Dynamiske Rentemodeller

BDT & andre én-faktor modeller

Notat til Investments 2002

Oversigt

- Behovet for dynamiske modeller.
- Klassiske dynamiske modeller og forskellige specifikationer.
- De klassiske modellers mangler.
- Ny indsigt og moderne modeller.
- BDT modellen.
- BDT modellens løsning.
- BDT eksempler.
- Efter BDT modellen....

Motivation og kort historisk baggrund

En simplificeret opdeling af fixed income modeller er følgende.

Statiske Modeller	Dynamiske Modeller

Lige vigtige men forskellige formål.

Statiske Modeller

- De statiske modeller modeller er modeller udelukkende for nutiden, tid 0.
- Tager udgangspunkt i observerede obligationspriser og beskæftiger sig med at fitte dagens
  - Nulkuponrentestruktur

Eng.:

- zero-coupon yields
- zero-coupon interest rates
- pure discount rates
- spot rates

kært barn, mange navne!

Statiske Modeller II

- Typisk antages en funktionel form for *R(T)*-kurven, dvs. der vælges en model som f.eks.
  - Nelson-Siegel, extended Nelson-Siegel (Svensson)
  - Polynomial (cubic) spline
  - exponential splines
  - CIR (mere senere)
  - etc.
- Man estimerer de model-parametre, som giver bedste fit til markedspriser.

Nulkuponrentekurve-estimation

Extended Nelson-Siegel:

$$y(t) = a + be^{-T} + cTe^{-T} + d\left[\frac{1-e^{-T}}{T} - e^{-T} - \frac{T}{2}e^{-T}\right], \qquad T = \frac{t}{f}$$

Asymptotisk rente
$(t \to \infty \Rightarrow y_t \to a > 0)$

"Short term fast decay"
$(t \to 0 \Rightarrow y_0 = a + b)$

"Medium term, initially zero, fast decay ~ T, $t \to 0$"

"Long term, initially zero, slow decay ~ T^2, $t \to 0$"

- 5 parametre
- Robust model
- Meget fleksibel

Statiske Modeller III

- Modellen kan herefter anvendes til at prisfastsætte andre fixed income aktiver idag, f.eks.

  - Obligationer udenfor estimations-samplet.
  - Standard swaps.
  - FRA's (forward rate agreements).
  - Andre med kendte fremtidige betalinger.

- Modellerne indeholder <u>intet dynamisk element</u> og bruges ikke til at modellere (scenarier af) fremtidige priser eller rentekurver. Næste morgen gen-estimeres hele modellen.

Indledende overvejelser om usikkerhed...

- Frem til dette punkt har vi rekapituleret den statiske modellering...

- Men tidligere i kurset har vi snakket meget om volatilitet, og renter er naturligvis også volatile/usikre over tiden...

Denne erkendelse er første skridt i progressionen

Statiske Modeller → Dynamiske Modeller

- For at kunne analysere usikkerhed om renter og obligationspriser er det nødvendigt at modellere denne usikkerhed samt det simple faktum at tiden altså går, og at der er noget der hedder *fremtiden*!

Modellering af usikkerhed

Hvorfor er det nødvendigt at modellere usikkerheden?

Fordi der er talrige aktiver, hvis fremtidige betalinger afhænger af udviklingen af renten/renterne i fremtiden!

F.eks.

- $ Konverterbare (callable) obligationer.
- $ Optioner på obligationer.
- $ Optioner på renter, caps/floors.
- $ Realkredit obligationer!
- $ Virksomhedsobligationer.
- $ Pensions- og livsforsikringsforpligtelser.
- $ swaptioner, CMS.

Særligt varme emner i DK for tiden!

Modellering af usikkerhed II

De nævnte instrumenter/aktiver kan IKKE prisfastsættes vha. statiske rentestrukturmodeller à la Nelson-Siegel, fordi cash flows ikke er *deterministiske.*

Nogle analytikere mener at kunne klare sagen ved at lægge et spread til nulkupon rentekurven, men den holder ikke. Det er inkonsistent og helt uden teoretisk fundament. Det er en udbredt praksis i forsikring men ses også ofte anvendt i reakreditten.

”In finance we do not value interest-sensitive securities by discounting their cash flows by a Treasury yield plus a spread. Rather we use lattices or simulations to discount interest-sensitive cash flows. Those are the only ways that work.”

”So all of these methods that just add spreads to a yield are not going to give you precision... On Wall Street, sometimes we talk about spreads - but that is only after we have determined price. We say, "This translates into a spread," but we would never use the spread to come up with what the price should be.”

David Babbel

Modellering af usikkerhed III

Vi må konstruere *dynamiske modeller,* som kan *generere* fremtidige nulkuponrentestruktur *scenarier,* og som kan tillægge *sandsynligheder* til disse forskellige fremtidige scenarier.

Denne indsigt daterer sig tilbage til midten af 1970erne. De vigtigste artikler blev skrevet af disse folk

- –Merton (1973)
- –Vasicek (1977)
- –Cox, Ingersoll & Ross (1978, 1985)
- –og andre

Disse navne repræsenterer de klassiske (Markov)modeller, som vi nu skal se lidt på.....

De klassiske modellers idé

<u>Trin 1</u>:

Der tages udgangspunkt i nulkuponprisen/diskonteringsfaktoren:

$$\underbrace{P(\underline{x}_t}_{\text{naturtilstand, (vektor af faktorer, tid)}}, t, T) \qquad t \leq T$$

Udløbsdato

De modellerede priser skal have flg. egenskab (terminalbetingelse)

$$P(\underline{x}_T, T, T) = 1 \qquad \forall T$$

De klassiske modellers idé II

Trin 2: Faktorerne ”navngives” og stokastiske processer for deres udvikling over tid specificeres.

$$\underline{x}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{tid } t \text{ inflationsniveau} \\ \text{tid } t \text{ Consumer Confidence Index} \\ \text{tid } t \text{ Productivity Index} \\ \text{tid } t \text{ "Renten"} \\ \text{etc.} \end{array} \right\}$$

De anvendte processer er Itô-processer/diffusioner:

Wiener proces

$$d\underline{x}(t) = \alpha(\underline{x}_t, t)dt + \beta(\underline{x}_t, t)dW_t$$

”Drift” ”Volatilitet”

De klassiske modellers idé III

Trin 3: Et rent matematisk argument (Itô's lemma) bruges til at vise, at obligationsprisens dynamik må være (super kort notation)

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (dx)^2$$

hvor *P()* er det prisfunktional, som vi leder efter.

P er altså selv en Itô-proces.

Rimeligt abstrakt og som sådan ikke særlig anvendelig information....

De klassiske modellers idé IV

Trin 4: Det økonomiske argument: Der må ikke være muligheder for dynamisk arbitrage i modellen-, vi vil have, at modellen skal være internt konsistent.

$\Downarrow$

P(x,t,T) skal løse følgende PDE:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}(\alpha - \beta\lambda) + \frac{1}{2}\beta\beta^T \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial x^T} - rP = 0$$

hvor λ er markedsprisen på renterisiko....

Der resterer ”blot” at løse denne ligning under hensyntagen til terminalbetingelsen...

Alternativ repræsentation af løsningen

En ækvivalent/alternativ repræsentation af løsningen er den såkaldte *Feynman-Kac* (probabilistic representation) repræsentation

$$P(\underline{x},t,T) = E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^T r(u,x_u)\,du} \right\}$$

hvor *Q* er det risikoneutrale sandsynlighedsmål.

Kan disse ligninger mon løses for *P()?*

Det afhænger stærkt af, hvordan faktor-processer blev specificeret....

Løsninger ??

Der er en chance for at finde eksplicitte/analytiske løsninger, hvis vi har

– Et begrænset antal faktorer.
– Valgt ”pæne” processer for disse.

Det indlysende faktor-valg i en model for obligationsmarkedet er naturligvis ”renten”, *r,* men hvilken rente?

Traditionelt har man valgt den (ultra)korte rente (*the instantaneous short rate*), selvom der nemt kan argumenteres for, at det ikke er det smarteste valg.

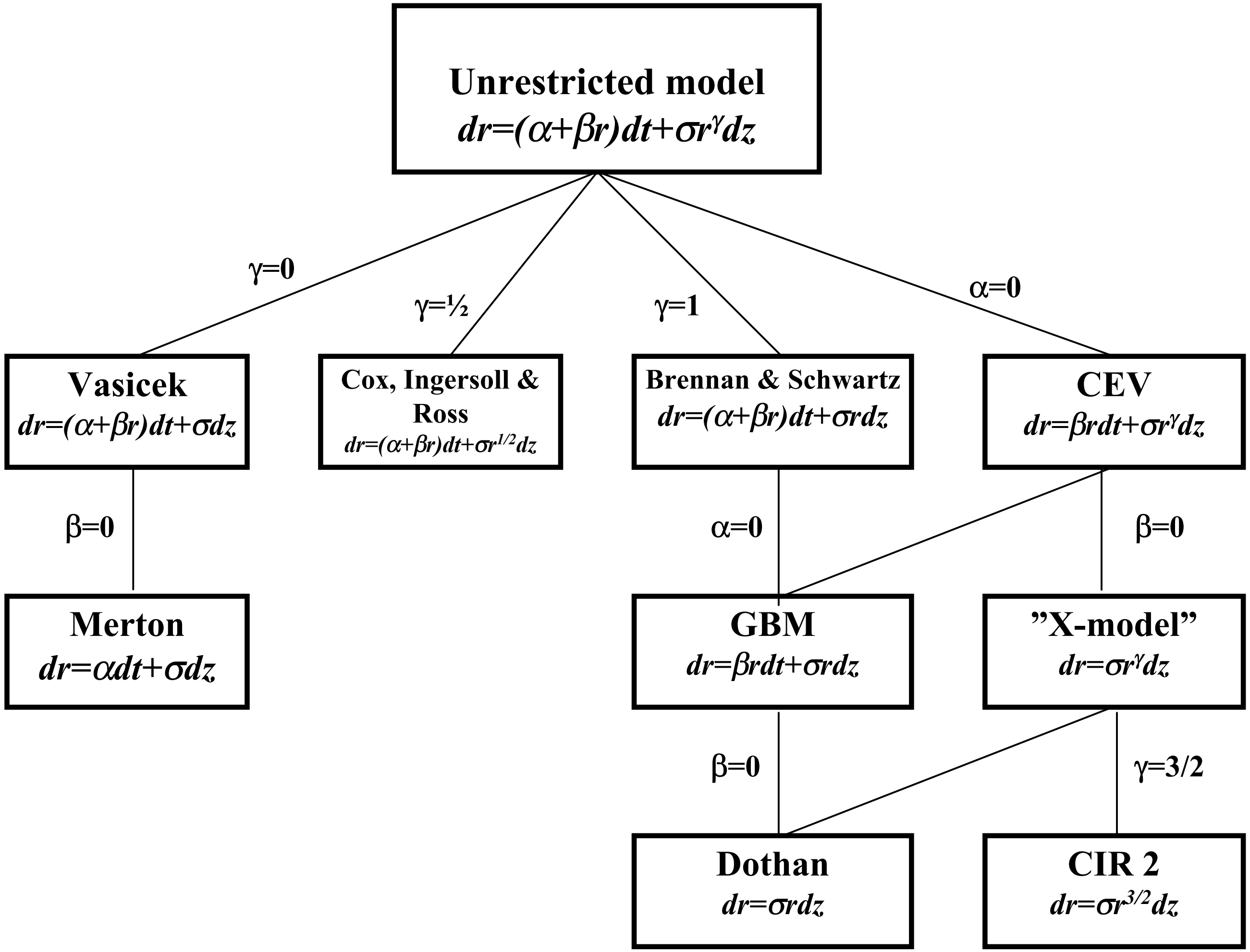
En kamp mellem specifikationer

Her følger nogle af (ophavsmændende til) de mest berømte specifikationer:

- Merton (1973) $$dr = \mu dt + \sigma dW(t)$$
- Vasicek (1977) $$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW(t)$$
- Dothan (1978) $$dr = \sigma r W(t)$$
- Cox, Ingersoll & Ross (1985) $$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW(t)$$

Lukkede løsningsformler kan udledes for obligationspriser og rentestrukturen i alle disse tilfælde

Flere specifikationer og forbindelsen mellem dem



Eksempel: Vasicek modellen

Nulkupon obligationspris

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

$$A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T)-T+t)(\kappa^2\theta-\sigma^2/2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4\kappa}\right]$$

Nulkupon rentestruktur

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln A(t,T) + \frac{1}{T-t}B(t,T)r(t)$$

Der kan endvidere udledes formler for obligationsoptioner.

Eksempel: CIR modellen

Nulkupon obligationspris

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\kappa+\gamma)2(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$$

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\kappa+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2\kappa\theta/\sigma^2}$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2+2\sigma^2}$$

Nulkupon rentestruktur

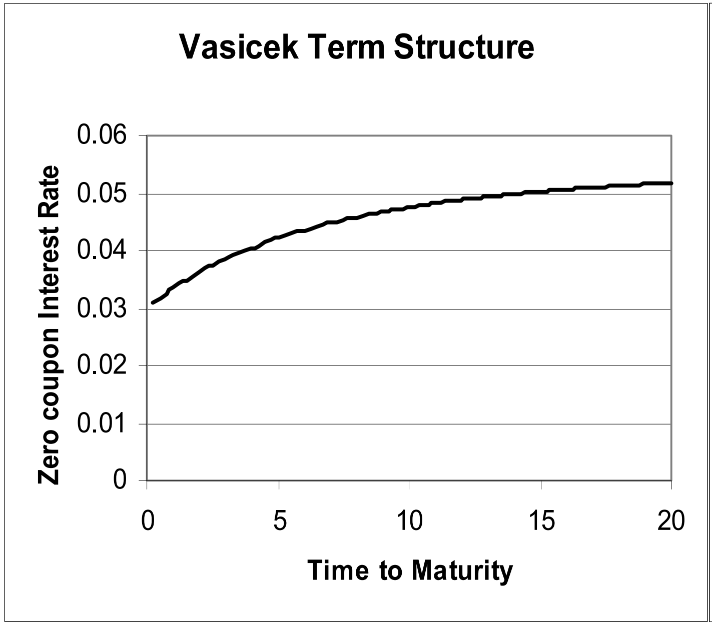
$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln A(t,T) + \frac{1}{T-t}B(t,T)r(t)$$

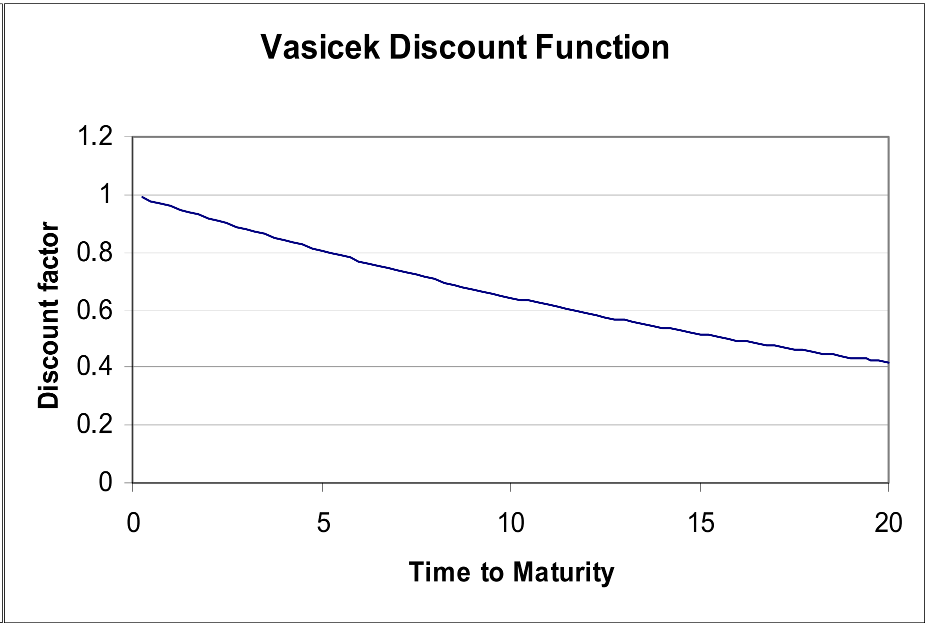
Igen kan der udledes formler for obligationsoptioner.

Observationer og kritik

- Bemærk: Man får faktisk også rentestrukturkurven på tidspunkt 0 ud!
- Dvs: Vi får en statisk model som specialtilfældet $t=0$!
- Dette er på en måde lækkert, men det er på samme tid det største problem med disse modeller....
- Det er nemlig sådan, at $t=0$ versionerne af disse modeller sjældent fitter de observerede obligationspriser særligt godt. Dette er egentlig ikke overraskende set i lyset af, at der ofte overhovedet ikke anvendes nogen information fra markedets obligationspriser i estimation af modellerne. Estimation af modellerne tager typisk udgangspunkt i en tidsserie af renter, r_t.

Eksempler på rente- og disk.-fkt.-kurver





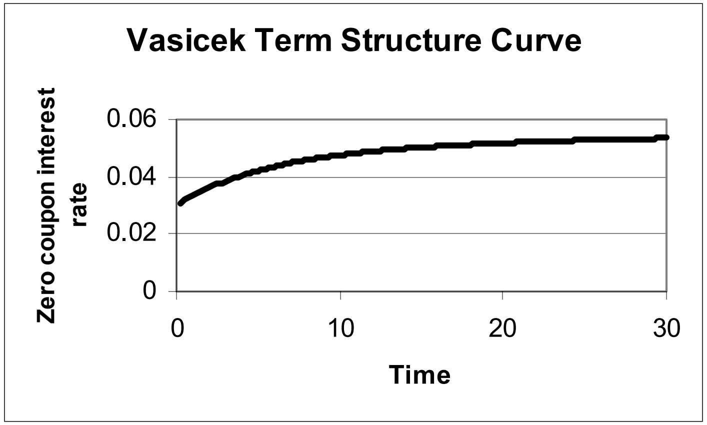
Vasicek estimations-eksempel

- En tidsserie-baseret estimation kunne give følgende resultat

  - mean reverison rate, κ 0.25
  - mean reversion niveau, θ 0.06
  - volatilitet 0.02
  - Markedspris på risiko 0.00
  - Initial rente, $r_{0,}$ 0.03

tids konsistent!

Men Nelson-Siegel estimationsresultatet – som er baseret på obligationspriser – er ikke den samme kurve!



Alternativ estimations-procedure

- Estimation af en klassisk model som Vasicek's kan også baseres på fitning til markedspriser – og man får sandsynligvis et godt resultat!

- Helt i tråd med Nobelprisvinder Richard Feynman's udtalelse: "*Give me three parameters and I can fit an elephant. Give me five and I can make it wave it's trunk!"*

- Men....estimaterne vil sandsynligvis variere temmelig meget fra dag til dag (de sande værdier er konstante).

- og estimaterne kan være økonomisk meningsløse – f.eks. negative eller meget højt mean reversion niveau og volatilitet.

Delkonklusion

- De klassiske modeller har et problem med virkeligheden – der er som oftest noget der ”ikke fitter”
- Modellerne er *internt konsistente,*
- ...men ikke *eksternt konsistente* (kalibrerbare).

Fitning af CIR modellen til markedet
Eksempel/Øvelse

Ny indsigt

- Disse svagheder blev for alvor erkendt omkring midten af 1980erne. Specielt blev det indset af en række forskere, at
  - hvis vi vil modellere rentestruktur-dynamikken er det usmart at ignorere den information, som er indeholdt i dagens observerede rentekurve.
  - modellen for dagens rentekurve og den observerede/fittede markedskurve skal stemme overens – modellen skal være <u>eksternt konsistent.</u>
- Pionererne var
  - Ho & Lee (1986), Heath, Jarrow & Morton (1987,1988,1992)
  - Black, Derman &Toy (1990)

Ho & Lee modellen

- Uheldigvis blev Ho & Lee modellen hurtigt betegnet som den første dynamiske ”arbitragefri rentestruktur model”

- Dette har medført stor forvirring – som om de klassiske modeller ikke var arbitragefri....

- Det er faktisk paradoksalt, - specielt når man tager i betragtning, at Ho & Lee modellen beskriver prisudviklinger som

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] & P_{i+1}^{n+1}(T-1) \\ P_i^n(T) \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\ & P_i^{n+1}(T-1) \end{tikzcd}$$

og efter en nærmere ”opskrift”, så modellen i en hvis forstand slet ikke arbitragefri, idet renterne i modellen kan blive negative!

Ho & Lee egenskaber

- Der er altså mange meninger om, hvad arbitragefri egentlig betyder.
- Det er imidlertid korrekt at fastslå, at Ho & Lee's model var den første som opfyldte kravet om ekstern konsistens – ingen statisk arbitrage.
- Ho & Lee modellen var ikke videre operationel og meget vanskelig at estimere.
- ... men ideen var sluppet løs....

Black, Derman & Toy's model

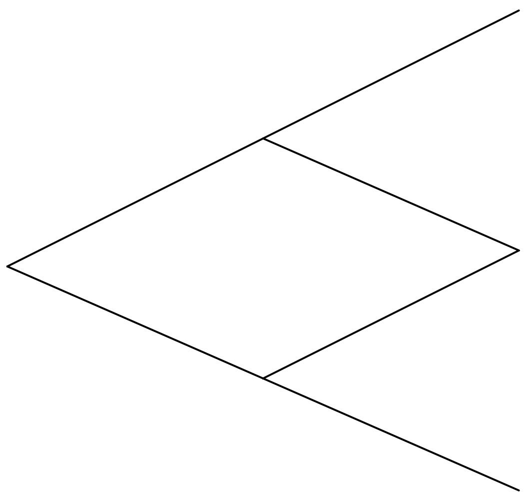
- BDT modellen blev hurtigt ”kult”, især i Danmark.
- Goldman Sachs' working paper var svært at få fat i.
- Mange af modellens detaljer var udeladt i den oprindelige artikel. Meget få personer kendte modellen til bunds og var i stand til at bruge den.
- ScanRate/Rio implementerede modellen i deres systemer $\Rightarrow$ man var nødt til at kende modellen!

Et nærmere kig på BDT modellen

- BDT modellen er en en-faktor model, der anvender den korte rente som faktor.

- I sin oprindelige udgave er det en diskret tids model.

- Usikkerheden beskrives vha af et binomialgitter, dvs.



(i,n) (tilstand *i*, tid *n*)

Lidt notation

Lad os betegne *T*-periode nulkuponprisen i tilstand *i* og på tid *n* som

$$P_i^n(T)$$

Fravær af dynamisk arbitrage (intern konsistens) medfører

$$P_i^n(T+1) = P_i^n(1)\left\{qP_{i+1}^{n+1}(T) + (1-q)P_i^{n+1}(T)\right\}$$

hvor *q* er den risikoneutrale sandsynlighed. I den basale udgave af BDT modellen, antages denne at være lig ½!

Bemærk: <u>Enhver</u> fremtidig tilstandsbetinget fordring kan prisfastsættes, hvis alle binomialgitterets korte renter er kendt...

Generel prisfastsættelse

- Prisfastsættelsesrelationen er

$$\begin{aligned} V_i^n &= P_i^n(1)\left\{\frac{1}{2}V_{i+1}^{n+1} + \frac{1}{2}V_i^{n+1}\right\} \\ &= \frac{1}{1+r_i^n}\left\{\frac{V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1}}{2}\right\} \end{aligned}$$

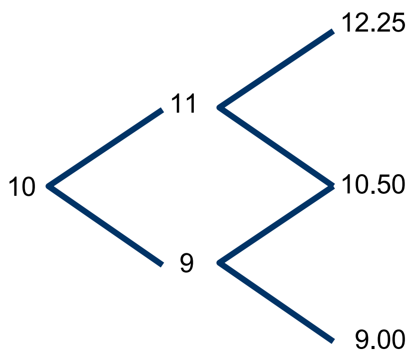
og hvis der er mellemliggende betalinger (kuponer)

$$\begin{aligned} V_i^n &= P_i^n(1)\left\{c^{n+1} + \frac{1}{2}V_{i+1}^{n+1} + \frac{1}{2}V_i^{n+1}\right\} \\ &= \frac{1}{1+r_i^n}\left\{c^{n+1} + \frac{V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1}}{2}\right\} \end{aligned}$$

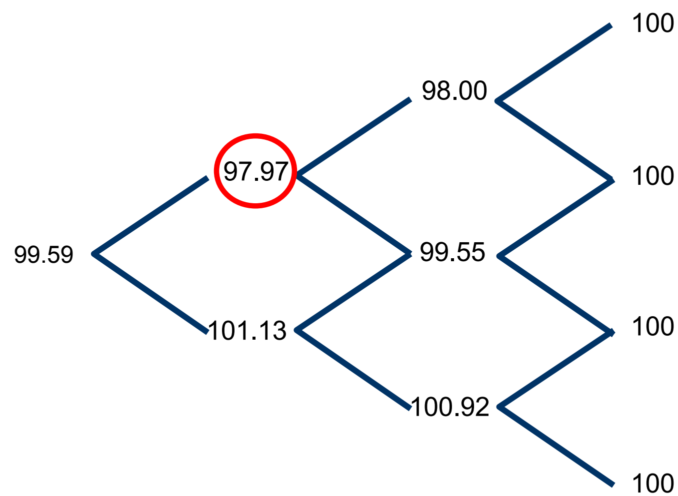
Eks: Prisfastsættelse af kuponobligation

3 årigt 10% stående lån

Binominalgitter
for renter



Binomialgitter
for obl.priser

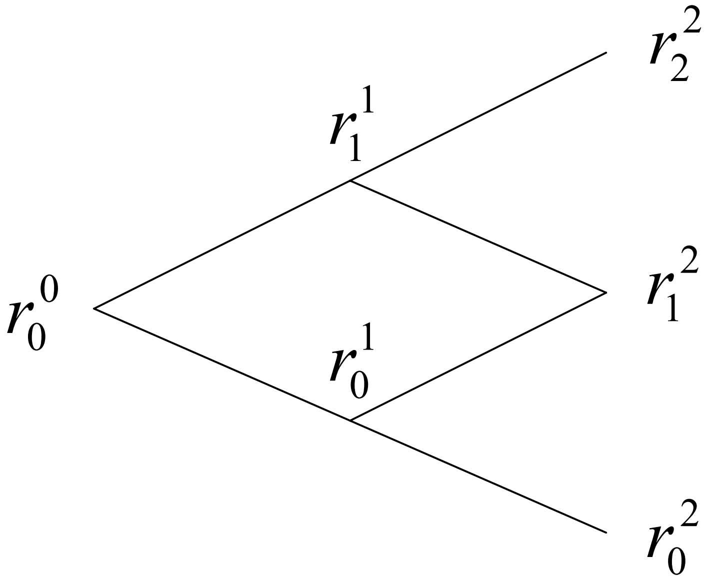


$$97.97 = \left(\frac{98+99.55}{2}+10\right)\cdot\frac{1}{1.11}$$

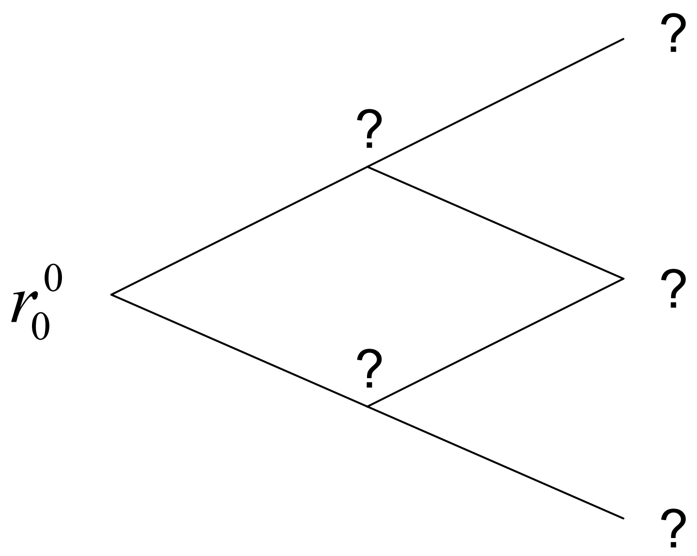
Obligationsprisen findes ved at diskontere tilbage periode for periode med start ved udløbet, hvor værdien er kendt.

Implementering

- Den generelle algoritme kan let programmeres – baglæns rekursion.
- Det der skal bestemmes er den korte rente i hvert af gitterets knudepunkter.



- Men det er dét, der er det vanskelige... fra start har vi ikke disse renter. Ved begyndelsen ser gitteret ud som følger



- Så inden vi kan komme videre, skal modellen løses.

Løsning af modellen

- Løsning af BDT modellen er en kompliceret affære, hvor vi skal sikre os, at gitteret med korte renter er konsistent med
  - den observevede/estimerede initiale rentestrukturkurve (ekstern konsistens).
  - den observede/estimerede initiale volatilitetskurve.
  - arbitrage prisrelationen (intern konsistens).

    Disse er de nødvendige inputs – derfor er BDT modellen automatisk eksternt konsistent!

Løsning af BDT modellen

- Den initiale diskonteringsfunktion - eller ækvivalent den initiale rentestrukturkurve - antages kendt/observeret.

- Sammenhængen er (diskret diskontering)

$$P_0^0(T) = P(T) = \frac{1}{(1+R(T))^T}$$

kendt/observeret/estimeret

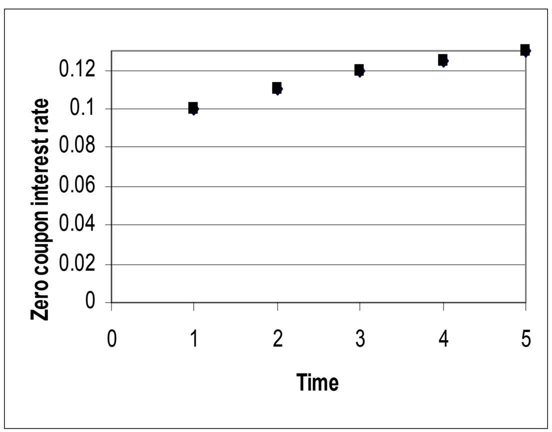
- Eksempel

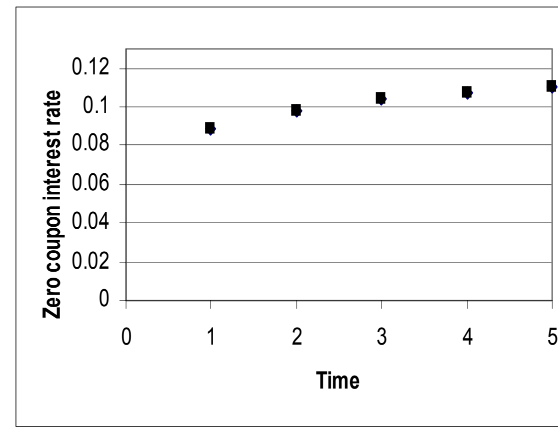
T	1	2	3	4	5
P(T)	0.909	0.812	0.712	0.624	0.543
R(T)	10%	11%	12%	12.5%	13%

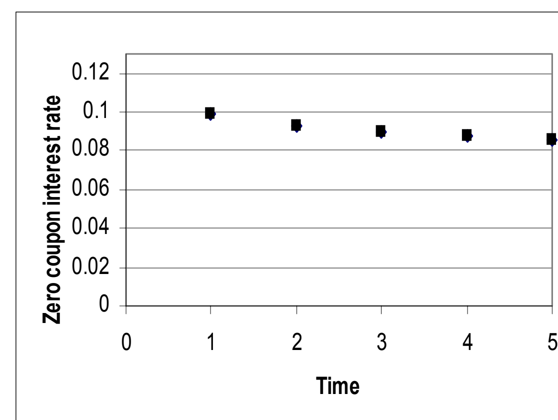
Hvilken volatilitetskurve?

- Den volatilitets-struktur, der skal bruges som input, vedrører nulkuponrenterne en periode (ex. et år) fremme.

- I morgen er der to mulige rentekurver:







Volatiliteter

- For eksempel

$$\left.\begin{array}{l} R_1^1(7) \\ \\ \\ R_0^1(7) \end{array}\right\} \text{Denne vol betegnes } \sigma(8)!$$

- Volatiliteten defineres og beregnes som

$$\begin{aligned} \sigma(T) &\equiv \sigma\left(\ln \widetilde{R}^1(T-1)\right) \\ &= \frac{\ln\left(\dfrac{\mathrm{R}_1^1(T-1)}{\mathrm{R}_0^1(T-1)}\right)}{2} \end{aligned}$$

- Disse estimater opnås relativt let....

BDT's eksempel

T	1	2	3	4	5
σ (T)	20%	19%	18%	17%	16%

(unødvendig/meningsløs)

Volatiliteten er typisk aftagende – dvs volatiliteten er ofte lavere for lange renter.

En sidste antagelse:

$$\sigma^{(n)} \equiv stdev(\ln r^{(n)}) \text{ konstant for givet } n$$

Hermed kan modellen løses!

Bemærk: Et relativt stort forberedende arbejde ifht. de klassiske modeller. Det er prisen for ekstern konsistens.

Løsning af BDT eksemplet

Trin 1 – bestemmelse af r_1^1 og r_0^1

Vi har

$$\sigma(2) = \frac{\ln \frac{r_1^1}{r_0^1}}{2} = 19\%$$

$$og$$

$$\begin{aligned} P(2) &= P(1)\left\{\frac{1}{2}P_1^1(1) + \frac{1}{2}P_0^1(1)\right\} \\ &= \frac{P(1)}{2}\left\{\frac{1}{1+r_1^1} + \frac{1}{1+r_0^1}\right\} \end{aligned}$$

To ligninger i to ubekendte. Substituer og reducer...

Løsning af BDT eksemplet II

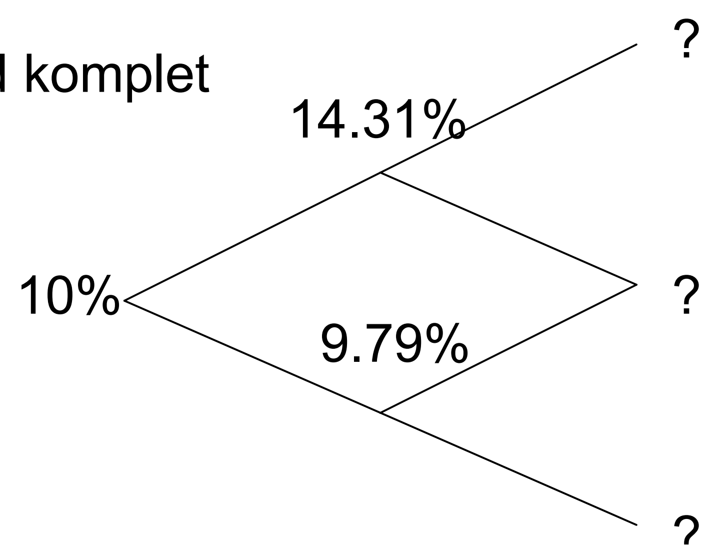
$$\frac{1}{(1.11)^2} = \frac{1}{2(1.10)}\left\{\frac{1}{1+r_0^1 e^{2\cdot 0.19}} + \frac{1}{1+r_0^1}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$r_0^1 = 9.79\%$$

$$r_1^1 = 9.79\% \cdot e^{0.38} = 14.31\%$$

og første trin er dermed komplet



Løsning af BDT eksemplet III

Trin 2: Bestemmelse af r_0^2, r_1^2 and r_2^2

$$\sigma(3) = \frac{\ln \frac{R_1^1(2)}{R_0^1(2)}}{2} = 18\%$$

$$og$$

$$\begin{aligned}
P(3) \quad &= \quad P(1)\left\{\frac{1}{2}P_1^1(2) + \frac{1}{2}P_0^1(2)\right\} \\
&= \quad \frac{P(1)}{2}\left\{\frac{1}{(1+R_1^1(2))^2} + \frac{1}{(1+R_0^1(2))^2}\right\} \\
&= \quad \frac{P(1)}{2}\left\{\frac{1}{(1+R_0^1(2)e^{0.36})^2} + \frac{1}{(1+R_0^1(2))^2}\right\}
\end{aligned}$$

Én ligning i én ubekendt....

Løsning af BDT eksemplet IV

Vi finder

$$R_0^1(2) = 10.7553\% \Rightarrow \underline{P_0^1(2) = 0.8152}$$

$$R_1^1(2) = R_0^1(2)e^{0.36} = 15.4159\% \Rightarrow \underline{P_1^1(2) = 0.7507}$$

Vendes tilbage til arbitrage relationen..

$$\begin{aligned} P_1^1(2) &= P_1^1(1)\left[\frac{1}{2}P_2^2(1) + \frac{1}{2}P_1^2(1)\right] \\ P_0^1(2) &= P_0^1(1)\left[\frac{1}{2}P_1^2(1) + \frac{1}{2}P_0^2(1)\right] \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} P_1^1(2) &= P_1^1(1)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+r_2^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+r_1^2}\right] \\ P_0^1(2) &= P_0^1(1)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+r_1^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+r_0^2}\right] \end{aligned}$$

Løsning af BDT eksemplet V

- To ligninger i tre ubekendte.... men husk den sidste antagelse. Den skal bruges nu...

$$\sigma^{(2)} = \frac{\ln \frac{r_2^2}{r_1^2}}{2} = \frac{\ln \frac{r_1^2}{r_0^2}}{2} = \text{konstant}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{e}^{2\sigma^{(2)}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1^2}{r_0^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$r_1^2 = r_0^2 \mathrm{e}^{2\sigma^{(2)}}$$

$$r_2^2 = r_1^2 \mathrm{e}^{2\sigma^{(2)}} = r_0^2 \mathrm{e}^{4\sigma^{(2)}}$$

Løsning af BDT eksemplet VI

Det tidligere ligningssystem er nu

$$
\begin{aligned}
P_1^1(2) &= P_1^1(1)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(1+r_0^2 e^{4\sigma})}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+r_0^2 e^{2\sigma})}\right] \\
P_0^1(2) &= P_0^1(1)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(1+r_0^2 e^{2\sigma})}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+r_0^2)}\right]
\end{aligned}
$$

Dette er to ligninger i to ubekendte. Vi løser numerisk...

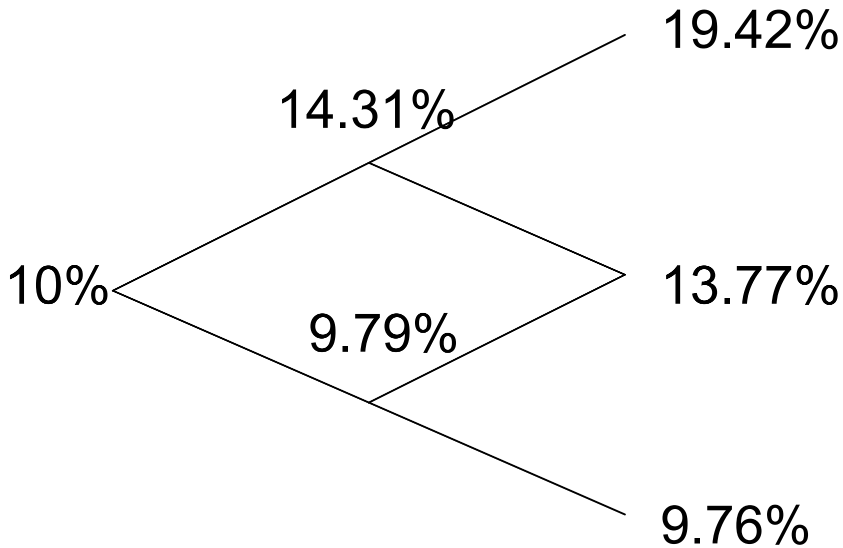
$$r_0^2 = 9.76\%$$

$$\sigma^{(2)} = 17.21\%$$

$$r_1^2 = 13.77\%$$

$$r_2^2 = 19.42\%$$

To års gitteret



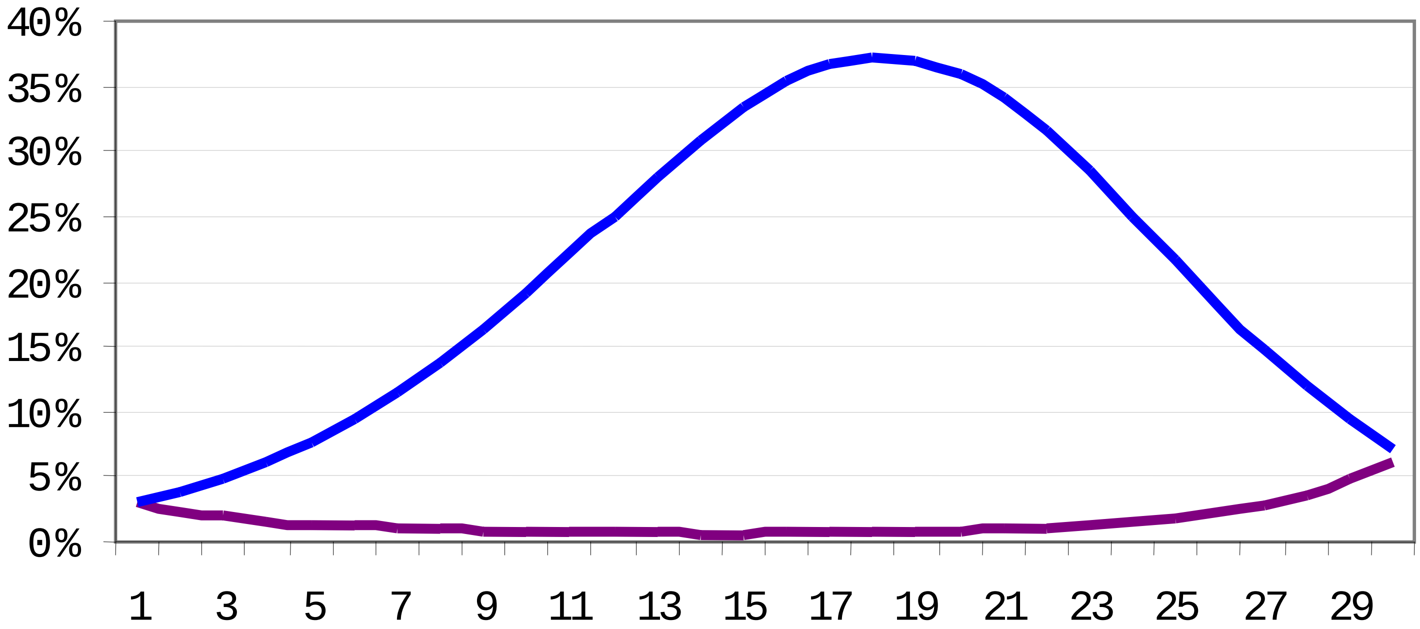
Kompleksiteten øges ikke ved at gå længere ud!

Alternativ metode: *Forward induction* (Jamshidian 1991)

The BDT Model

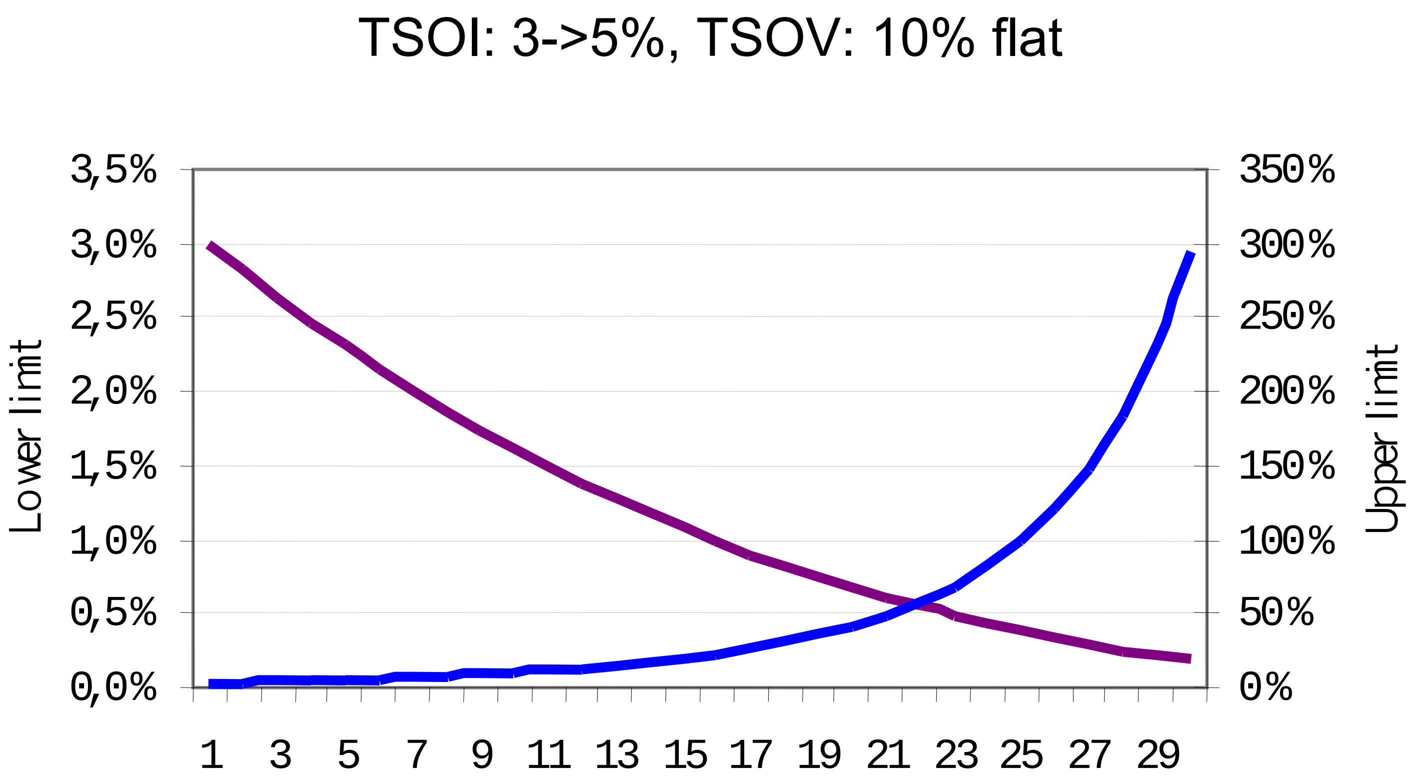
Mean Reversion

TSOI: 3->5%, TSOV: 25->11%



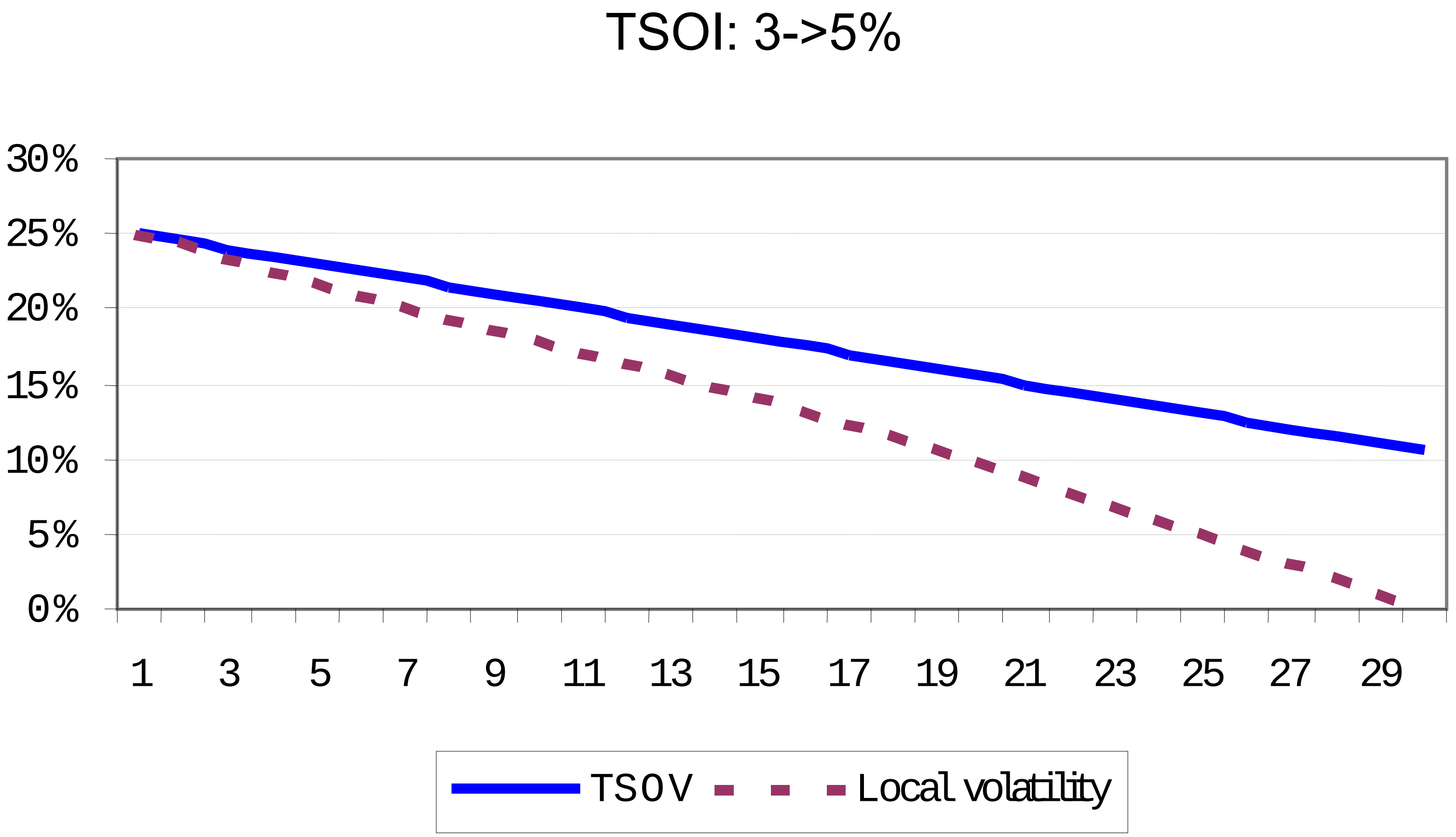
The BDT Model

Mean fleeing



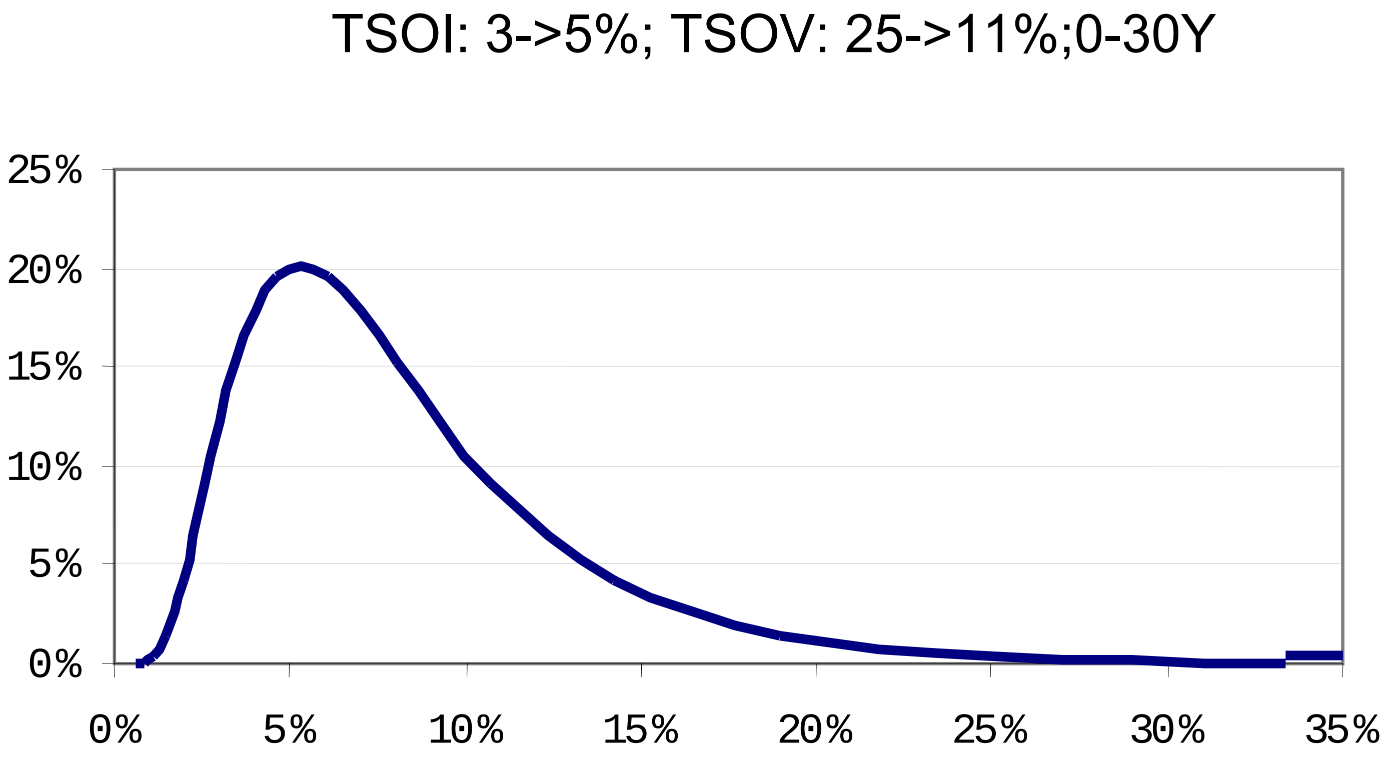
The BDT Model

Evolution of local volatility



The BDT Model

Log-normalfordeling for korte renter efter 15 år



Videreudvikling af BDT/HL ideerne

BDT modellen kan være lidt træls at implementere, og mange kan man bedre lide kontinuerte modeller. Derfor er der i nyere tid sket det, at man har forsøgt at kombinere de bedste egenskaber fra BDT/HL modellerne med de gode gamle klassiske modellers dyder. Det er der kommet en række nye modeller ud af....

Ho & Lee:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dW(t)$$

Hull & White:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW(t)$$

BDT:

$$d\ln r = [\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln r] + \sigma(t)dW(t)$$

Black & Karasinski:

$$\ln r = (\theta(t) + a(t)\ln r)dt + \sigma(t)\ dW(t)$$

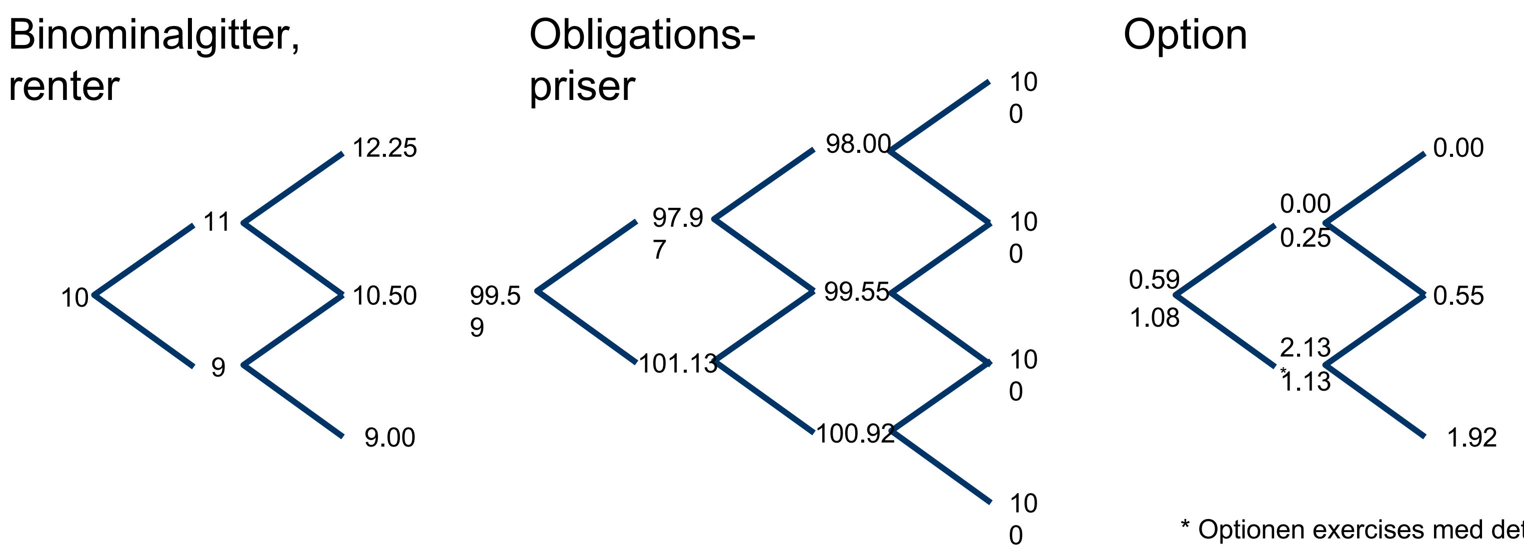
Øvelse

- I det første rente-gitter i regnearket: Check (de første tre år ud) at modellen er kalibreret, dvs. beregn *P(1), P(2), P(3)* og find volatiliteterne $\sigma(2)$ og $\sigma(3)$.
- Check prisfastsættelsen af st.lån 5% 2005 i BEGGE GITRE.
- Beregn de første nulkupon-renter (feks ud til fem år) i de to mulige kurver om et år og vis kurverne i samme graf.
- De to gitre giver samme priser til fixed income securities idag, fordi modellerne er kalibreret til samme rentekurve, men hvad med rentederivater?????

Eksempler på anvendelser af BDT modellen

En option på en obligation

2 årig Amerikansk call på 3 årig 10% st.lån, strike 99



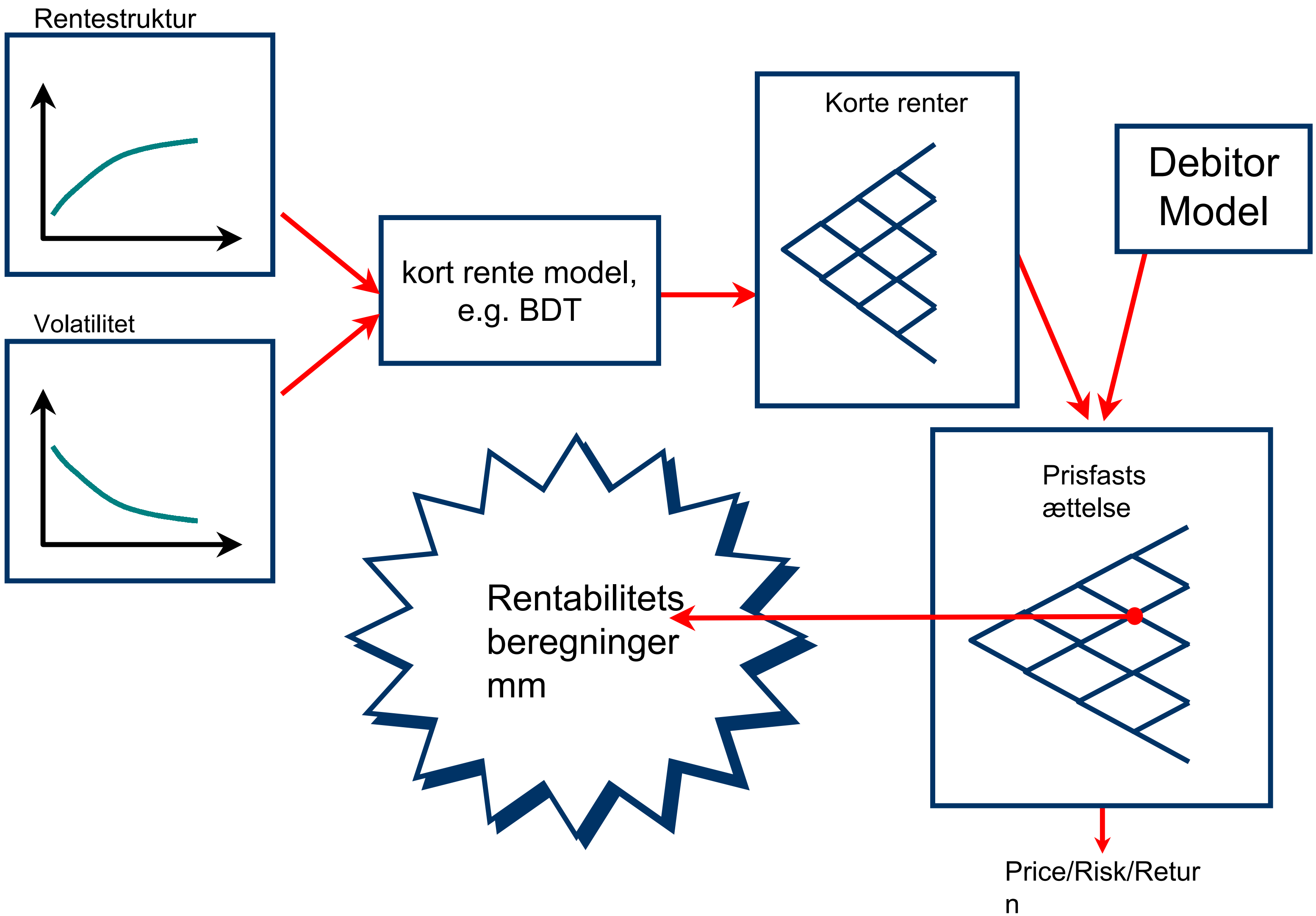
* Optionen exercises med det samme

- Vha BDT modellen findes prisen på den amerikanske call option til 1.08.
- Værdien af konverterbar obl.= IKONV-CallOption = 99.59 – 1.08 = <u>98.51</u>

Realkreditobligationer

- Obligation $\sim$ Fordring på pulje af underliggende lån
- Konverterbar obl $\rightarrow$ Model Prepayment Risk af Call Option
- Debitorerne er ikke homogene: Forskellige Call optioner
- Andre ting:
  - Konverteringsomkostninger.
  - Skat.
  - Opsigelsesvarsel.
  - mm.
- Stiafhængighed??

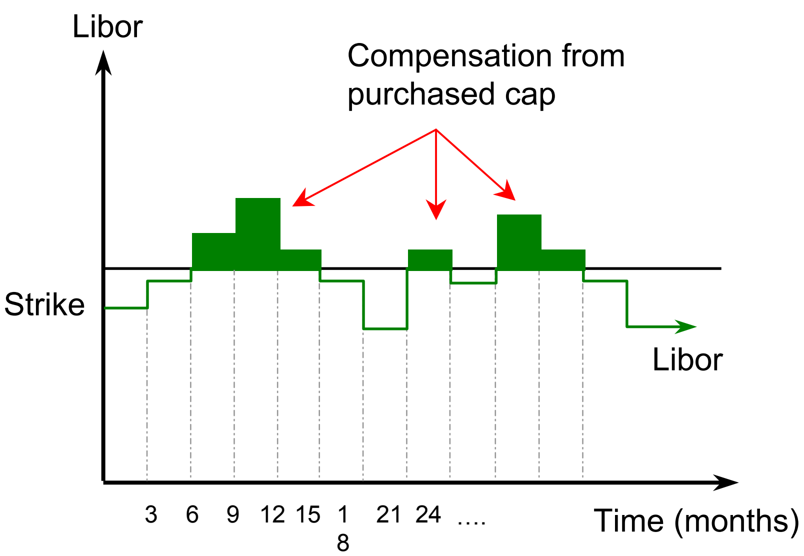
Prisfastsættelse af danske realer

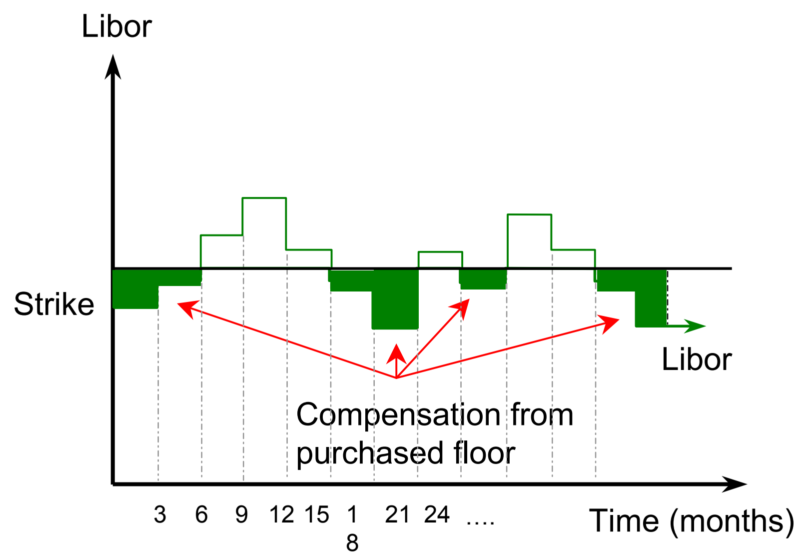


Caps/Floors

Kort beskrivelse

Optioner baseret på en fremtidig pengemarkedsrente (ofte 3M eller 6M LIBOR). Caps sikrer en maksimal funding rate, floors sikrer en mindste indskudsrente.



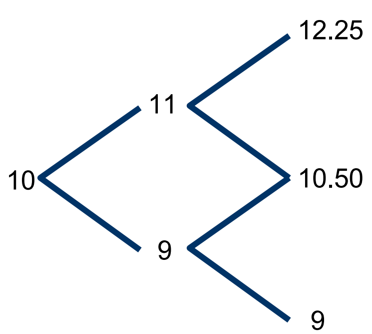


Prisfastsættelse af Cap

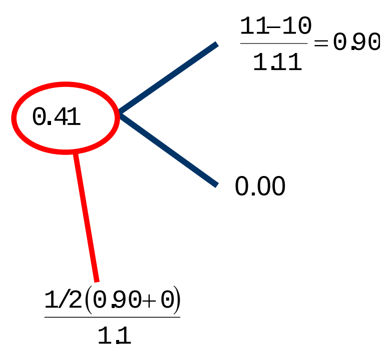
3Y Cap på 1Y rate, strike 10%

3Y Cap (1Y) = 1Y Call IRG (1Y) + 2Y Call IRG (1Y)

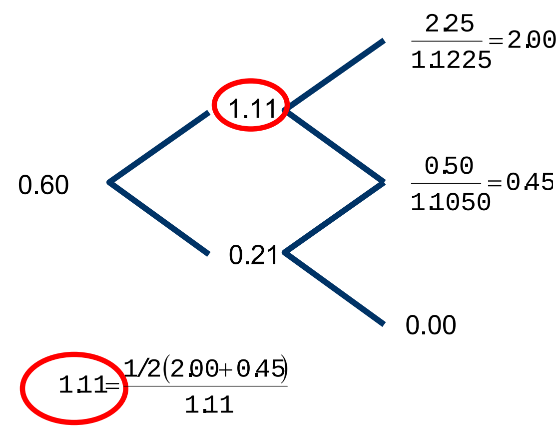
Binomialgitter



1Y Call IRG



2Y Call IRG



- Værdi 3Y Cap = 0.41 + 0.60 = 1.01