NATURVIDENSKABELIG KANDIDATEKSAMEN
VED KØBENHAVNS UNIVERSITET

INVESTERINGS- OG FINANSIERINGSTEORI

4 timers skriftlig eksamen, 9-13 torsdag 6/6 2002.

`VEJLEDENDE BESVARELSE OG KOMMENTARER`

Opgave 1

Spg. 1.a [10%]
Modellen er arbitrage-fri hvis og kun hvis der eksisterer et ækvivalent martingalmål Q, og modellen er komplet præcis når dette er entydigt. Vi ved også fra noterne, at det er nok at tjekke om alle 1-periode modeller er komplette og arbitrage-fri. Og de multiplikative op/ned bevægelser ($u = 1.18$, $d = 0.90$) er ens for alle delmodeller. Vi har så, at den eneste mulige betingede springsandsynlighed q er

$$q = \frac{R - d}{u - d} = 0.5.$$

Da $0 < q < 1$, er sandsynlighedsmålet induceret af q veldefineret, ækvivalent med P, og tydeligvis (# aktiver = # tilstande, "2 ligninger & 2 ubekendte") det eneste, der gør den diskonterede aktiekurs til en martingal.

Spg. 1.b [10%]
i) Da modellen er komplet har call-optionen en entydig arbitragefri tid-0 pris der er $R^{-2}E^Q((S(2) - K)^+)$, der findes ved at trævle sig baglæns gennem gitteret. Det ser sådan ud:

$$\begin{array}{ccc} & & 53.86 \\ & 27.9615 & \\ 14.437 & & 4.3 \\ & 2.06731 & \\ & & 0 \end{array},$$

så tid-0 prisen er altså 14.437.

ii) Kompletheden gør, at også lookback-optionens entydige arbitrage-fri tid-0 pris er givet ved $R^{-2}E^Q$(pay-off). På grund af sti-afhængigheden i det afledte bliver vi nødt til at løse prisningsproblemet i et træ (dvs. et gitter er ikke tilstrækkeligt).

		Lookback pay-off	$\max_{i=0,1,2} S(i)$
		53.86	208.86
	36.4712		
		22	177
18.528			
		4.3	159.3
	2.06730		
		0	150

,

så tid-0 prisen er 18.528. Prisen på lookback-optionen er højere end på den almindelige call-option med samme strike og udløb. Men det skal den naturligvis også være, da lookback-optionen altid udbetaler mindst ligeså meget som den alm. call, og nogle gange mere.
Anallet af knuder i et N-periode gitter er (ca.) $N^2/2$, mens et N-periode træ har omkring 2^N ($>> N^2/2$) knuder. Så da prisningsproblemerne kræver beregning for hver knude, så vil det for selv ganske få perioder tage ekstremt meget længere tid, at prise lookback-optionen (med mindre altså man kan finde på noget smart).

Spg. 1.c [10%]
Futuresprisen $\Phi(t;2)$ er bestemt ved $\Phi(t;2) = E_t^Q(S(2))$. Her er renten deterministisk så $\Phi(t;2) = R^{2-t}E_t^Q(R^{-(2-t)}S(2)) = R^{2-t}S(t)$. Specielt er $\Phi(0;2) = 162.24$ og hele $\Phi(t;2)$ processen bestemt ved flg. gitter:

$$\begin{array}{ccc} & & 208.86 \\ & 184.08 & \\ 162.24 & & 159.3 \\ & 140.4 & \\ & & 121.5 \end{array} .$$

Prisprocessen for futureskontrakten er identisk lig 0 (pr. definition), så den er der ikke meget sjov ved at tegne. På tidspunkt t udbetaler futureskontrakten en dividende på $\Phi(t;2) - \Phi(t-1;2)$. Denne proces ser sådan ud:

$$\begin{array}{ccc} & & 24.78 \\ & 21.84 & \\ & & -24.78 \\ \text{“don't know, don't care”} & & \\ & & 18.9 \\ & -21.84 & \\ & & -18.9 \end{array} .$$

Læg mærke til, at futureskontraktens tid-0 dividende ikke kendes, men at vi heller ikke har brug for den til noget, idet vi ikke modtager den, hvis vi køber en futureskontrakt på tid 0, da priser altid er "efter dividende". Bemærk endvidere at der er (svag) stiafhængighed: Tid-2 dividendebetalingen for "$S(2) = 159.3$"-knuden er forskellig, alt efter hvor vi kommer fra.

Spg. 1.d [10%]

i) Replikation med aktie og bankbog er helt standard, og vi får, at for at replikere skal man på tid 0 købe $a(0)$ stk. aktier, hvor

$$a(0) = \frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{C^{op}(1) - C^{ned}(1)}{S^{op}(1) - S^{ned}(1)} = \begin{cases} \frac{27.9615-2.06731}{177-135} = 0.6165 & \text{for alm. call} \\ \frac{36.4712-2.06731}{177-135} = 0.8191 & \text{for lookback} \end{cases}$$

ii) Hvis porteføljen (a^{fut}, b) med fututreskontrakt og bankbog skal replikere så skal

$$a^{fut} * \underbrace{(0 + \Phi^{op}(1;2) - \Phi(0;2))}_{\text{pris + dividendeudbetaling}} + R * b = C^{op}(1),$$
$$a^{fut} * (\Phi^{ned}(1;2) - \Phi(0;2)) + R * b = C^{ned}(1).$$

Dvs.

$$a^{fut} = \frac{C^{op}(1) - C^{ned}(1)}{\Phi^{op}(1;2) - \Phi^{ned}(1;2)} \begin{cases} \frac{27.9615-2.06731}{21.84+21.84} = 0.5928 & \text{for alm. call} \\ \frac{36.4712-2.06731}{21.84+21.84} = 0.7876 & \text{for lookback} \end{cases}.$$

Man finder at

$$b = \begin{cases} 14.44 & \text{for alm. call} \\ 18.53 & \text{for lookback} \end{cases} = \text{Initial pris på optionen.}$$

Og det er jo klart: Værdien af den replikerende portefølje på tid 0 er lig med optionens værdi. Og futureskontrakter har pris=0.

Opgave 2

Spg. 2.a [10%]

Når der kun er to aktier, så kan man godt løse tingene "i hånden". (Specielt let fordi en bestemt krævet forventet afkastrate (bibetingelsen) entydigt bestemmer, hvilken portefølje vi snakker om.) Men her gås frem efter noterne, så vi sætter

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Den kritiske rand (som når der kun er to aktiver jo faktisk også hele "muligheds-området") er bestemt ved ligning (9.11) fra noternes kap. 9:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= (r_P \;\; 1)\mathbf{A}^{-1}(r_P \;\; 1)^\top \\ &= \frac{a - 2br_P + cr_P^2}{ac - b^2} = 12 - 220r_P + 1025r_P^2\end{aligned}$$

og porteføljevægtene er givet ved ligning (9.10):

$$x_P = \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu \ \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} r_P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \\ \frac{\mu_1 - r_P}{\mu_1 - \mu_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 50r_P \\ 50r_P - 5 \end{pmatrix}.$$

Den globale minimum-varians portefølje har en forventet afkastrate på $b/c = 0.1073$ og en varians på $1/c = 0.1951$ & derfor standardafvigelse på 0.4417. De efficiente porteføljer er de minimum-varians porteføljer, hvis forventede afkastrate ligger over den forventede afkastrate på den globale minimum-varians portefølje. Grafisk: Se figurene nedenfor.

Spg. 2.b [10%]

Agenten vil vælge den portefølje, der maksimerer hans forventede nytte. Det vil være en efficient porteføjle (derfor er det nok at kende/bestemme fx dens afkastrate, når man har sine andre ligninger) & lige netop den, der svarer til det punkt, hvor hans "forventet nytte"-isokvanter tangerer den efficiente rand. Nytteisokvanterne er fastlagt ved

$$r_P - \frac{\sigma_P^2}{\lambda} = \text{konstant} \Leftrightarrow \sigma_P^2 = \lambda r_P + \text{en anden konstant},$$

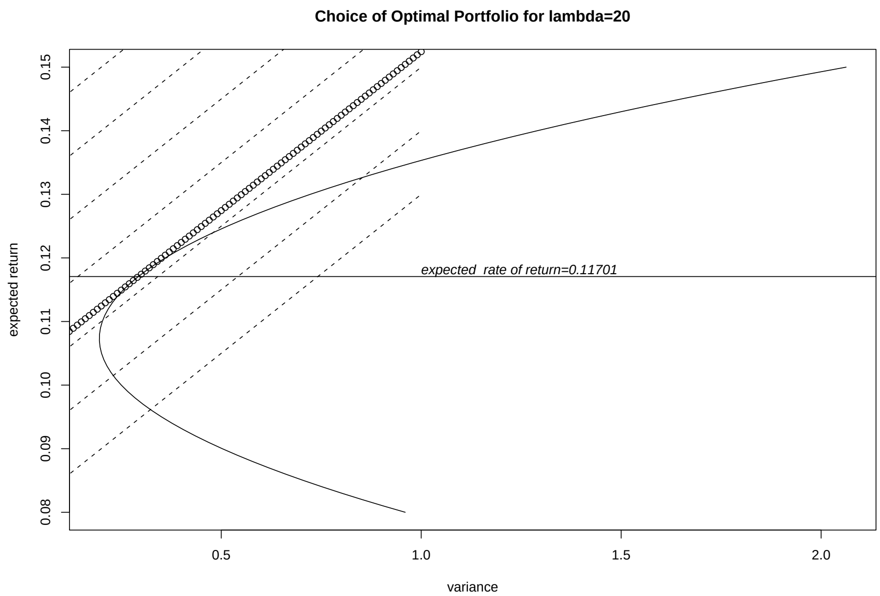
og er altså rette linier med hældning λ i (r_P, σ_P^2)-rummet.
Den efficiente rand er fastlagt ved $\sigma_P^2 = 12 - 220r_P + 1025r_P^2$, så hældningen på dens tangent er

$$\frac{d\sigma_P^2}{dr_P} = 2050r_P - 220.$$

Så om optimum gælder

$$2050r_P^{opt} - 220 = \lambda \Leftrightarrow r_P^{opt} = \frac{220 + \lambda}{2050}.$$

Grafisk ser det således ud :



Spg. 2.c [10%]

Står oplysningen om tangentsporteføljens forventede afkastrate til troende, så har dens afkastrate en standardafvigelse på $\sqrt{12 - 220 * 0.11428 + 1025 * 0.11428^2} = 0.4948$. Så den efficiente rand med riskofrit aktiv ("capital market line") er en ret linie i (σ_P, r_P)-rummet. Linien går igennem $(0, r_0)$ og har en hældning på

$$\alpha_{CML} = \frac{0.11428 - r_0}{0.4948} = 0.06928$$

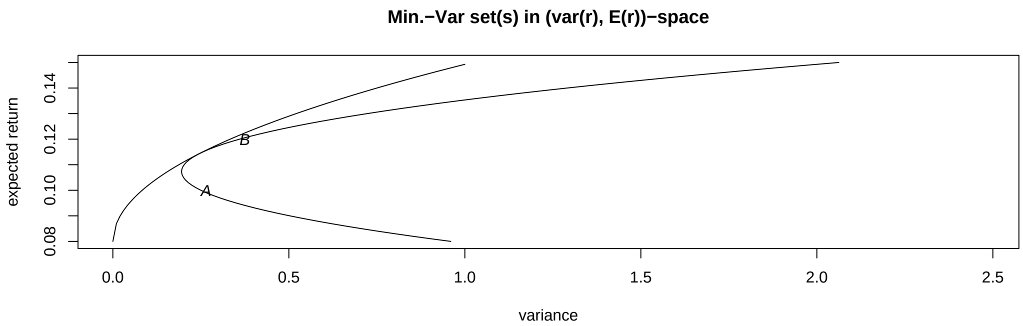
Så i (r_P, σ_P)-rummet er CML en linie med hældning $1/0.06928 = 14.43$.
I (r_P, σ_P)-rummet er den "gamle" efficiente rand (dvs. uden risikofrit aktiv) givet ved

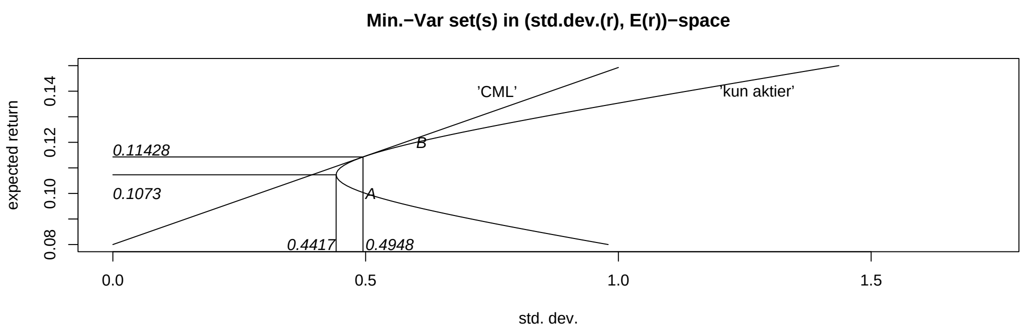
$$\sigma_P = \sqrt{12 - 220 r_P + 1025 r_P^2}.$$

Hældningen på tangenten er

$$\frac{d\sigma_P}{dr_P} = \frac{2050 * r_P - 220}{2\sqrt{12 - 220 r_P + 1025 * r_P^2}}$$

I punktet "$r_P = 0.11428$" er denne hældning lig med 14.43, og det var netop hældningen på CML hvis tangentpf. havde 0.11428 som forvenet afkastrate. Så "pengene passer". Grafisk ser det sådan ud (idet aktierne er blevet omdøbt til "A" og "B"):





Dersom man kan huske (eller udlede) formlen

$$\mu_{tg} = \frac{(\mu^e)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mu^e}{\mathbf{1}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mu^e} + r_0,$$

(jvf. noterne) og udregner højresiden til 0.11428, så er det naturligvis også iorden. Variansen på tg-pf's afkastrate er 0.2448 og vægtene (tg-pf indeholder jo kun aktierne) er givet ved

$$x_{tg} = \mathbf{\Sigma}^{-1}[\mu\ \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} \mu^{tg} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.286 \\ 0.714 \end{pmatrix}.$$

Så kovariansen mellem afkastraterne er

$$(1,0)^\top \mathbf{\Sigma}\begin{pmatrix} 0.286 \\ 0.714 \end{pmatrix} = (0.25, 0.10)^\top \begin{pmatrix} 0.286 \\ 0.714 \end{pmatrix} = 0.1429$$

CAPM-relationen siger:

$$\underbrace{\mu_1 - r_0}_{=0.10-0.08=0.02} = \underbrace{\frac{\text{cov}\,(\text{“ aktie 1”, “tg” })}{\text{Var}\,(\text{“tg”})}}_{=\frac{0.1429}{0.2448}=0.5837} \underbrace{(\mu^{tg} - r_0)}_{0.11428-0.08=0.03428}$$

Da $0.5837 * 0.03428 = 0.0200$ så holder CAPM-relationen for aktie 1. Men det skal den også når markedsporteføljen er en MV-optimal portefølje (og det er tg-pf jo). Man kan evt. sige “Rolls kritik” eller henvise til en propostion i noterne (Prop. 32, fx).

Opgave 3

<u>Spg. 3.a</u>

Black-Scholes formel angiver den (eneste) arbitrage-fri pris på en strike-K, udløb T call-option (dvs. pay-off $(S(T)-K)^+$ på tid T). Formlen er her angivet for "idag=nu = tid 0", så vi skriver $C(S(0), r, T, K, \sigma)$ for call-prisen.
$S(0)$ er aktiekursen idag, r renten (angivet på kontinuert tilskrevet basis) og σ er aktiens volatilitet. Aktiens afkastrate over et tidsinterval Δ har en varians der ca. (lidt afh. hvordan afkast præcis måles) er proportional med Δ og proportionalitetsfaktoren er σ^2. Eller med symboler: Logafkast er uafhængige og

$$\ln\left(\frac{S(t+\Delta)}{S(t)}\right) \sim N(\cdot\Delta, \sigma^2\Delta),$$

hvor middelværdien afhænger af om det er P eller Q vi arbejder under. Og en hvilkensomhelst P-forventet afkastrate bli'r alligevel til r under Q.

<u>Spg. 3.b</u>

Put-call-pariteten (læg mærke til, at r er en kontinuert tilskrevet rente, så nk-obl. prisen/disk.-faktoren er $P(0,T) = d(0,t) = e^{-rT}$):

$$C(S(0), r, T, K, \sigma) - P(S(0), r, T, K, \sigma) = S(0) - e^{-rT}K.$$

Bruger man vinket ser man ("in shorthand notation") $C(T) - P(T) = (S(T)-K)^+ - (K - S(T)^+) = S(T) - K$, s ved at gange med e^{-rT} & tage $\mathbf{E}^Q$, følger resultatet "in no time flat".

<u>Spg. 3.c</u>

Skriv $d_{1,2} = \frac{\ln(S(0)/K)+(r\pm\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$. Så tager vi "hovedet under armen" og regner:

$$\begin{aligned}
C(\ldots,-\sigma) &= S(0)\Phi(-d_1) - Ke^{-rT}\Phi(-d_2) \\
&= S(0)(1-\Phi(d_1)) - Ke^{-rT}(1-\Phi(d_2)) \\
&= \underbrace{S(0) - Ke^{-rT}}_{=C(\ldots,\sigma)-P(\ldots,\sigma) \text{ fra p/c-par.}} - (\underbrace{S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)}_{=C(\ldots,\sigma) \text{ fra B/S-formel.}}) \\
&= -P(\ldots,\sigma).
\end{aligned}$$

Det kan diskuteres om venstresiden i 1. ligning giver "finanisiel mening" men "matematisk" er der ingen problemer. Og resultatet er så pænt, at det må ku' gi's mening!