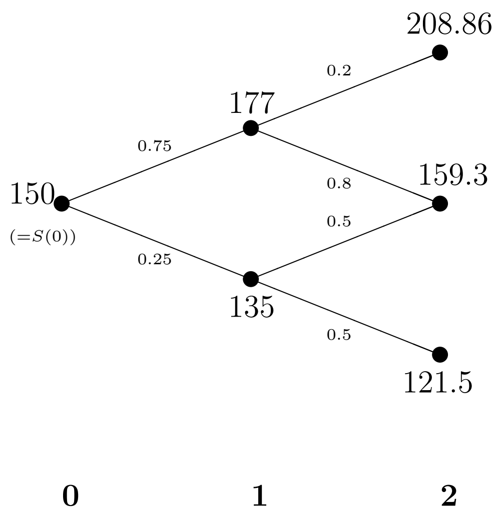
NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 9-13, torsdag 6/6 2002.
Ingen hjælpemidler (blyant & lommeregner dog tilladt). Antal sider i sættet: 4.

Opgave 1

I denne opgave betragtes en 2-periode model for kursen, S, på en aktie, der i det betragtede tidsrum ikke udbetaler dividende. Den mulige udvikling er fastlagt ved nedenstående gitter. (Med **tidspunkter**, aktiekurser og sandsynligheder.) Desuden findes der et risikofrit aktiv (*bankbogen*) med en rente på 4% per periode.



Spg. 1.a [10%]
Vis at denne model arbitragefri og komplet. Bestem det ækvivalente martingalmål Q (fx ved for gitterets knuder at angive betingende springsandsynligheder).

Spg. 1.b [10%]
Nu betragtes 2 optioner:

i) En call-option på aktien. Denne call-option har strikekurs (eller: exercisekurs) K og udløbstidspunkt ("expiry") T.
ii) En såkaldt *lookback*-option. Dette er en kontrakt, der på udløbstidpunktet T udbetaler

$$\left(\max_{0 \leq u \leq T} S(u) - K \right)^+,$$

hvor K er en konstant (kaldet lookback-optionens strikekurs).
Antag at det for begge optioner gælder at $K = 155$ og $T = 2$.
Bestem arbitrage-fri tid-0 priser for de to optioner. Hvilken er størst & hvorfor er det ikke spor mærkeligt?
Kommenter kort beregningsmæssige forskelle ved beregningen af de to optionspriser, fx ved at tage udgangspunkt i spørgsmålet: "Hvilken optionspris tager længst tid at beregne i en model med 100 (eller bare 5) perioder? "

Spg. 1.c [10%]
Betragt en tid-2 futureskontrakt på aktien (altså: futureskontrakten udløber på tidspunkt 2).
Bestem futuresprisen, $\Phi(0; 2)$, på tidspunkt 0.
Angiv hele dividendeprocessen og prisprocessen for futureskontrakten. Dette kan naturligt gøres ved at indtegne værdierne i et træ. Bemærk at med " prisprocessen for futureskontrakten" menes det beløb, det (på forskellige tidspunkter) koster at købe futureskontrakten – ikke at forveksle med Φ.

Spg. 1.d [10%]
Vælg en af de to optioner fra 1.b og besvar begge nedenstående to spørgsmål:
i) Optionen ønskes replikeret vha. en portefølje, der indeholder aktien og bankbogen. Bestem hvormange aktier denne portefølje indeholder på tidspunkt 0. (En perfekt replikation kræver som bekendt, at porteføljen justeres dynamisk, men beregningen ønskes kun foretaget for tidspunkt 0.)
ii) Optionen ønskes replikeret vha. en portefølje, der indeholder bankbogen og tid-2 futureskontrakter på aktien.
Hvormange futureskontrakter indeholder porteføljen & hvormeget investeres i bankbogen på (igen: på tid 0)?

Opgave 2

Betragt en porteføljevalgsmodel med 2 usikre aktiver (*aktier*, nummereret 1 og 2), hvis afkastrater har forventede værdier (μ) og kovarianser ($\mathbf{\Sigma}$) givet ved:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.10 \\ 0.10 & 0.36 \end{bmatrix}.$$

Spg. 2.a [10%]
I første omgang antages modellen ikke at have et risikofrit aktiv. Bestem den kritiske rand ("the minimum variance portfolio frontier/locus") og den efficiente rand ("the efficient frontier") og vægtene for porteføljerne på disse. Illustrer grafisk.
Det kan være nyttigt at kende disse to matricer:

$$\mathbf{A} = [\mu\ \mathbf{1}]^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu\ \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.55 \\ 0.55 & 5.125 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu\ \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -50 & 6 \\ 50 & -5 \end{bmatrix}.$$

Spg. 2.b [10%]
Betragt en forventet-nytte-maksimerende agent/forbruger/investor, der har flg. nyttefunktion

$$u(r_P, \sigma^2) = r_P - \frac{\sigma_P^2}{\lambda},$$

hvor r_P og σ_P^2 angiver middelværdien og variansen for afkastraten på hans portefølje. Hvilken portefølje er optimal for denne investor? Illustrer grafisk & udled en eksplicit formel (der vil involvere λ) for den optimale porteføljes forventede afkastrate, μ^{opt}, og forklar hvorfor problemet er løst, når blot μ^{opt} er fastlagt.
Som en hjælp til at tjekke dine udregninger, kan det oplyses, at for $\lambda = 20$ er $\mu^{opt} = 0.11707$.

Spg. 2.c [10%]
Nu indføres et risikofrit aktiv med en afkastrate på 0.08 (dvs. 8%). Det oplyses endvidere, at *tangentporteføljen* har en forventet afkastrate på 0.11428. Verificer dette. Det kan gøres enten analytisk eller evt. (næsten ligeså godt) ved en omhyggelig tegning. En tegning er under alle omstændigheder en god ide.
Antag tangentporteføljen er markedsporteføljen. Vis at CAPM-relationen holder for aktiv 1. Er det en overraskelse?

Opgave 3

I denne opgave betragtes Black-Scholes-modellen.

Spg. 3.a [10%]
Black-Scholes formel kan man fx se skrevet som

$$\begin{aligned} C(S(0),T,r,K,\sigma) &= S(0)\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\quad -Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Forklar kort de forskellige symbolers betydning & hvad denne formel udtrykker.

Spg. 3.b [10%]
Angiv put/call-pariteten.
Vink: En tegning af pay-off-diagrammet for "call − put" kan måske hjælpe din hukommelse på gled.

Spg. 3.c [10%]
Indfør nu notationen $P(S(0),T,r,K,\sigma)$ for putprisen.
Vis at

$$C(S(0),T,r,K,-\sigma) = -P(S(0),T,r,K,\sigma). \tag{1}$$

Vink: Husk at $N(0,1)$-fordelingen er symmetrisk omkring 0, så $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. (Og benyt, forståeligvis, 3.a og 3.b.)

Opgavestillerens bemærkning: Formlen i ligning (1) kaldes ofte en put/call-*dualitet* eller -*symmetri*. Hvis du savner en "let" finansiel/intuitiv forklaring, så må jeg skuffe dig: Jeg har heller ikke nogen!