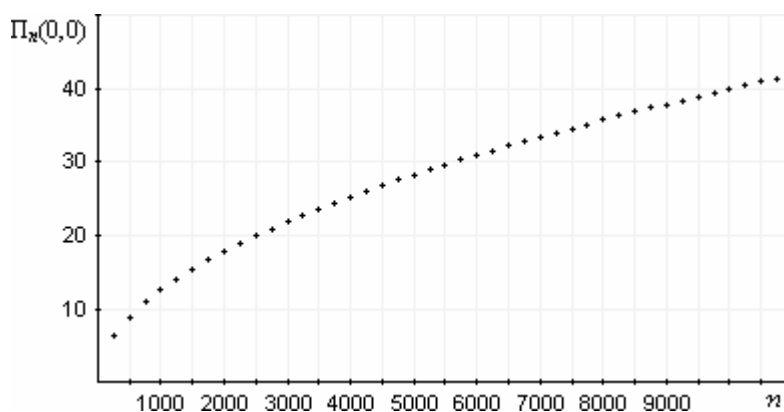
$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2(k+1)) \cdot (2(k+1)-1) \cdot \dots \cdot ((k+1)+1)}{\frac{(k+1) \cdot ((k+1)-1) \cdot \dots \cdot 1}{(2k) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{(2(k+1)) \cdot (2(k+1)-1)}{(k+1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(2k+2) \cdot (2k+1)}{(k+1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}\quad (13)$$

Att  $\lambda_k \geq \mu_k$  gäller för  $k = i = 4$  är sant då  $\lambda_4 = 0.9 \geq 0.8 = \mu_4$ . Vidare får vi

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1} &= \frac{(2(i+1)+2)(2(i+1)+1)}{((i+1)+1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{i+1}{(i+1)+1} = \mu_{i+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4i^2 + 14i + 12 \geq 4i^2 + 12i + 8 \Leftrightarrow 2i + 4 \geq 0\end{aligned}\quad (14)$$

vilket betyder att  $a_{k+1} \geq b_{k+1}$  för alla  $k \geq 4$ . Detta bevisar i sin tur att  $\Pi_\infty(0, 0) = \infty$ .

FIGUR 3 illustrerar hur  $\Pi_n(0, 0)$  växer med  $n$ .



FIGUR 3 Grafen visar hur  $\Pi_n(0, 0)$  växer med  $n$ .

Av grafen att döma tycks  $\Pi_n(0, 0)$  växa som  $an^b$ . Med hjälp av minsta kvadratmetoden [1, 3] kan vi interpolera och hitta approximativa värden för  $a$  och  $b$ . TABELL 1 visar resultatet då  $i$  stycken interpoleringspunkter har använts. För varje  $i$  har motsvarande värden för  $n$  valts jämnt fördelade i intervallet  $]0, 10\,000]$ .

TABELL 1 Approximativa värden för  $a$  och  $b$ .

$i$	$a$	$b$
2	0.3987998065360668	0.5000360673755608
5	0.3987068947807116	0.5000622914332951
10	0.3986125260196032	0.5000895309644164
20	0.3984925912070882	0.5001245765813565

Värdena i TABELL 2 visar  $|\Pi_n(0, 0) - an^b|$  för de  $a$  och  $b$  som återfinns i TABELL 1 för respektive  $i$ .

**TABELL 2** Feluppskattning.

$n \backslash i$	20 000	30 000	40 000	50 000
2	0.000705232563	0.001586334157	0.002493412590	0.003394183320
5	0.002211867323	0.004166362350	0.006074582615	0.007920138135
10	0.004076667102	0.007213567522	0.010218577095	0.013095628828
20	0.006680497288	0.011384736388	0.015839729572	0.020078155385

Från TABELL 2 ser vi att de bästa värdena för  $a$  och  $b$  fås då vi endast använder två interpoleringspunkter och således löser ett icke överbestämt ekvationssystem.

Om vi nu använder interpoleringspunkterna  $(25\ 000, \Pi_{25\ 000}(0, 0))$  och  $(50\ 000, \Pi_{50\ 000}(0, 0))$  för att hitta approximativa värden för  $a$  och  $b$  borde det ge relativt bra approximationer för  $\Pi_n(0, 0)$  då  $n$  ligger runt 250 000. Dessa beräkningar ger  $a = 0.39890915033792224$  och  $b = 0.5000072134752016$  och vår approximativa formel för  $\Pi_n(0, 0)$  blir således

$$\Pi_n(0,0) \approx 0.39890915033792224n^{0.5000072134752016} \quad (15)$$

då  $0 \leq n \leq 250\ 000$ .

Att vi inte använt större  $n$  än 50 000 i våra beräkningar för  $\Pi_n(0, 0)$  beror på att tidsåtgången blir stor, tidsåtgången växer kvadratisk med  $n$ . Samtliga beräkningar är utförda med hjälp av programmeringsspråket C++ vilket visade sig vara ungefär 10 procent snabbare än programmeringsspråket Java (och långt mycket snabbare än matematikprogrammet Mathematica). Exempelvis tog det knappt 9 minuter att bestämma  $\Pi_{50\ 000}(0, 0)$ .

Faktum är att det går att hitta ett mer exakt uttryck för  $\Pi_n(0, 0)$  då  $n \rightarrow \infty$  genom att studera problemet ur en analytisk synvinkel snarare än numerisk. Då varje kast kan ses som en slumpvariabel,  $X_i$ , vilken kan anta värdena -1 eller 1, bildar summan av  $n$  sådana slumpvariabler de möjliga utfallen av  $n$  kast. Vidare är  $\{X_i\}$  oberoende och lika fördelade vilket enligt centrala gränsvärdesatsen betyder att fördelningen för

$$\sum_{i=1}^n X_i = Z_n \quad (16)$$

konvergerar mot normalfördelningen då  $n \rightarrow \infty$  med  $E[Z_n] = 0$  och  $\text{Var}(Z_n) = n$  [6]. Om vi nu betecknar de vinster som efter  $n$  kast är större än noll med  $Z_n^+$  kan vi uttrycka  $\Pi_n(0, 0)$  enligt

$$\Pi_n(0,0) = E[Z_n^+] = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2n}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Att vi inte tar med de negativa vinsterna beror på, i enlighet med förutsättningarna, att dessa sätts till noll.

## 2.3 Inverkan av ränteeffekter

Då  $v(h, k) = 2h - k$  är  $v(h, k) = v(h + i, k + 2i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  Vi får alltså samma vinst om skillnaden mellan antalet krona och klave är den



samma oavsett av hur många kast som gjorts. Man skulle dock kunna tänka sig att samma skillnad ger lägre vinst, pga. ränteförluster, ju fler kast vi utnyttjar. För att uppnå detta definierar vi nu vinsten  $v$  som

$$v(h, k, r) = (2h - k) \cdot e^{-rk} \quad (18)$$

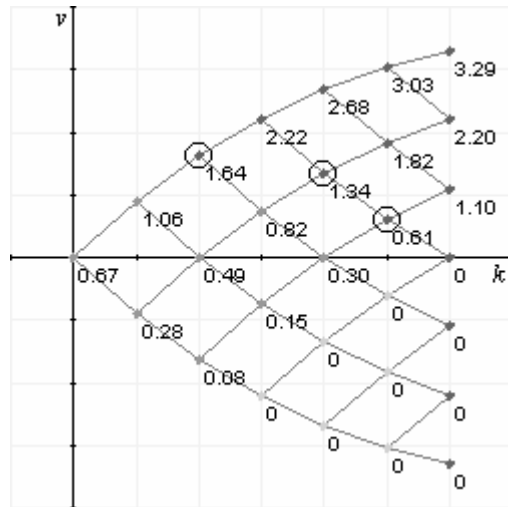
där  $r > 0$  och

$$\Pi_{n,r}(h, k) = \max(v(h, k, r), \frac{1}{2}\Pi_{n,r}(h, k+1) + \frac{1}{2}\Pi_{n,r}(h+1, k+1)) \quad (19)$$

$$\Pi_{n,r}(h, n) = \begin{cases} v(h, n, r), & v(h, n, r) \geq 0 \\ 0, & v(h, n, r) < 0 \end{cases}$$

Vi kan tolka  $v(h, k, r)$  som nuvärdet av kapitalet  $(2h - k)$  om vi låter  $k$  representera tiden.

För att beräkna  $\Pi_{n,r}(0, 0)$  kan vi inte längre använda den formel vi använde då  $v(h, k) = 2h - k$ . Den byggde på att vi alltid kunde utnyttja alla  $n$  kasten. Med vår nya definition av  $v$  är detta inte längre sant då det nu finns punkter där vi ska stanna innan alla  $n$  kasten har gjorts. T.ex. är  $v(2, 2, 0.1) = 1.64 > 1.52 = 1/2 \cdot \Pi_{6,0.1}(2, 3) + 1/2 \cdot \Pi_{6,0.1}(3, 3)$ , se FIGUR 4. Dock gäller fortfarande att det enda fallet vi tjänar på att få ytterligare ett kast efter  $n$  kastade är då vi befinner oss i punkten  $(k, v) = (n, 0)$ .



**FIGUR 4** Om vi under kastserien kommer till någon av de inringade punkterna ska vi stanna och således inte utnyttja alla  $n$  kasten. Färgerna har samma betydelse som i tidigare figurer.

Att nu hitta en generell formel för  $\Pi_{n,r}(0, 0)$  utan att använda rekursionsformeln verkar vara svårt. Tillsvidare får vi beräkna  $\Pi_{n,r}(0, 0)$  rekursivt.

### 2.3.1 Gränsvärdesanalys

Vi studerar nu gränsvärdet av  $\Pi_{n,r}(0, 0)$  då  $n \rightarrow \infty$ . Vi uttrycker detta gränsvärde på samma sätt som tidigare, dvs.

$$\Pi_{\infty, r}(0,0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \Pi_{2k+1}(0,0) - \Pi_{2k}(0,0)$$

men nu gäller

$$\Pi_{2k+1, r}(0,0) - \Pi_{2k, r}(0,0) \leq \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-r(2k+1)} \leq \frac{1}{2} \cdot e^{-r(2k+1)} \quad (20)$$

och detta ger att

$$\Pi_{\infty, r}(0,0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} e^{-r(2k+1)} \leq \frac{1}{2} e^{-r} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r(2x+1)} dx \quad (21)$$

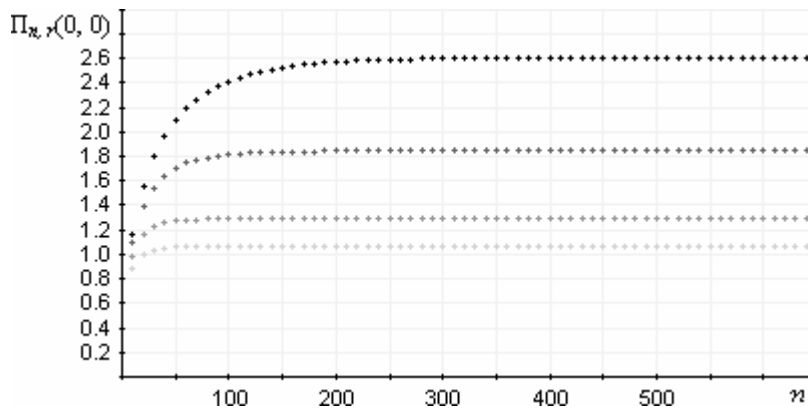
där

$$\int_0^{\infty} e^{-r(2x+1)} dx = \left[ -\frac{e^{-r(2x+1)}}{2r} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2r} e^{-r} \quad (22)$$

Således konvergerar  $\Pi_{\infty, r}(0,0)$  och en övre gräns är

$$\frac{1}{2} e^{-r} \left(1 + \frac{1}{2r}\right).$$

FIGUR 5 visar hur  $\Pi_{n, r}(0,0)$  växer med  $n$  för olika  $r$ .



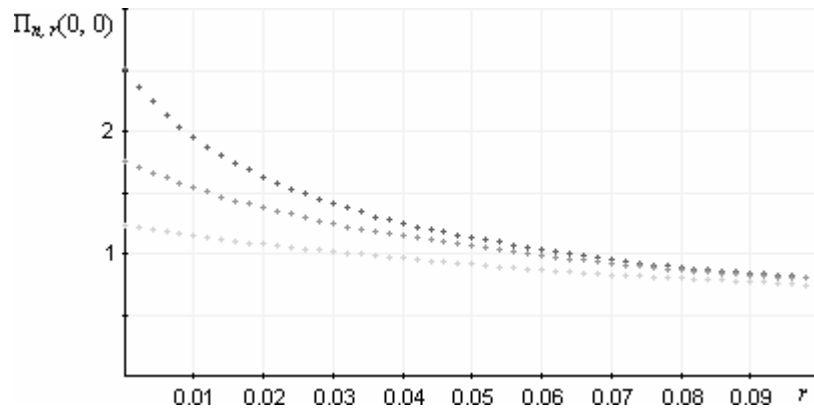
**FIGUR 5** Grafen visar att  $\Pi_{n, r}(0,0)$  planar ut snabbt med växande  $n$  då  $r = 0.01$  (svart), 0.02 (mörkgrå), 0.04 (grå) och 0.06 (ljusgrå).

TABELL 3 visar några av värdena från FIGUR 5 i tabellform.

**TABELL 3** Ett urval av värdena från FIGUR 5.

$r \backslash n$	10	20	30	40	50	60	80	100	150	200
0.01	1.150	1.541	1.786	1.957	2.084	2.180	2.313	2.399	2.512	2.558
0.02	1.080	1.379	1.535	1.630	1.692	1.733	1.781	1.805	1.827	1.831
0.04	0.966	1.148	1.216	1.246	1.261	1.269	1.277	1.279	1.281	1.281
0.06	0.870	0.989	1.027	1.041	1.046	1.048	1.050	1.050	1.050	1.050

För att avgöra hur känslig  $\Pi_{n, r}(0,0)$  är av  $r$  kan vi börja med att studera grafen i FIGUR 6.



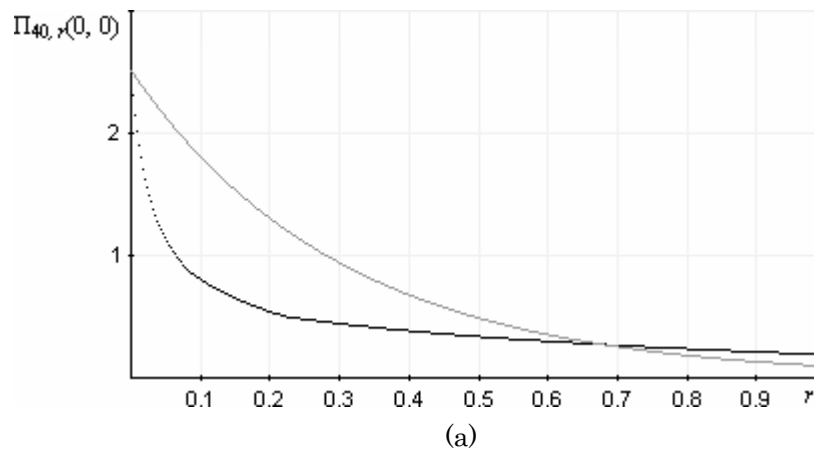
**FIGUR 6** Grafen visar hur  $\Pi_{n,r}(0,0)$  minskar med  $r$  då  $n=40$  (mörkgrå), 20 (grå) och 10 (ljusgrå).

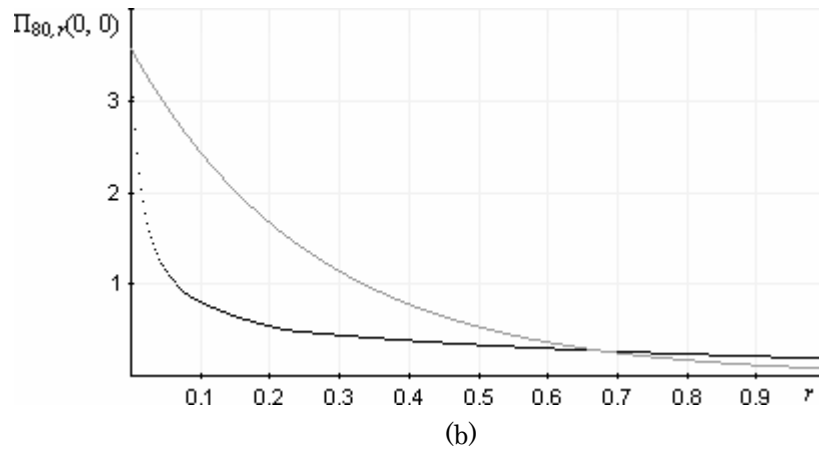
Om vi ska ansätta en formel för  $\Pi_{n,r}(0,0)$  utgående från de plottade värdena i FIGUR 6 ligger det nära till hands att en sådan formel ska vara exponentiell, dvs. på formen  $de^{cr}$  där  $d = \Pi_{n,0}(0,0)$  vilket vi tidigare ansatte till  $an^b$ . Den ansatta formeln för  $\Pi_{n,r}(0,0)$  blir då

$$\Pi_{n,r}(0,0) = an^b e^{cr} \quad (23)$$

vilket satisfierar kravet att  $\Pi_{n,0}(0,0) \rightarrow \infty$  när  $n \rightarrow \infty$  då  $a > 0$  och  $b > 0$ .

Vi vill nu hitta ett approximativt värde för  $c$  vilket vi finner på samma sätt som tidigare med hjälp av minsta kvadratmetoden. Resultatet illustreras i FIGUR 7.

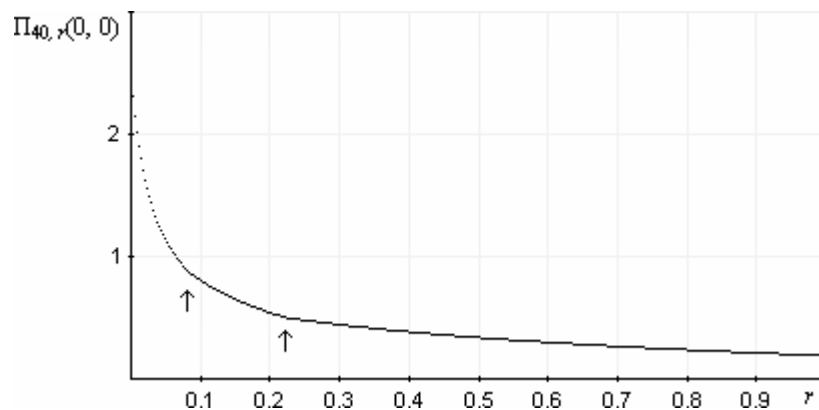




**FIGUR 7** Den ansatta formeln (grå) för  $\Pi_{40,r}(0,0)$  (a) respektive  $\Pi_{80,r}(0,0)$  (b) beräknad med hjälp av minsta kvadratmetoden utgående från de exakta värdena (svart).

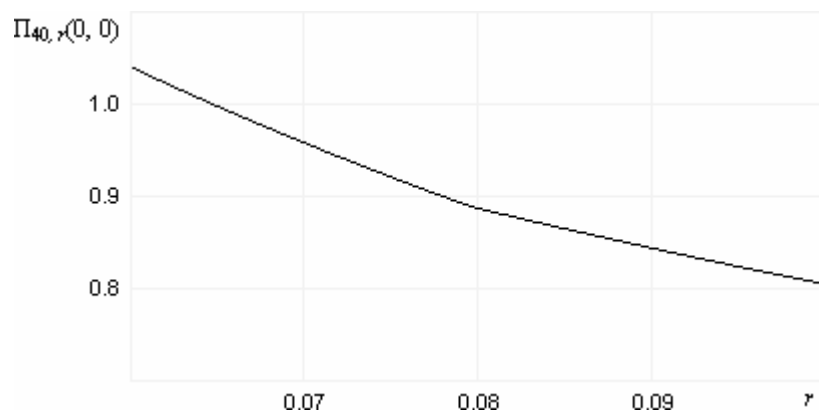
Som FIGUR 7 visar ansluter inte den ansatta formeln de exakta värdena på ett tillfredställande sätt och vi kan misstänka att den ansatta formeln är felaktig.

En intressant observation är dock att den tänkta kurvan för de exakta värdena ser ut att ha hörn, se FIGUR 8.



**FIGUR 8** Pilarna indikerar misstänkta hörn.

Om vi förstörar grafen i FIGUR 8 framträder hörnen tydligare, se FIGUR 9.



**FIGUR 9** Grafen indikerar ett hörn vid  $r \approx 0.08$ .

Detta skulle betyda att det inte går att ansätta endast en deriverbar, och därmed kontinuerlig, funktion över intervallet

$[0, \infty[$  [4]. Att avgöra hur många eventuella hörn som finns, och i så fall var, förefaller svårt. Vidare analys av detta ligger utanför omfattningen av denna uppsats.



## 3 Härledning av Black-Scholes optionsformel

---

I detta kapitel härleder vi Black-Scholes välkända formel för prissättning av optioner med hjälp av den binomialmodell som presenterades av Cox, Ross och Rubinstein år 1979 [5].

Närmare kommer vi att härleda formeln för prissättning av en europeisk köpoption på en aktie [10, 11] vilken ligger till grund för många andra typer av optioner. Härledningen av motsvarande säljoption görs på liknande sätt.

Binomialmodellen bygger på att tiden,  $t$ , till optionens mognad delas in i  $n$  tidssteg där varje tidssteg är  $t/n = \Delta t$  långt. Vidare antas att aktiepriset,  $S_i$ , vid någon tidpunkt  $t_i$  kan antingen öka till  $S_i \cdot u$  eller minska till  $S_i \cdot d$  vid tidpunkten  $t_{i+1}$  där  $d < 1 < u$ . Aktieprisets möjliga värden fram till tiden  $t$  utgörs då av det binomialträd som växer fram med tiden.

### 3.1 Fastställning av binomialmodellens parametrar

Om aktiepriset efter  $n$  tidssteg har ökat  $k$  gånger gäller

$$S_n = S_0 u^k d^{n-k} \quad (1)$$

dvs.

$$\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = k \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \ln(d) \quad (2)$$

Den förväntade avkastningen efter  $n$  tidssteg med avseende på den binomialfördelade variabeln  $k$  är då

$$E\left[\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right] = E\left[k \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \ln(d)\right] \quad (3)$$

Om nu  $q$  är den verkliga sannolikheten att aktiepriset ska öka under ett tidssteg följer att

$$E\left[\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right] = E[k] \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \ln(d) = nq \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \ln(d) \quad (4)$$

samt

$$\text{Var}\left(\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)\right) = nq(1-q) \ln\left(\frac{u}{d}\right)^2 \quad (5)$$

Vidare är ett vanligt antagande att

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N(\mu t, \sigma^2 t) \quad (6)$$

där  $S_0$  är det nu gällande aktiepriset och  $S_t$  priset vid tidpunkten  $t$ .

Om vi nu ska bestämma parametrarna  $u$ ,  $d$  och  $q$  vill vi välja dessa så att följande gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \ln(d) = \mu t \quad (7)$$

samt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq(1-q) \ln\left(\frac{u}{d}\right)^2 = \sigma^2 t \quad (8)$$

Detta är uppfyllt om

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (9)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = u^{-1} \quad (10)$$

samt

$$q = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma} \sqrt{\Delta t} \quad (11)$$

Dessa parametervärden är inte de enda som uppfyller ovanstående samband men det är dessa som används i Cox, Ross och Rubinsteins modell [9]. Vi kommer därför i fortsättningen endast behandla modellen med dessa parametervärden.

### 3.2 Binomialmodellens konvergens

Om vi använder den riskfria sannolikheten  $\pi$  för att bestämma värdet på en europeisk köpoption,  $C_0$ , med inlösenpriset  $K$  vid tiden  $t$  gäller att

$$C_0 = \frac{1}{e^{rt}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \cdot \max(S_0 u^k d^{n-k} - K, 0) \quad (12)$$

då vi har använt oss av  $n$  tidssteg. Här är

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \cdot \max(S_0 u^k d^{n-k} - K, 0) \quad (13)$$

det förväntade värdet av optionen efter  $n$  tidssteg vilket vi sedan diskonterar med räntan  $r$  för att få nuvärdet.

Definierar vi nu  $b_n$  som det minsta heltal  $k$  så att

$$S_0 u^k d^{n-k} - K > 0 \quad (14)$$



innebär det att vi kan skriva om (12) och bli av med max-funktionen enligt följande

$$C_0 = \frac{1}{e^{rt}} \sum_{k=b_n}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \cdot (S_0 u^k d^{n-k} - K) = \quad (15)$$

$$= \frac{S_0}{e^{rt}} \sum_{k=b_n}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \cdot u^k d^{n-k} - \frac{K}{e^{rt}} \sum_{k=b_n}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \quad (16)$$

För att bestämma den riskfria sannolikheten  $\pi$  kan vi resonera enligt följande.  $S_i$  måste vara lika med det förväntade värdet av aktiepriset vid nästpåföljande tidssteg diskonterat ett tidssteg, dvs.

$$\begin{aligned} S_i &= (\pi S_i u + (1-\pi) S_i d) e^{-r\Delta t} \Leftrightarrow e^{r\Delta t} - d = \pi(u-d) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \pi &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} \end{aligned} \quad (17)$$

Med hjälp detta kan vi skriva om formel (16) till

$$S_0 \sum_{k=b_n}^n \binom{n}{k} \left( \frac{\pi u}{e^{r\Delta t}} \right)^k \left( 1 - \frac{\pi u}{e^{r\Delta t}} \right)^{n-k} - \frac{K}{e^{rt}} \sum_{k=b_n}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \quad (18)$$

och om

$$\theta = \frac{\pi u}{e^{r\Delta t}} \quad (19)$$

får vi

$$S_0 \sum_{k=b_n}^n \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} - \frac{K}{e^{rt}} \sum_{k=b_n}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \quad (20)$$

dvs.

$$S_0 P(X_\theta \geq b_n) - \frac{K}{e^{rt}} P(X_\pi \geq b_n) \quad (21)$$

där  $X_\theta \sim \text{Bin}(n, \theta)$  och  $X_\pi \sim \text{Bin}(n, \pi)$  vilket är det samma som

$$\begin{aligned} S_0 P\left( \frac{X_\theta - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \geq \frac{b_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \right) - \\ \frac{K}{e^{rt}} P\left( \frac{X_\pi - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} \geq \frac{b_n - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

där både

$$\frac{X_\theta - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} = Y_\theta \quad (23)$$

och

$$\frac{X_\pi - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = Y_\pi \quad (24)$$

har väntevärde 0 och varians 1.

Det vi nu måste undersöka är vad som händer om  $n \rightarrow \infty$ , dvs. låter tidsstegen gå mot noll. Till att börja med ger vi ett uttryck för  $b_n$ . Då  $b_n$  är det minsta heltal  $k$  så att  $S_0 \cdot u^k \cdot d^{n-k} - K > 0$  kan vi uttrycka  $b_n$  enligt följande

$$b_n = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0 d^n}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)} + \varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \varepsilon \quad (25)$$

där  $0 \leq \varepsilon < 1$  som går mot noll då  $n \rightarrow \infty$ .

Vi undersöker nu gränsvärdena av

$$\frac{b_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \quad (26)$$

och

$$\frac{b_n - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} \quad (27)$$

då  $n \rightarrow \infty$ .

Låt oss börja med det senare. Efter omskrivning får vi att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma\sqrt{\Delta t} + \varepsilon - 2n\sigma\pi\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{t\pi(1-\pi)}} \quad (28)$$

Om vi nu Taylorutvecklar  $\pi$  och tar med termer upp till första graden får vi

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \\ &= \frac{r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right)}{2\sigma\sqrt{\Delta t} + O\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right)} \end{aligned} \quad (29)$$

och vi ser då att gränsvärdet av  $\pi$  är  $\frac{1}{2}$  då  $n \rightarrow \infty$ . Nämnaren i uttrycket går således mot  $\sigma\sqrt{t}$ .

På liknande sätt får vi att

$$\begin{aligned} n\sigma\sqrt{\Delta t} - 2n\sigma\pi\sqrt{\Delta t} &= n\sigma\sqrt{\Delta t}(1 - 2\pi) = \\ &= n\sigma\sqrt{\Delta t} \left( 1 - 2 \frac{r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{\frac{3}{2}})}{2\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t^{\frac{3}{2}})} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

vilket har gränsvärdet

$$n\sigma\sqrt{\Delta t} \left( 1 - \left( \frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta t} + 1 - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \right) \right) = -(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t \quad (31)$$

då  $n \rightarrow \infty$  och således är

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} = \\ &= -\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} = -d_2 \end{aligned} \quad (32)$$

Kvar att undersöka är nu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma\sqrt{\Delta t} + \varepsilon - 2n\sigma\theta\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{t}\theta(1-\theta)} \quad (33)$$

Då

$$\theta = \frac{\pi u}{e^{r\Delta t}} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \cdot \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{r\Delta t}} = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad (34)$$

och om vi Taylorutvecklar på samma sätt som förut får vi att

$$\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} + r\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{\frac{3}{2}})}{2\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t^{\frac{3}{2}})} \quad (35)$$

dvs.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \frac{1}{2} \quad (36)$$

och

$$\begin{aligned}
n\sigma\sqrt{\Delta t} - 2n\sigma\theta\sqrt{\Delta t} &= n\sigma\sqrt{\Delta t}(1 - 2\theta) = \\
&= n\sigma\sqrt{\Delta t} \left( 1 - 2 \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} + r\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{\frac{3}{2}})}{2\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t^{\frac{3}{2}})} \right) \quad (37)
\end{aligned}$$

vilket har gränsvärdet

$$n\sigma\sqrt{\Delta t} \left( 1 - \left( 1 + \frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t} \right) \right) = -(r + \frac{1}{2}\sigma^2)t \quad (38)$$

då  $n \rightarrow \infty$ .

Detta betyder att

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} &= \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} = \\
&= -\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} = -d_1 \quad (39)
\end{aligned}$$

Vi har nu visat att då  $n \rightarrow \infty$  konvergerar optionspriset mot

$$S_0 P(Y_\theta \geq -d_1) - \frac{K}{e^{rt}} P(Y_\pi \geq -d_2) \quad (40)$$

där både  $Y_\theta$  och  $Y_\pi$  har väntevärde 0 och varians 1.

Vidare har vi enligt centrala gränsvärdessatsen att  $Y_\theta$  och  $Y_\pi$  konvergerar mot en normalfördelad variabel med samma väntevärde och varians då  $n \rightarrow \infty$ . Av detta följer att

$$C_0 = S_0 P(Z \geq -d_1) - \frac{K}{e^{rt}} P(Z \geq -d_2) \quad (41)$$

där  $Z \sim N(0, 1)$ . Då fördelningen för  $Z$  är symmetriskt följer att

$$P(Z \geq -d_1) = P(Z \leq d_1) = \Phi(d_1) \quad (42)$$

samt

$$P(Z \geq -d_2) = P(Z \leq d_2) = \Phi(d_2) \quad (43)$$

Detta ger då slutligen att

$$C_0 = S_0 \Phi(d_1) - \frac{K}{e^{rt}} \Phi(d_2) \quad (44)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (45)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (46)$$

vilket är Black-Scholes formel för en europeisk aktieoption.



## 4 Slutsatser

---

Analysen av vårt spel med dess binomialmodell resulterade i en rad intressanta observationer. Vi fann en optimerad och generell spelstrategi med vars hjälp vi rekursivt kunde beräkna den förväntade vinsten. Denna optimerade spelstrategi formade grunden för den vidare analysen.

Vi konstaterade att betydelsen av ränteförluster är stor. Till att börja med fann vi att utan ränteförluster kan vi alltid utnyttja samtliga  $n$  kasten. I somliga fall kan vi dock sluta tidigare men då med en aktuell vinst lika med den förväntade vinsten om vi fortsätter. Detta ledde till att vi inte längre behövde beräkna den förväntade vinsten på ett rekursivt sätt utan med hjälp av en explicit formel. Vi visade, bl.a. med hjälp av centrala gränsvärdessatsen, hur vi kom fram till denna formel samt att den förväntade vinsten ökar med en faktor  $\sqrt{n}$ . Den förväntade vinsten kan således bli godtyckligt stor bara vi får tillräckligt många kast.

Med ränteförluster blev resultatet ett annat. I detta fall visade det sig att vi inte längre alltid ska utnyttja alla  $n$  kasten. Detta försvårade våra försök att hitta ett uttryck på samma sätt som tidigare vilket resulterade i att beräkningarna av den förväntade vinsten fick göras med hjälp av den rekursiva metoden. Vi kunde dock konstatera att nu konvergerar den förväntade vinsten då  $n \rightarrow \infty$  och att konvergensen går förhållandevis snabbt.

I vår fortsatta analys gjordes en intressant observation när vi tittade på hur olika räntor påverkade utgången av den förväntade vinsten då  $n$  hölls konstant. Vi försökte här hitta en funktion av räntan  $r$  med hjälp av interpolation utgående från de exakta värdena vilka vi beräknade rekursivt som tidigare. Genom att studera motsvarande grafer låg det nära till hands att en sådan funktion skulle vara exponentiell. Det visade sig dock att vår ansatta formel inte anslöt sig med de exakta värdena på ett tillfredställande sätt. Vid närmare undersökning av graferna fann vi att dessa föreföll sig innehålla hörn. Detta skulle då betyda att det inte går att hitta endast en kontinuerlig funktion av  $r$ .

Vidare visade vår härledning av Black-Scholes optionsformel vikten av tillämpningen av ytterligare en binomialmodell vilken fått stor betydelse inom finansmarknaden. Att värdera optioner kan framstå som svårt där en mängd faktorer är avgörande, men genom att använda den binomialmodell som presenterades av Cox, Ross och Rubinstein blev det möjligt att hitta en lösning. Vi visade hur denna modell konvergerar mot Black-Scholes optionsmodell då vi använder allt fler tidssteg. Detta visade i sin tur hur vi utgående från en förenklad modell, där vi diskretiserat tiden, finner motsvarande modell för kontinuerlig tid vilken således är mer överensstämmande med verkligheten.

Avslutningsvis kan vi konstatera att problematiken kring båda de binomialmodeller vi behandlat liknar varandra på många sätt. T.ex. visade analysen av vårt spel att vi alltid kunde utnyttja

samtliga kast då vi inte hade några ränteförluster. Detta kan jämföras med Black-Scholes optionsformel som avser en europeisk option vilken inte kan lösas in i förtid. I båda dessa fall fick tillämpningen av centrala gränsvärdessatsen en avgörande roll i dess respektive gränsvärdesanalys. Att det vidare inte existerar någon motsvarande formel till Black-Scholes optionsformel för amerikanska optioner kan då jämföras med resultatet av vårt spel med ränteförluster. I detta fall fick vi utföra beräkningarna rekursivt vilket också är fallet då man vill värdera amerikanska optioner.



# Referenser

---

## Böcker

- [1] CORMEN, T., LEISERSON, C. & RIVEST, R. 1990. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press. Cambridge. ISBN 0-262-53091-0.
- [2] FELLER, W. 1950. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- [3] HEATH, M. 1997. *Scientific Computing: An Introductory Survey*. McGraw-Hill. Singapore. ISBN 0-07-115336-5.
- [4] HELLSTRÖM, L., MORANDER, S. & TENGSTRAND, A. 1991. *Envariabelanalys*. Studentlitteratur. Lund. ISBN 91-44-34771-5.
- [5] HULL, J. 2003. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall. New Jersey. ISBN 0-13-046592-5.
- [6] ROSS, S. 1998. *A First Course in Probability*. Prentice-Hall International, Inc. London. ISBN 0-13-896523-4.
- [7] ROSS, S. 1997. *Introduction to Probability Models*. Academic Press. San Diego. ISBN 0-12-598470-7.
- [8] VRETBLAD, A. 1995. *Algebra och kombinatorik*. Gleerups. Malmö. ISBN 91-40-62153-7.

## Artiklar

- [9] BENNINGA S., WIENER Z. 1997. *The Binomial Option Pricing Model*. *Mathematica in Education and Research*. Vol. 6, No. 3.

## Internet

- [10] *Appendix C Chapter 5 Technical Topic: Limiting Results*, <http://secure.webstation.net/~ftsweb/texts/optiontutor/chap5.5.htm>. OS Financial Trading System, 1999. Senast besökt juni 2003.
- [11] *Binomial Option Pricing Model Continued*, <http://www.stat.mq.edu.au/units/stat401/L89010n.pdf>. Senast besökt juni 2003.

- [12] *Central Limit Theorem*,  
<http://mathworld.wolfram.com/CentralLimitTheorem.html>.  
Senast besökt juli 2003.

# Appendix

---

## A1 Bevis

Detta appendix innehåller grundläggande bevis för analysen i denna uppsats.

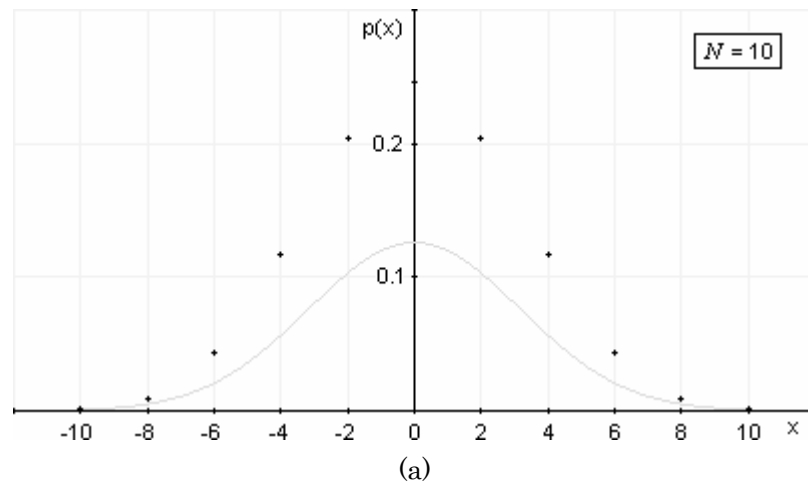
### Centrala gränsvärdesatsen

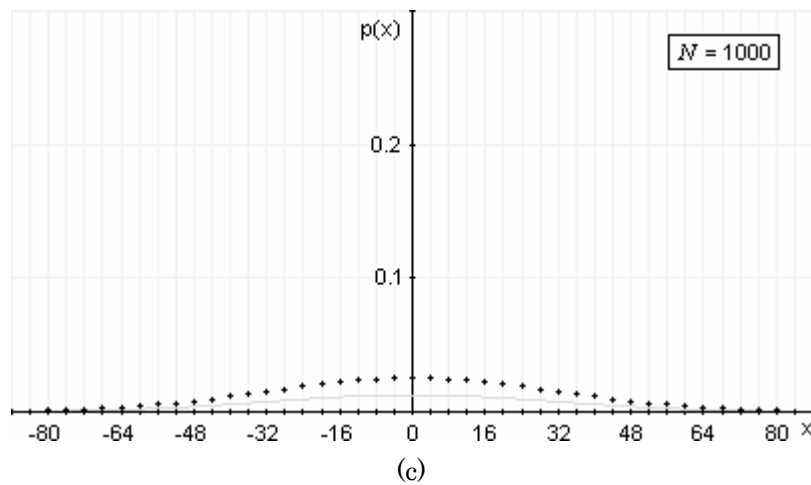
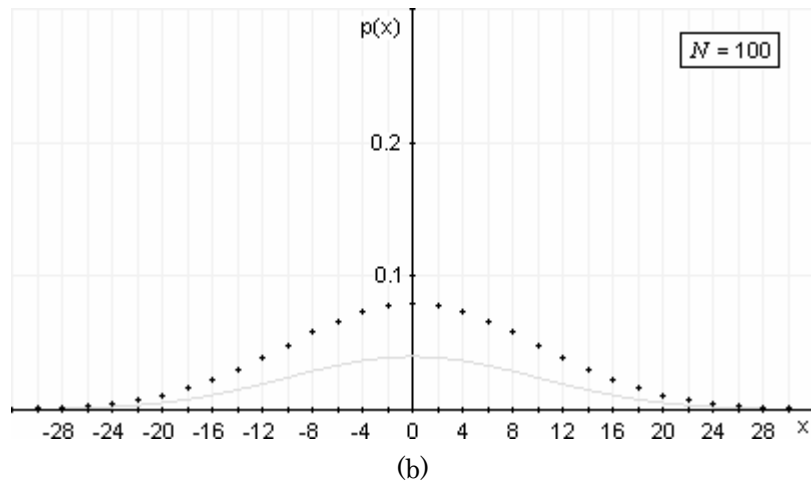
Här ger vi ett bevis av centrala gränsvärdesatsen vilken är en av de mest uppseendeväckande satserna inom sannolikhets teorin. I stora drag säger satsen att summan av ett stort antal oberoende slumpvariabler har en approximativt normalfördelad fördelning. Detta ger bl.a. en förklaring till det faktum att empiriska data så ofta tenderar till att få en fördelning som liknar normalfördelningen.

För att illustrera satsen kan vi betrakta följande exempel som härstammar från analysen i kapitel 2. Låt  $X_i$  vara en slumpvariabel som representerar utgången av ett myntkast där klave sätts till -1 och krona till 1. Detta betyder att  $E[X_i] = 0$  och  $\text{Var}(X_i) = 1$ . Nu definierar vi slumpvariabeln  $Z_N$  enligt

$$Z_N \equiv \sum_{i=1}^N X_i \quad (1)$$

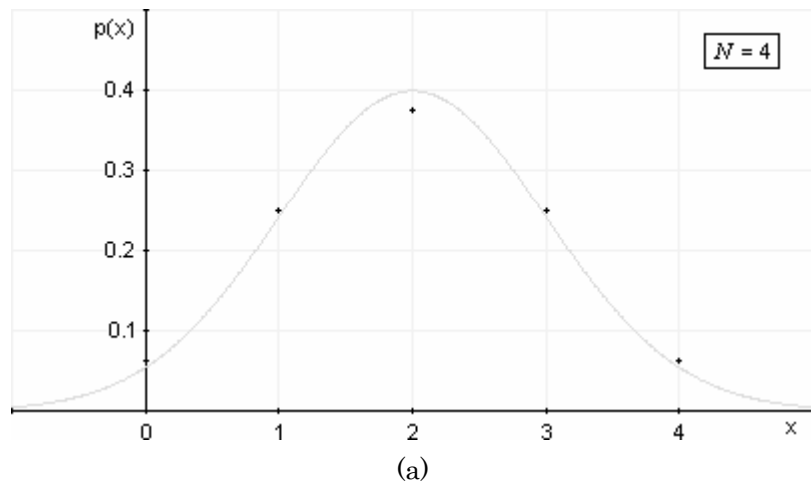
som då representerar utgången av  $N$  kast där  $E[Z_N] = 0$  och  $\text{Var}(Z_N) = N$ . Detta betyder enligt centrala gränsvärdesatsen att då  $N \rightarrow \infty$  närmar sig fördelningen för  $Z_N$  normalfördelningen med väntevärde  $\mu = 0$  och varians  $\sigma^2 = N$ , se FIGUR 10.

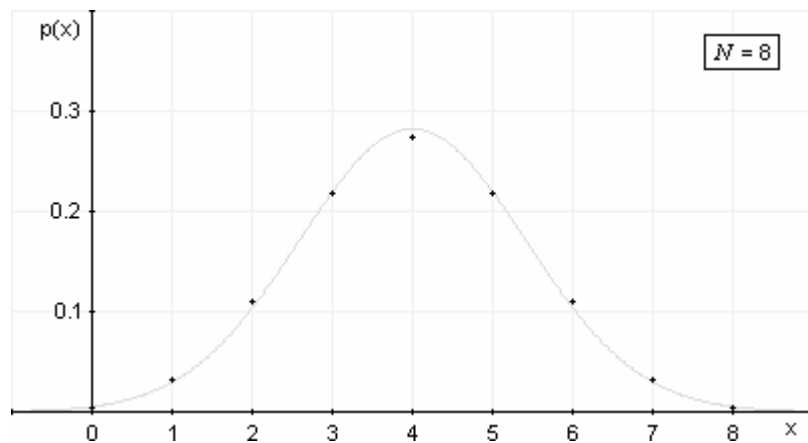




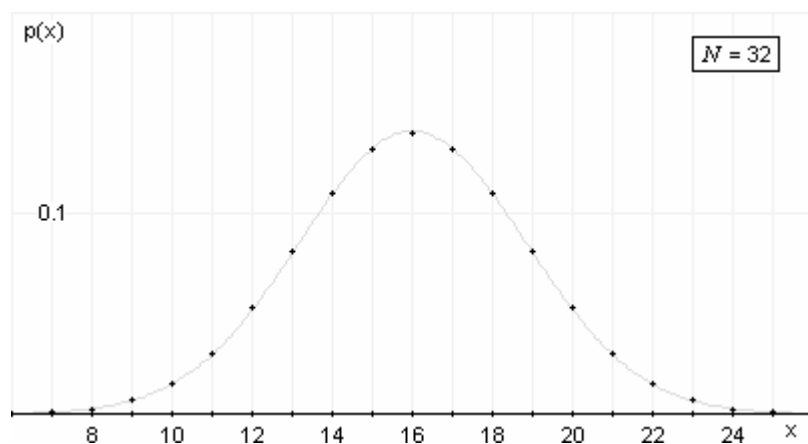
**FIGUR 10 (a)-(c)** Graferna visar hur fördelningen för  $Z_n$  (svart) närmar sig motsvarande normalfördelning (grå), dvs. med samma väntevärde och varians.

Ett ytterligare exempel är att studera konvergensen av en binomialfördelad variabel [2] vilket vi utnyttjade då vi härledde Black-Scholes optionsformel i kapitel 3. Exemplet illustrerar konvergensen av en binomialfördelad variabel  $X$  med parametrarna ( $N, p = 1/2$ ), se FIGUR 11.





(b)



(c)

**FIGUR 11 (a)-(c)** Graferna visar att en binomialfördelad variabel (svart) snabbt närmar sig motsvarande normalfördelning (grå).

Jämförelsevis är det tydligt att konvergensen av  $X$  är snabbare än för  $Z_n$ .

Nu går vi till beviset av centrala gränsvärdesatsen [12]. Låt  $X_1, X_2, \dots, X_N$  vara mängden av  $N$  oberoende slumpvariabler där varje  $X_i$  har en godtycklig fördelning  $P(x_1, \dots, x_N)$  med väntevärde  $\mu_i$  och ändlig varians  $\sigma_i^2$ . Om vi nu definierar  $Z_N$  som

$$Z_N \equiv \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2}} \quad (2)$$

säger centrala gränsvärdesatsen att då  $N \rightarrow \infty$  närmar sig fördelningen för  $Z_N$  normalfördelningen med väntevärde  $\mu = 0$  och varians  $\sigma^2 = 1$ . För att nu bevisa detta definierar slumpvariabeln  $X$  enligt

$$X \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3)$$

vilken är normalfördelad med  $\mu_X = \mu_x$  och  $\sigma_X = \sigma_x / \sqrt{N}$  då  $N \rightarrow \infty$  och studerar den inverterade Fourier transformationen av  $P_X(f)$ .

$$\begin{aligned}
F_f^{-1}[P_X(f)](x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f X} P(X) dX = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f X)^n}{n!} P(X) dX = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} X^n P(X) dX = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} E[X^n]. \tag{4}
\end{aligned}$$

Nu är

$$\begin{aligned}
E[X^n] &= E\left[\frac{(x_1 + \dots + x_N)^n}{N^n}\right] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 + \dots + x_N)^n}{N^n} P(x_1) \dots P(x_N) dx_1 \dots dx_N \tag{5}
\end{aligned}$$

vilket då betyder att

$$\begin{aligned}
F_f^{-1}[P_X(f)](x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} E[X^n] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i f)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1 + \dots + x_N)^n}{N^n} P(x_1) \dots P(x_N) dx_1 \dots dx_N = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2\pi i f (x_1 + \dots + x_N)}{N} \right]^n \frac{1}{n!} P(x_1) \dots P(x_N) dx_1 \dots dx_N = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi i f (x_1 + \dots + x_N) / N\} P(x_1) \dots P(x_N) dx_1 \dots dx_N = \\
&= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi i f x_1 / N\} P(x_1) dx_1 \right] \times \dots \\
&\dots \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi i f x_N / N\} P(x_N) dx_N \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi ifx/N\} P(x) dx \right]^N = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \left(\frac{2\pi if}{N}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi if}{N}\right)^2 x^2 + \dots \right] P(x) dx \right\}^N = \\
&= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx + \frac{2\pi if}{N} \int_{-\infty}^{\infty} xP(x) dx - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx + \mathcal{O}(N^{-3}) \right]^N = \\
&= \left[ 1 + \frac{2\pi if}{N} E[x] - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} E[x^2] + \mathcal{O}(N^{-3}) \right]^N = \\
&= \exp \left\{ N \ln \left[ 1 + \frac{2\pi if}{N} E[x] - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} E[x^2] + \mathcal{O}(N^{-3}) \right] \right\}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Då

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad (7)$$

för  $-1 < x < 1$  har vi att

$$\begin{aligned}
F_f^{-1}[P_x(f)](x) &\approx \exp \left\{ N \left[ \frac{2\pi if}{N} E[x] - \frac{(2\pi f)^2}{2N^2} E[x^2] + \frac{1}{2} \frac{(2\pi f)^2}{N^2} E[x]^2 + \mathcal{O}(N^{-3}) \right] \right\} = \\
&= \exp \left\{ 2\pi if E[x] - \frac{(2\pi f)^2 (E[x^2] - E[x]^2)}{2N} + \mathcal{O}(N^{-2}) \right\} \approx \\
&\approx \exp \left\{ 2\pi if \mu_x - \frac{(2\pi f)^2 \sigma_x^2}{2N} \right\} \quad (8)
\end{aligned}$$

då

$$\mu_x \equiv E[x] \quad (9)$$

och

$$\sigma_x^2 \equiv E[x^2] - E[x]^2. \quad (10)$$

Fourier transformation ger att

$$P_X \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2\pi ifx\} F^{-1}[P_x(f)] df \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2\pi if(\mu_x - x) - (2\pi f)^2 \sigma_x^2 / 2N\} df. \quad (11)$$

Detta är ett uttryck på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iaf - bf^2\} df \quad (12)$$

där

$$a \equiv 2\pi(\mu_x - x) \quad (13)$$

och

$$b \equiv (2\pi\sigma_x)^2 / 2N. \quad (14)$$

Nu gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iaf - bf^2\} df = \exp\{-a^2 / 4b\} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad (15)$$

vilket ger

$$\begin{aligned} P_X &\approx \sqrt{\frac{\pi}{(2\pi\sigma_x)^2}} \exp\left\{-\frac{[2\pi(\mu_x - x)]^2}{4 \frac{(2\pi\sigma_x)^2}{2N}}\right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi N}{4\pi^2 \sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{4\pi^2 (\mu_x - x)^2 2N}{4 \cdot 4\pi^2 \sigma_x^2}\right\} = \\ &= \frac{\sqrt{N}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\mu_x - x)^2 N}{2\sigma_x^2}\right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Men nu har vi sedan tidigare att  $\mu_X = \mu_x$  och  $\sigma_X = \sigma_x / \sqrt{N}$  vilket då slutligen ger att

$$P_X \approx \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\mu_X - x)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \quad (17)$$

och därmed har vi bevisat satsen.



## Harmoniska serien

Följande är ett bevis för att den harmoniska serien

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (1)$$

är divergent.

För att visa att  $a_n \rightarrow \infty$  då  $n \rightarrow \infty$  räcker det med att visa att den inte är uppåt begränsad. Betrakta  $a_n$  där  $n = 2^p$  och dela in summan i  $p + 1$  grupper av termer på följande sätt

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right) \quad (2)$$

Summan av termerna i varje grupp är minst  $1/2$ . För den sista gruppen av termer har vi

$$\left(\frac{1}{2^{p-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right) \geq 2^{p-1} \cdot \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Alltså gäller, om  $n = 2^p$ ,

$$a_n \geq 1 + p \cdot \frac{1}{2} \quad (4)$$

vilket kan bli godtyckligt stort då  $p$  väljs stort. Detta visar att  $a_n \rightarrow \infty$  då  $n \rightarrow \infty$ .