Matematisk statistik
Stockholms universitet

Simulering av inflations- och återförsäkringsinverkan på avsättning för oreglerade skador med hänsyn till Solvens II

Anna Naziropoulou

Examensarbete 2005:7

Postadress:
Matematisk statistik
Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
Sverige

Internet:
http://www.math.su.se/matstat

Matematisk statistik
Stockholms universitet
Examensarbete **2005:7**,
http://www.math.su.se/matstat

Simulering av inflations- och återförsäkringsinverkan på avsättning för oreglerade skador med hänsyn till Solvens II

Anna Naziropoulou*

20 september 2005

Sammanfattning

En försäkringsgivare ska vid varje tidpunkt, då försäkringsfall inträffat, kunna betala ut ersättning till den försäkrade. Oftast handlar det om pengar som ska betalas ut om flera år, i flera år, framåt. Då de flesta betalningar är långsiktiga krävs av ett försäkringsbolag att avsätta pengar i en så kallad reserv. Storleken på reserven är bl.a. beroende av hur stor del av skadekostnaden som är återförsäkrad.

Dagens reservsättningsmetoder tar ingen explicit hänsyn till inflatio nen och ger endast en punktskattning som motsvarar väntevärdet för återstående betalningar, dvs. ungefär 50 :e percentilen. Vi har här studerat hur omfattande den inflationsjusterade Chain Ladderreserven ska vara för att motsvara 75-, 90- respektive 99 % percentilen. Vikten av återförsäkring för försäkringsbolagen har belysts genom att variera självbehållens storlek i ett Excess of loss-kontrakt.

Olika inflationsmodeller och inflationsantaganden, i enlighet med Riksbankens inflationsmål, har gjorts för att simulera och studera inflationens betydelse i avsättningsprocessen. Resultaten har varit att vi kommit med förslag till nya nivåer för bestämning av bolagens reserv med explicit hänsyn till inflationen, jämfört med dagens beräkning med implicit hänsyn till tidigare inflation. Till exempel så ska en reserv på 50 % percentilnivån, i enlighet med Riksbankens inflationsmål, utökas med 0,87 % för att inflationsjusteras.

*Postadress: Matematisk statistik, Stockholms universitet, 106 91, Sverige. E-post: fk02ana@math.su.se Handledare: Thomas Höglund.

Abstract

An insurance company shall at any time, when a claim incurres, be able to pay compensation to the policyholder. Usually the compensation is to be payed out in the future for many years ahead. It requires from the insurance company to allocate money in a so called reserve. The size of the reserve depends, among other things, on how much of the cost of the claim which is reinsured.

Today's reserving methods takes no explicit consideration to the inflation and gives only a point estimate that satisfies the mean for remaining payments ("best estimate"), i.e. about the 50:th percentile. We have here studied how extensive the inflation adjustied Chain Ladder-reserv must be to fulfil the 75-, 90- respectively 99 % percentile. The importance of re-insurance has been illustrated by varying the size of the self retension in an Excess of loss – contract.

Different inflation models and inflation assumptions, in accordance with the inflation target of the Bank of Sweden, have been made for studying the inflation's significance in the provision process. The results have been that we can suggest new levels for prescibing the companies reserve with explicit consideration to the inflation, compared to todays estimate with implicit consideration to previous inflation. For exampel shall a reserv on the 50 % percentile level, in accordance with the inflation target, increase with 0.87 % to be inflation adjusted.

Förord

Denna studie om inflationens och återförsäkringens inverkan på avsättnigsprocessen, utgör mitt 20 poängs examensarbete för magisterexamen i Matematisk Statistik, Stockholms Universitet.
Arbetet utfördes på Finansinspektionens stabilitetsavdelning, Försäkrings-och Marknadsrisker, under VT 2005/HT2005.

Tiden på Finansinspektionen, från början till slut, har varit en enda lärorik resa genom försäkringsvärlden. För det vill jag främst rikta ett stort och varmt tack till min enastående handledare på Finansinspektionen, Erik Elvers.
Ett stort tack ska även aktuarierna, Anh Tuan Do, Younes Elong och Göran Ronge på Finansinspektionen ha, för råd och tips de har givit mig under resans gång, men även för alla intressanta diskussioner vi har haft kring lunchbordet.

Sist men inte minst vill jag tacka min handledare på Stockholms Universitet, Thomas Höglund.

Εκμεταλλευομαι την ευκαιρια να ευχαριστισω την μητερα και τον πατερα μου, που με μαθανε να πιστευω στον εαυτο μου και που παντα με δειχνουνε την αγαπη τους.

Kort om Finansinspektionen

Finansinspektionen är en myndighet som övervakar företagen på finansmarknaden. Deras uppdrag från allmänheten - riksdag och regering - är att bidra till att det finansiella systemet fungerar effektivt och uppfyller kravet på stabilitet. De ska också verka för ett gott konsumentskydd i finanssektorn.
Finansinspektionen har tillsyn över 3 500 banker, kreditmarknadsföretag, värdepappersbolag, fondbolag, börser, auktoriserade marknadsplatser, clearingorganisationer, försäkringsbolag, understödsföreningar och försäkringsmäklarbolag samt över kreatursföreningar.
På Finansinspektionen arbetar närmare 200 anställda och verksamheten finansieras huvudsakligen över statsbudgeten. De företag som Finansinspektionen bevakar betalar en tillsynsavgift till staten för att täcka kostnaden.

Stabilitet innebär att de finansiella företagen ska upprätthålla en sund balans mellan kapital och risker samt kunna hålla kunderna vad de lovat.
Arbetet för finansiell stabilitet innefattar att kartlägga risker och risktagande i banker och försäkringsbolag och i finanssektorn i sin helhet. Riskerna ska balanseras av en tillfredsställande kapitalstyrka och Finansinspektionen tar regelbundet in finansiella data från företagen om deras resultatutveckling och kapitalstyrka. Dessa uppgifter kompletteras med specialundersökningar och analys av utvecklingstendenser när det gäller finanssektorns omvärldsvillkor såsom ändrade regler, makroekonomiska förändringar och strukturutvecklingen på finansmarknaderna.

Innehållsförteckning

Inledning

Arbetet utförs i uppdrag av Finansinspektionens aktuarier på stabilitetsavdelningen, med syfte att studera inflationens effekt på *Chain Ladder*- avsättningen, men även för att få en uppfattning om hur mycket mer pengar, i procent, som måste avsättas för att ett skadeförsäkringsbolag ska kunna nå 75- 90- och 99 % percentilen för beräknade återstående betalningar. Syftet är även att studera vilken inverkan återförsäkringen har på försäkringsbolagens avsättningsprocess, genom att variera självbehållens storlek i ett *Excess of loss*-kontrakt.
Anledningen till varför Finansinspektionen stabilitetsavdelning intresserar sig av att inflationsjustera avsättningarna och tillförlitliga reserven så att den täcker mer än väntevärdet av alla skadekostnader, är de nya lagarna om ett allt mer riskbaserat försäkringssystem som ska träda i kraft. Lagar om hur mycket pengar ett bolag måste ha bestäms i den så kallade Solvens I-systemet. Just nu uppdateras Solvens I-systemet till Solvens II, som är ett riskbaserat system med skärpta avsättningsregler för försäkringsbolagen. De nya Solvens II-reglerna beräknas träda i kraft år 2010.
Arbetet består av två separata och oberoende delar, reservsättning för oreglerade skador och återförsäkring, som båda kan knytas till Solvens II.

Solvens

Solvens är ett mått på ett försäkringsbolags ekonomiska ställning. Solvens I, som är det befintliga EU-harmoniserade systemet för solvens, innehåller regler och krav för försäkringsbolagens solvens. Solvensreglerna bestämmer bl.a. den lägsta nivå för det buffertkapital som försäkringsbolagen måste ha för att de ska kunna fullgöra sina framtida åtaganden gentemot försäkringstagarna.

För att skapa en större, konkurrenskraftigare och framförallt säkrare försäkringsmarkand i EU och samtidigt på bästa sätt skydda försäkringstagarna utvecklas ett nytt *riskbaserat* solvenssystem. Dagens system som endast är en uppdatering av solvenssystemet som utvecklades på 70-talet är inte tillräckligt omfattade och moderniserat för att det ska ta hänsyn till risker och snabba förändringarna i försäkringsbranschen.

Således har ett nytt projekt, Solvens II, inletts med syfte att stärka försäkringstagarens skydd genom skärpta solvenskrav och genom att förse tillsynsmyndigheterna i EU (Finansinspektionen i Sverige) med lämpliga instrument för bedömning av försäkringsbolagens generella solvenssituation.
Nyckelordet i det nya systemet är ”riskmatchning”. För att på bästa sätt skydda försäkringstagarna vill man utveckla ett solvenssystem som bättre matchas till de sanna riskerna ett bolag har. Utvecklingen av gemensamma principer för riskhanteringen och tillsynsprocessen skall motivera försäkringsbolagen att mäta och hantera sina risker.
Det nya systemet ska kunna anpassas till försäkringsbranschens snabba förändringar och den snabba utvecklingen av produkter, metoder och modeller.

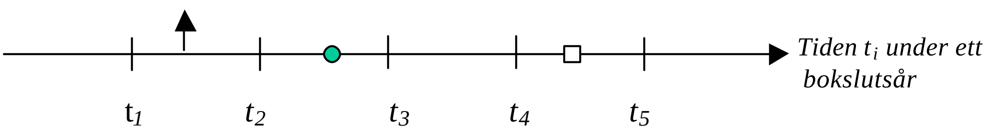
För skadebolag kommer det nya systemet att innebära en mer strukturerad avsättningsprocess och motivation till utveckling av interna modeller.
Det finns alltså ett behov av att undersöka nya riskanpassade modeller för reservsättningen.

Bakgrund och Teori

Här nedan förklaras bakgrunden till varför ett bolag måste avsätta en reserv som ska täcka framtida betalningar. I samband med det förklaras även Chain Ladder-metoden som är den mest använda metoden för framtagningen av reserven. Chain Ladder-metoden använder uppgifter om ackumulerade utbetalda belopp eller utvecklingen av kända skadekostnader för äldre skadeår för att skriva fram nu känd information om yngre skadeår till slutläge. I sin enklaste form görs detta utan korrigering för inflation under tidigare år eller explicit hänsyn till framtida sådan. En stor del av arbetet går ut på att göra lämpliga inflationsjusteringar i Chain Ladder- beräkningarna, med anledning av detta har jag ägnat ett avsnitt åt inflationen och inflationsmålet som Riksbanken satte år 1995.
Vidare ska vi ta en liten snabb blick i återförsäkring, av anledningen att reserven inte endast beror på skadornas storlek, utan även på hur stor del av försäkringsbeståndet försäkringsgivaren har återförsäkrat. Återförsäkring är en återkommande fråga i reservsättningsproblematiken.

Reservsättning för oreglerade skador

Genom att betala premier till ett försäkringsbolag säkrar man sig mot ekonomisk otrygghet såvida en oförutsägbar händelse skulle inträffa. Försäkringsbolaget binder sig till försäkringstagaren genom att betala ut ersättning om en sådan händelse skulle ske. Det är denna kostnad för skadan som är av intresse för försäkringsgivaren i skadebolag, eftersom den representerar den ekonomiska risken han tagit genom att försäkra objektet.
I stora drag går det till så att man tecknar försäkring i ett försäkringsbolag. Försäkringen börjar gälla när första premien betalts in. Under tiden som premierna avser försäkringsbolaget kan skador inträffa, så kallad försäkringsfall. När en skada inträffat rapporteras den till försäkringsgivaren. Försäkringsgivaren ”räknar” på skadan och betalar ut eventuell ersättning för skadan. Händelseflödet illustreras av figuren nedan.

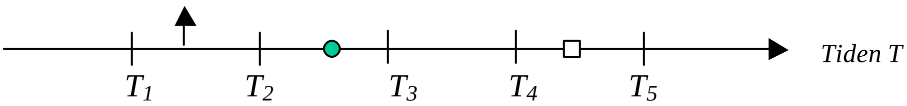


Skada upptäcks
Skadan rapporteras
Skadan slutregleras
Observera att tiden t_i är < ett bokslutsår

Kostnaderna för skador som inträffat under ett visst bokslutsår täcks av den premieintäkt försäkringsbolaget får för försäkringar som gäller under året. Men verkligheten är mer komplicerad än så. Det är sällan den slutliga kostnaden för dessa skador är känd vid årets slut, främst av två anledningar:

1. alla skador hinner inte rapporteras av försäkringstagaren
2. den slutliga kostnaden för rapporterade skador tar tid att fastställa

Ett mer verklighetsrelaterat händelseschema är som följer



Här låter vi varje period istället stå för ett bokslutsår. Figuren visar att skadan kan t.ex. inträffa under år T_1, rapporteras under år T_2 och slutregleras under år T_4. I sådana situationer kan man inte använda premieintäkten för bokslutsåret då skadan slutregleras för att täcka kostnaderna för en skada som har inträffat under ett tidigare bokslutsår.

För att lösa detta avsätter bolaget medel för att täcka de framtida kostnaderna för den aktuella perioden. Denna avsättning kallas för ”avsättning för oreglerade skador” i bokslutet och kan delas upp i två mindre poster:

- Avsättning för oreglerade skador
  - Inträffade men ej rapporterade skador (IBNR)
  - Rapporterade men ej slutreglerade skador (IBNER)

Reservsättningsproblemet (för oreglerade skador) är att uppskatta hur stor reserven ska vara.

Innan man ger sin in på att beräkna reserven är det vissa punkter man ska ha i åtanke. Man får bestämma sig för i fall det är brutto- dvs. innan återförsäkring eller netto- dvs. efter återförsäkring, reserv man avser. Återförsäkring är av den anledningen en betydelsefull bit som vi återkommer till senare.
Det är även viktigt att göra lämplig inflationsjustering då metoderna för reservsättning inte tar hänsyn till den.
Metoderna som används antar att durationen på försäkringarna är den samma för alla, vilket inte gäller i verkligheten. Om möjligt brukar man därför istället utgå ifrån vilket år skadorna inträffade.

Allmänt om metoder för reservsättning

Det finns olika metoder för beräkning av reserven baserade på olika vikter. Den mest användbara och vanligaste metoden är *Chain Ladder- metoden* som bygger på ”vad som hänt tidigare” medan *Bornheutter-Ferguson metoden* bygger på exponering. *Benktander/Hovinen metoden* kompromissar mellan Chain Ladder- metoden och Bornheutter-Ferguson metoden genom att vikta dessa tillsammans med den kända delen av skador och okända skador. En annan metod som går under namnet *Cape Cod* är i stort sett som Bornhuetter-Ferguson där enda skillnaden är att metoden använder samma skadekvot för varje år.

Chain Ladder-metoden

Chain Ladder-metoden är nog den populäraste metoden för att uppskatta skadereserver. Faktumet att den är fördelningsfri gör metoden relativ enkel att jobba med. De kända skadebeloppen presenteras ofta i form av en liksidig triangel, så kallad historisk triangel. Det är med hjälp av denna man statistiskt ska prediktera de okända betalningarna, vilka ska ges av

en så kallad framtidstriangel. Summan av alla predikterade betalningar i framtidstriangeln utgör reserven som vi vill komma åt.
Raderna i triangeln står för skadeår och kolumnerna för utvecklingsår. Skadebeloppet för skadeår i och utvecklingsår j i den historiska triangeln betecknas med d_{ij} och de okända skadebeloppen i framtidstriangeln med den stokastiska variabeln D_{ij}. Vidare låter vi m beteckna utvecklingsåret då alla skador är slutreglerade. Varje diagonal, $i+j$, i triangeln betecknar ett kalenderår. Således är diagonalen $i+j=m+1$ det senaste årets utbetalda belopp.
Figuren nedan illustrerar de två trianglarna i en rektangel.

Skadeår *i*	Utvecklingsår *j*					
	0	1	2	…	m-1	m
0	d_{00}	d_{01}	d_{02}	…	$d_{0,m-1}$	$d_{0,m}$
1	d_{10}	d_{11}	d_{12}	…	$d_{1,m-1}$	$\boldsymbol{D_{1,m}}$
2	d_{20}	d_{21}	d_{22}	…	$\boldsymbol{D_{2,m-1}}$	$\boldsymbol{D_{2,m}}$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
m-1	$d_{m-1,0}$	$d_{m-1,1}$	$\boldsymbol{D_{m-1,2}}$	…	$\boldsymbol{D_{m-1,m-1}}$	$\boldsymbol{D_{m-1,m}}$
m	$d_{m,0}$	$\boldsymbol{D_{m,1}}$	$\boldsymbol{D_{m,2}}$	…	$\boldsymbol{D_{m,m-1}}$	$\boldsymbol{D_{m,m}}$

Vi tänker oss att en diagonal går tvärs genom rektangeln så att två liksidiga trianglar bildas. Den övre triangeln bestående av d_{ij} variabler är den historiska triangeln och den undre triangeln bestående av de stokastiska variablerna D_{ij} är framtidstriangeln.
Det finns olika statistiska metoder för framtagningen av framtidstriangeln, Chain Ladder är en sådan metod. Metoden bygger på att de kumulerade skadebeloppen, C_{ij}, är proportionella mot skadebeloppen för föregående skadeår och utvecklingsår. Proportionalitetsfaktorn kallas för utvecklingsfaktor och betecknas f_j. I och med att Chain Ladder metoden utgår ifrån ackumulerade skadebelopp får vår reserv ett annat uttryck än summan av alla framtida betalningar, nämligen

$$R_i = C_{im} - C_{i,m-i} \tag{1}$$

Reserv för skadeår i *”startvärde” =känd skadekostnad*
”slutvärde” =okänd skadekostnad

Vi vill således uppskatta beloppen C_{im} som fås genom:

$$C_{im} = C_{i,m-i} * f_{m-1} * f_{m-2} * \ldots * f_{m-i} \tag{2}$$

där

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{m-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{m-j} C_{i,j}} \tag{3}$$

f_j är således medelvärdet av ökningen i skadebeloppen från kolumn j till $j+1$. Med detta kan vi formulera följande satser och följsats.

Sats 1: *$E\left[C_{i,j+1} \mid C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ij}\right] = C_{ij} * f_j$ där f_j inte beror på skadeåret.*

Sats 2: *Variablerna $\{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{im}\}$ och $\{C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{km}\}$ är oberoende då $i \neq k$.*

Sats 3: *$Var\left[C_{i,j+1} \mid C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ij}\right] = C_{ij} * s_j^2$*
Observera att den sista faktorn i variansen inte beror på skadeår.

Den historiska triangeln är alltid given, det är genom den och skattningarna av f_j faktorerna vi kan tillhandahålla framtidstriangeln. Hur kan vi vara säkra på att (3) är en bra skattning? Det är ju enda länken vi har mellan vad vi vet och vad vi vill veta. Som känt ska en bra estimator bl.a. innehava egenskapen att vara unbiased, d.v.s. $E\left[f_j\right] = f_j$. Följdsatsen nedan garanterar oss att f_j-faktorerna är unbiased.

Följdsats 1: *Sats 1 kan med hjälp av sambandet $E[Z] = E[E[Z \mid X]]$ (och sats 2) skrivas om till*

$$E\left[\frac{C_{ij+1}}{C_{ij}} \mid C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{ij}\right] = f_j$$

Alltså kan vi använda förhållandet C_{ij+1}/C_{ij} som en unbiased estimator av f_j.

Det här sättet att stega sig fram från ”startvärdet” $C_{i,m-i}$ till ”slutvärdet” $C_{i,m}$ för $i \geq m-j$ använder sig av samma utvecklingsfaktor f_j för alla skadeår för ökningen i skadebelopp från utvecklingsåret j till $j+1$. Faktorn f_j är bara ett medelvärde av de individuella utvecklingsfaktorerna $C_{i,j+1}/C_{ij}$ för skadeår $i < m-j$. Det är därför inte konstigt att en viss variation och osäkerhet kan förekomma i f_j och därmed i C_{ij}.
Konstigt skulle det vara om det visade sig att en viss trend förekommer i de individuella utvecklingsfaktorerna, om så är fallet då är en framställning av framtida skadebelopp missvisande. De individuella utvecklingsfaktorerna fås genom att dividera varje känd skadebelopp med motsvarande skadebelopp för föregående utvecklingsår. Man erhåller en ny triangel med enbart utvecklingsfaktorer, så som figuren på nästa sida visar.

Skadeår i	Utvecklingsår j					
	0	1	2	…	m-1	m
0	f_{00}	f_{01}	f_{02}	…	$f_{0,m-1}$	$f_{0,m}$
1	f_{10}	f_{11}	f_{12}	…	$f_{1,m-1}$	
2	f_{20}	f_{21}	f_{22}	…		
.	.	.	.			
.	.	.	.			
.	.	.	.			
m-1	$f_{m-1,0}$	$f_{m-1,1}$				
m	$f_{m,0}$					

T.ex. så är $f_{00} = \dfrac{C_{01}}{C_{00}}$

Genom att, med hjälp av minsta kvadratmetoden, anpassa en linje till varje kolumn kan man spåra en eventuell trend i utvecklingsfaktorerna. Som känt är räta linjens ekvation:

$$y = bx + c \tag{4}$$

y står för utvecklingsfaktorerna *x står för utvecklingsåren (0,1,…,m)*

För att få optimal anpassning sätter man

$$c = \bar{y} - b\bar{x} \tag{5}$$

och

$$b = \frac{\left\{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right\}}{\left\{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right\}} \tag{6}$$

där $\bar{y}$ och $\bar{x}$ är medelvärdet av y resp. x, och n är antalet skadeår.

Trenden kan nu spåras genom att undersöka b-faktorerna. Det finns tre möjliga utfall för b, nämligen att: $b > 0$, $b < 0$, $b = 0$

1. Då $b > 0$ finns en växande trend i faktorerna, de blir större och större. Man skulle underskatta reserven om man tog medelvärdet av faktorerna. Nackdelen med underskattning är att bolaget kommer att ta ut för lite pengar, vilket i värsta fall kan leda till konkurs.
2. I fallet då $b < 0$ är det tvärtom, nämligen att faktorerna successivt avtar. Skulle man använda sig av medelvärdet av faktorerna här, skulle man överskatta reserven. Detta kan leda till att bolagen tar ut högre premier än nödvändigt.
3. Idealt är fallet då $b = 0$, då kan man vara säker på att faktorerna är helt slumpmässiga och pålitliga vad gäller trenden i dem.

Figuren på nästa sida visar hur det kan se ut för de tre olika utfallen för b.

Skadeår *i*	Utvecklingsår *j* 0	1	2	3	4	5
0	1.10	1.45	1.45	$f_{0,3}$	$f_{0,4}$	$f_{0,5}$
1	1.15	1.40	1.10	$f_{1,3}$	$f_{1,4}$	
2	1.20	1.35	1.25	$f_{2,3}$		
3	1.25	1.30	1.35			
4	1.30	1.25				
5	1.35					
Trend i Faktorerna	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$			
Medelvärde av faktorerna	1.23	1.35	1.29			
”rätt” värde på faktorerna enligt trenden	1.4	1.20	1.29			
Kommentar	1.23<**1.4** underskattning	1.35>**1.2** överskattning	1.29=1.29			

Om Inflationen och Inflationsmålets Tillkomst

(Texten är hämtad från Riksbankens hemsida, www.riksabanken.se)

Inflation innebär att priserna i en ekonomi ökar lika mycket över tiden. Detta är nästan ekvivalent med att hushållens inkomster stiger lika mycket som deras utgifter. Således får hushållen betala mer för att få samma mängd varor. Däremot påverkas varken hushållens konsumtion eller det egentliga värdet (nyttan) när alla priser ökar lika mycket.

Innebörden av ordet inflation har genom tiden förändrats. Idag används ordet ofta som synonym till ordet prisökning. Den sortens prisökning som nämndes ovan kan i princip bara uppstå till följd av att centralbanken tillhandahåller för stora mänger pengar. Emellertid kan prisökningar på enskilda varor eller tjänster uppstå av olika skäl. Ett skäl är att priserna oftast stiger fortare i en högkonjunktur än under en lågkonjunktur. Under högkonjunktur är efterfrågan på varor och tjänster högre. Utbudsförhållanden är ett annat skäl till varför priserna kan öka.

Förändringen i Konsumentprisindex, KPI, är den vanligaste och mest använda måttet på inflation. Detta mått beräknas varje månad av Statistiska centralbyrån, SCB, genom att de varje månad ”köper” samma korg av varor och tjänster som de studerar prisförändringen på. För att väga ihop priserna på olika varor och tjänster använder SCB vikter som är baserade på beräkningar av hushållens konsumtion. KPI är ett så kallad levnadskostnads- eller kompensationsindex. Detta innebär att KPI mäter hur konsumenternas levnadskostnader utvecklas över tiden. Så som många andra mått har även KPI begränsning, nämligen att det endast tar hänsyn till hur priset på de varor som konsumeras ändras över tiden. En ökning av KPI behöver inte nödvändigtvis innebära att alla priser ökar. Löneutfallen bestäms dock främst genom förändringar i KPI, men även för hur pensioner ska skrivas upp är ökningen i KPI viktig. Därmed kan man sluta sig till att KPI trots allt är ett bra mått på hur de flesta priserna ändras över tiden.

En annan, om man kan kalla det begränsning med KPI är att priserna på olika varor vägs samman. Nackdelen är att prisökningar på enskilda varor, så kallade relativprisändringar, medför att KPI stiger. Det är därför vanligt att man rensar bort en del prisförändringar från KPI. Detta brukar kallas för underliggande inflation eller kärninflation.

Harmoniserat index för konsumentpriser (HIKP) är ett EU-harmoniserat index som tagits fram för att mäta inflationen i EU-området och som är jämförbart länderna emellan.

Sedan 19 november, 1992 har Sverige en flytande växelkurs, vilket innebär att kronans värde mot andra valutor tillåts fluktuera och bestäms på valutamarknaden. Övergången från fast till flytande växelkurs ledde till att kronans värde mot andra valutor försvagades (depricierades). Detta och förändringar i indirekta skatter gav upphov till inflationsimpulser. Därför angav Riksbanken att målet för penningpolitiken ska från och med 1995 vara att begränsa förändringen i KPI till 2 % per år, allt för att uppnå prisstabilitet.

Inflationsmålet är sedan dess definierat som att den årliga ökningen av KPI ska vara 2 %, med ett toleransintervall på plus/minus 1 % kring detta mål.

Det finns många olika anledningar till varför inflationsmålet valdes till just 2 %. Inflationen har både begräsningar uppåt och nedåt. Begränsningen uppåt är baserad på de historiska erfarenheterna med hög inflation. Tider med hög inflation är oftast förknippade med stora fluktuationer. Eftersom det är svårt att helt rensa bort effekterna av kvalitetsförbättringar i KPI finns det en tendens att KPI överskattar hushållens faktiska levnadskostnadsökningar. Därför är en begränsning nedåt (=inflationen ett positivt tal) viktig för att undvika deflation, dvs. när den allmänna prisnivån faller. Detta och mycket annat talar om för att målet bör vara lågt men positivt. Avvikelser från målet är oundvikliga, vilket är anledningen till varför ett toleransintervall infördes.

De flesta centralbanker världen över fokuserar liksom Riksbanken på att hålla inflationen så låg och stabil att företag och hushåll inte behöver ta hänsyn till den i sina ekonomiska förehavanden. Detta skapar av flera skäl goda förutsättningar för en gynnsam ekonomisk utveckling.

Inflationsmodeller

I detta arbete har programmet Excels slumptalsgenerator använts för att slumpa fram inflationen från olika fördelningar, vilket har varit enkelt och bekvämt.
En alternativ inflationsmodell, som är fördelningsfri, är att betrakta årets inflation genom att studera fjolårets inflation som har dragning mot långsiktigt väntevärde. I matematiska termer innebär det:

$$f_i = f_{i-1} + c*(m - f_{i-1}) + e \qquad (7)$$

årets inflation

Normalfördelad (0,1) brus

fjolårets inflation

inflationens väntevärde

Konstant som fås genom minsta kvadratmetoden

Man får bestämma sig för ett ”starvärde” för f_{i-1} då $i = 1$ genom att t.ex. betrakta fjolårets inflation och man får bestämma sig för det väntevärdet μ man strävar efter att uppnå. Metoden är framtagen av Björn Palmgren.

Återförsäkring

Precis som i privatförsäkring kan även försäkringsgivaren försäkra sig mot ekonomisk otrygghet såvida en oförutsägbar händelse, som t.ex. (naturkatastrof i form av) jordbävning, skulle inträffa. Det är uppenbart ett försäkringsbolag i dagens samhälle, med tanke på de alltmer ökade kraven på ansvarstagande för produkter och miljö, naturkatastrofer och den avancerade vetenskapliga forskningen, inte ensam kan bära all risk utan att använda någon form av riskfördelning.
Återförsäkring innebär att en försäkringsgivare, cedenten, mot en på förhand överenskommen premie, återförsäkringspremie, överför en större eller mindre del av en försäkring eller ett bestånd av försäkringar på en eller flera återförsäkrare. Följaktligen delas risken mellan flera försäkringsbolag vilket innebär att varje enskild försäkringsföretag i princip kan på egen hand teckna hur stora risker som helst. Genom att bolaget utökar återförsäkringen minskar dess åtaganden.

Återförsäkringen har två huvuduppgifter:

1. att skydda det enskilda bolaget mot katastrofskador
2. att utjämna det enskilda bolagets årliga affärsresultat

Återförsäkring har även i uppgift att skapa teckningskapacitet hos det enskilda bolaget, d.v.s. ge det möjlighet att teckna försäkringsbelopp som är många gånger större än vad bolagets självbehåll tillåter.

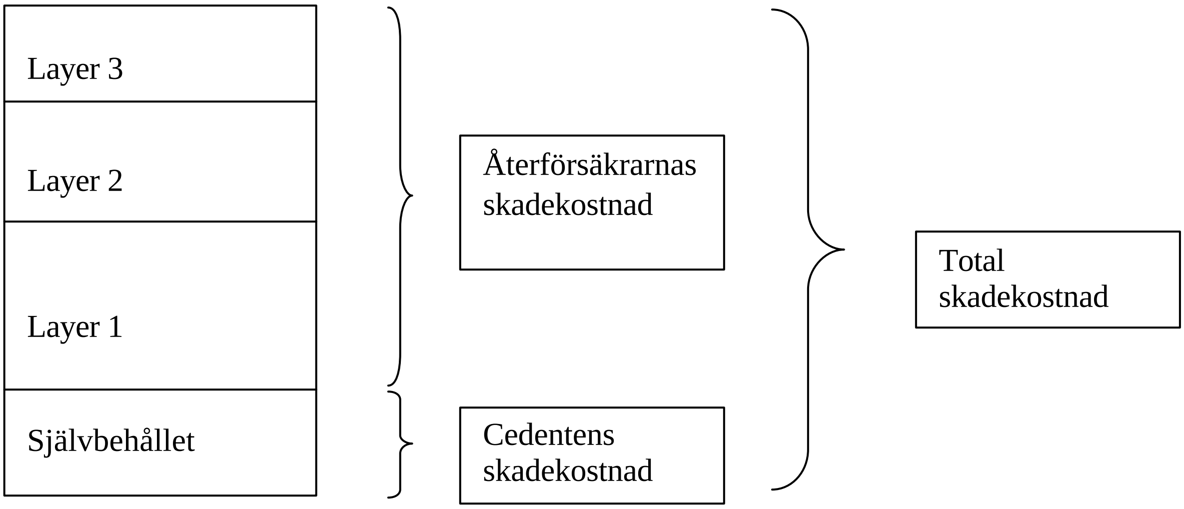
Återförsäkring kan tecknas antingen *proportionellt* eller *icke-proportionellt*. Med proportionell återförsäkring, som antigen kan vara *kvot*- eller *excedent-återförsäkring*, menas att försäkringstagaren och återförsäkraren i avtalet gör upp på förhand om i vilken proportion respektive part skall svara för skadekostnaden.
I icke-proportionell återförsäkring fastställs fördelningen av skadekostnaden mellan parterna allt eftersom skadeutfallen successivt blir kända. Icke-proportionella återförsäkringsavtal kan utformas på många olika sätt, men grundidén är den samma, nämligen att begränsa skadekostnader snarare än riskerna i sig. De vanligaste formerna inom icke-proportionell återförsäkring är *stop loss*- respektive *excess of loss*- återförsäkring. Då excess of loss-återförsäkring är den idag, sett till antalet kontrakt, förmodligen mest använda återförsäkringsformen kommer bara den att tas upp[1].

Excess of loss-återförsäkring

Excess of loss-kontrakt riktar skyddet på de individuella skadorna. Återförsäkrarens betalningsansvar träder först in när en individuell skada eller när det sammanlagda ersättningsbeloppet för skador som orsakats av en och samma skadehändelse överstiger en på förhand avtalad gräns.
Ett excess of loss-program byggs ofta upp på så sätt att det totala skyddet delas upp i antal layers som staplas på varandra. Varje layer kommer upp till en viss nivå som motsvarar en specifik del av skyddet och ersätter därmed endast en del av skadebeloppet. Antalet layers och nivåerna på dessa bestäms så att cedent får ett tillfredsställande skydd för varje tänkbar

[1] För vidare läsning i de olika metoderna inom återförsäkring hänvisar jag till Björn Gustafsson ”Återförsäkring” (5).

skadehändelse. En lågt liggande layer drabbas oftare av skador än en högt liggande layer. För det mesta brukar de olika layers försäkras av olika bolag. Figuren illustrerar excess of loss programmet.



Observera att olika återförsäkrare kan stå för olika layers.

- Cedenten får stå för skadekostnader som är mindre än nivån för layer 1
- Layer 1: nivån för layer 1 < skadekostnad $\leq$ nivån för layer 2
- Layer 2: nivån för layer 2 < skadekostnad $\leq$ nivån för layer 3
- Layer 3: skadekostnad > nivån för layer 3

Slumptal och Simulering

Slump är utfallet av en händelse som inte är förutsägbar, t.ex. myntsingling (krona eller klave). I matematiska termer använder man begreppet korrelationsfrihet för att definiera slumpmässighet. En sekvens bestående av enbart ettor och nollor, så kallad binär sekvens är slumpmässig då alla korrelationskoefficienter är noll. Pseudoslumptal (kommer från grekiskan och betyder oäkta) är ett slumptal vars korrelationskoefficienter inte är noll men tillräckligt nära noll för att uppträda som slumptal.
Slumptal används oftast i samband med att man vill simulera en viss händelse. Med andra ord: slumptal används då man vill rekonstruera verkligheten och uttrycka denna med en matematisk modell. För sådana simuleringar krävs för det mesta tusentals slumptal som kan simuleras på olika sätt.

1. Ett sätt är att man med fysikaliska metoder genera slumptal, t.ex. genom att observera utfallet av en myntsingling eller ett tärningskast och radioaktivt sönderfall.
2. Ett andra sätt är att använda tabellverk med slumptal
3. Ett tredje sätt är att deterministiskt beräkna så kallade pseudoslumptal, antigen för hand eller med hjälp av en dator. Dessa tal är då inte ”äkta” slumptal eftersom de bestäms genom en rekursiv algoritm.

Likformigt fördelade slumptal

Nästan uteslutande används i praktiken kongruensalgoritmer av typen $x_{n+1} = (ax_n + b) \bmod c$ för att deterministiskt generera pseudoslumptal.

Linjära kongruensmetoden

Låt a, b och c vara icke negativa heltal och definiera $x_{n+1} = (ax_n + b) \bmod c$ för ett givet startvärde x_0, så kallad frö. X_{n+1} är då den rest man får när man dividerar $(ax_n + b)$ med c, d.v.s. om k_n är heltalsdelen av $\dfrac{(ax_n + b)}{c}$ så ges x_{n+1} av $x_{n+1} = ax_n + b - ck_n$. Varje x_n är antingen $0, 1, \ldots, c-1$.
För att få likformigt (0,1) fördelade slumptal normeras den uppkomna sekvensen $\{x_n\}$ med c så att en ny sekvens $\{u_n\}$, där $u_n = x_n / c$, fås. De normerade pseudoslumptalen har då liknade egenskaper som ”äkta” oberoende och likformigtfördelade slumptal.
Den rekursiva algoritmen genererar en sekvens av tal som efter en viss längd upprepas. Valet av talen a, b och c bestämmer längden hos en sådan period.
Som vi tidigare har sett, bör korrelationen mellan pseudoslumptalen vara nära noll. Ett sätt att kontrollera detta på är att bilda talpar (x_n, x_{n+1}) som x och y -koordinater i en tvådimensionell ruta.
Om man kan se något mönster eller starka sammanklumpningar och förtunningar så kan man dra slutsatsen att korrelationen är antingen $>> 0$ eller $<< 0$, dvs. väsentligt skild från 0. Ligger däremot alla punkter helt slumpmässigt i rutan vilket är idealiskt så är korrelationen med stor sannolikhet noll eller mycket nära noll.

Slumptal från andra kontinuerliga fördelningar

Har man tillgång till oberoende likformigt fördelade stokastiska variabler så kan man i princip framställa vilken endimensionell fördelning som helst. Den vanligaste metoden för att simulera kontinuerliga slumptal är ”den inversa transformationsmetoden”. Andra erkända metoder som inte kommer att tas upp här är ”the rejection method” och ”the hazard rate method”.
Den inversa transformationsmetoden går ut på att invertera fördelningsfunktionen som man vill ha slumptal ifrån. Det är inte alltid lätt att invertera, speciellt normalfördelningen, därför har det utvecklats speciella metoder för några fördelningar för att kringgå detta. Vi ska kolla närmare på normalfördelningens alternativa slumptalsmetoder.

Den inversa transformationsmetoden

Vi vill kunna simulera X från en kontinuerlig fördelning F med hjälp av likformigt $(0,1)$ slumptal. Följande sats beskriver den inversa transformationsmetoden

Sats: *Låt U vara en stokastisk variabel sådana att $U \sim (0,1)$ och låt vidare F vara en kontinuerlig fördelningsfunktion, då gäller för slumptalet X att*

$$X = F^{-1}(U) \text{ med fördelningsfunktionen } F\,.$$

Bevis: $F_x(a) = P(X \le a) = P(F^{-1}(U) \le a)$.

Eftersom $F(x)$ är en kontinuerlig och strikt växande funktion så följer att

$F^{-1}(U) \le a$ *omm* $U \le F(a)$

Alltså är

$$F_x(a) = P(U \le F(a)) = F(a)$$

ÿ

Normalfördelade slumptal erhålls alltså om man låter F vara normalfördelningens fördelningsfunktion.

Slumptal från normalfördelningen

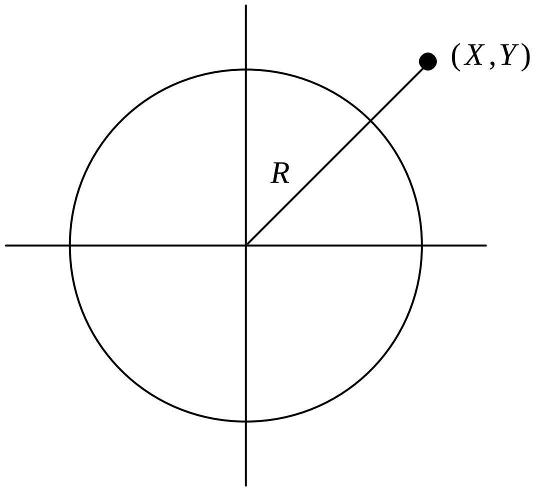
Det finns olika och enklare metoder för att simulera slumptal från normalfördelningen. Några alternativ metoder till just generering av normalfördelade slumptal är: *Box-Mullers metoden*, *Marsaglias metoden* och *Centrala Gränsvärdessatsen-metoden*.

Box-Mullers metoden

Låt X och Y vara standardnormalfördelade slumptal som har den simultana täthetsfunktionen:

$$f(x,y) = \frac{1}{2p} \cdot e^{-(x^2+y^2)/2} \quad \text{där } -\infty < x,y < \infty$$

Vi vill nu hitta ett uttryck som med hjälp av enhetscirkeln och $U(0,1)$ genererar de standardnormalfördelade slumptalen.



Betrakta punkten (X,Y) med vinkeln Θ och radien R i planet. Ur figuren får vi att:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \rightarrow X = R\cos(q)$$
$$\Theta = \tan^{-1}(X/Y) \rightarrow Y = R\sin(q)$$

För att kunna uttrycka X och Y i termer av den stokastiska variabeln U måste vi komma åt den tvådimensionella fördelningsfunktionen för (R,Θ) med $u \geq 0$ och $0 \leq v \leq 2p$.

$$F_{(R,\Theta)}(u,v) = P(R \leq u, \Theta \leq v) = P(\sqrt{X^2+Y^2} \leq u, \tan^{-1}(X/Y) \leq v) =$$
$$= \iint\limits_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} \leq u \\ \tan^{-1}(x/y) \leq v}} \frac{1}{\sqrt{2p}} * e^{-x^2/2} * \frac{1}{\sqrt{2p}} * e^{-y^2/2} dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} \leq u \\ \tan^{-1}(x/y) \leq v}} \frac{1}{\sqrt{2p}} * e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy = \{polärakoordinater\} =$$
$$= \iint\limits_{\substack{0 \leq r \leq u \\ 0 \leq q \leq v}} \frac{1}{\sqrt{2p}} * re^{-r^2/2} dr dq = \int_0^u re^{-r^2/2} dr * \int_0^v \frac{1}{2p} dq =$$
$$= (1 - e^{-u^2/2}) \frac{v}{2p}$$

Fördelningen för R och Θ blir då:

$$F_R(u) = P(R \leq u) = P(R \leq u, \Theta \leq 2p) = 1 - e^{-u^2/2}$$
$$F_\Theta(v) = P(\Theta \leq v) = P(R \leq \infty, \Theta \leq v) = \frac{v}{2p}$$

Man ser att R och Θ är oberoende eftersom den tvådimensionella fördelningsfunktionen är produkten av de endimensionella. Inverterar man fördelningsfunktionen för R och Θ får vi

$$F_R^{-1}(y) = \sqrt{-2\ln(1-y)} \text{ och } F_\Theta^{-1}(x) = 2px$$

Ur detta och två stycken $U(0,1)$ fördelade variabler U_1 och U_2 kan två stycken oberoende $N(0,1)$ fördelade variabler X och Y genereras.

Vi hade att

$$X = R\cos(q) \text{ och } Y = R\sin(q)$$

De normalfördelade slumptalen blir då

$$X = \cos(2p * U_1) * \sqrt{-2\ln(1-U_2)}$$

$$Y = \sin(2p * U_1) * \sqrt{-2\ln(1-U_2)}$$

För att generera slumptal från $N(m, s)$ bildar vi $X = m + s * Z$ där Z~ $N(0,1)$.

Marsaglias metoden

Låt U och V vara oberoende likformigt fördelade slumptal på intervallet (-1,1). Hamnar U och V inom enhetscirkeln får vi två oberoende slumptal X och Y från $N(0,1)$ genom att sätta

$$X = U\sqrt{\frac{-2\ln(U^2+V^2)}{U^2+V^2}}$$

$$Y = V\sqrt{\frac{-2\ln(U^2+V^2)}{U^2+V^2}}$$

U och V hamnar innanför enhetscirkeln så länge villkoret $U^2 + V^2 \le 1$ är uppfyllt. Skulle (U, V) hamna utanför cirkeln, alltså att $U^2 + V^2 > 1$ får man generera nya U och V tills villkoret är uppfyllt.
Vi ska nu visa hur man får fram X och Y . De polära koordinaterna för slumptalsparet (U, V) är $(R\cos(\Theta), R\sin(\Theta))$ där $R^2 = U^2 + V^2$. Man kan visa att R^2 och Θ är Raleighfördelade $R(0,1)$ respektive $R(0, 2p)$ och oberoende[2]. Då R^2 och Θ är fördelade på detta sätt så blir $\sqrt{-2\ln(R^2)} * \cos(\Theta)$ och $\sqrt{-2\ln(R^2)} * \sin(\Theta)$ normalfördelade precis som i Box-Mullers metoden.

Vi skriver om och får att

$$X = \sqrt{-2\ln(R^2)} * \cos(\Theta) = \sqrt{\frac{-2\ln(R^2)}{R^2}} * R\cos(\Theta) = U\sqrt{\frac{-2\ln(U^2+V^2)}{U^2+V^2}}$$

Motsvarande gäller för Y .

---

[2] För vidare läsning om fördelningen för R^2 och Θ , hänvisar jag till ”Simulering och slumptalsgenering” (16)

Centrala gränsvärdessatsen-metoden

Centrala gränsvärdessatsen säger att om vi summerar ett stort antal slumpmässigt fördelade tal så kommer den asymptotiska fördelningen för summan att gå mot en normalfördelning.
Låt $U_1,\ldots,U_n$ vara oberoende och alla likformigt fördelade $(0,1)$. Då är

$$Y = \frac{(U_1 + U_2 + \ldots + U_n) - nm}{\sqrt{n} * s} \sim \ approx\ \ N(0,1) \text{ enligt CGS.}$$

Summor av likformigt fördelade slumptal konvergerar relativt snabbt mot normalfördelningen, god approximation erhålles redan då $n = 12$. Eftersom U_i är $U(0,1)$ blir $E(U_i) = 0{,}5$ och $\operatorname{var}(U_i) = 1/12$.
Med $n = 12$ får vi att $Y = U_1 + \ldots + U_{12} - 6$ är ett slumptal som är *approx* $N(0,1)$ -fördelat.

Projektbeskrivning, Lösningsansats och Genomförande för Reservsättning

Beskrivning av problemet

I och med att kostnaderna för skador inte betalas ut i samma ögonblick som dessa inträffar, behöver ett skadeförsäkringsbolag avsätta (reservera) medel (reserv) för framtida betalningar. Dagens metoder som används för att beräkna reserven för oreglerade skador är inte inflationsjusterade och dessutom fås endast en punktskattning av reserven. Vi ska här göra lämpliga inflationsantaganden med tanke på inflationsmålet och beräkna fördelningen för reserven. Målet är att vi ska kunna avläsa vilken inflationsjusterad avsättning som svarar mot 50-, 75-, 90-, och 99 % percentilerna för att kunna uttrycka punktskattningen med ett procenttal som ska motsvara 50-, 75-, 90-, och 99 % percentilerna.

$$(\text{Reserv})_x = \text{punktskattningen} * (1 + \text{ett procenttal som svarar mot x percentilen}) \qquad (8)$$

Lösningsansats

Reservsättningsproblemet övergår nu i att baka in inflationen i reservsättningsberäkningarna och simulera reserven ett antal gånger får att kunna dra statistiska slutsatser om dennas fördelning och egenskaper.
De statistiska egenskaperna som vi i fortsättningen kallar för beskrivande statistik omfattar:

- medelvärdet
- standardavvikelsen

För att få en uppfattning om fördelningen undersöks:

- signifikans i reservintervallen.
- hur pass normalfördelad reserven är med hjälp av Pearsons chi^2-statistika
- beskrivande plottar på reserven.

Samtliga beräkningar har gjorts i Excel.

Data och antaganden

Reservsättning för oreglerade skador
Dataunderlaget, som återfinns i Bilaga 1, är från Finansinspektionen, i form av långsvansad betalningshistorik för Trafikförsäkring. Datamaterialet är i tusentals kronor och sträcker sig över ett tidsintervall på 18 skadeår, från 1987 till 2004, med 17 utvecklingsår.
Kortsvansat dataunderlag, som t.ex. Transport eller Hem och villa, har inte undersökts då dessa skador i regel slutregleras inom loppet på ett till två år och där avsättning för framtida betalningar inte är lika aktuell.
Jag har uteslutande använt mig av Chain Ladder metoden för uppskattning av erforderlig avsättning.
En variant av Chain Ladder som jag har brukat är att låta datorn slumpmässigt välja en av de individuella utvecklingsfaktorerna istället för att använda medelvärdet, f_k, av dessa.

Inflationen
KPI är dagens mest använda enhet på förändringen i inflationen, på grund av detta har jag endast använt KPI som inflationsmått i mina beräkningar, men som en jämförelse har jag även räknat med löneindex och det sammanvägda snittet mellan KPI och löneindexet. Utvecklingen av de olika indexena genom åren har hämtats från SCB: s hemsida och visas i tabellen nedan.

År	**2004**	**2003**	**2002**	**2001**	**2000**	**1999**	**1998**	**1997**	**1996**	**1995**	**1994**
KPI	279,2	278,1	272,8	267,1	260,8	258,5	257,3	258,0	256,3	254,9	248,8
Löneindex	356,1	349,2	337,7	323,2	311,5	305,6	300,3	292,0	280,8	254,4	245,1
Sammanvägda indexet	330,4	325,5	316,1	304,5	294,6	289,9	286,0	280,7	272,6	254,5	246,3

År	**1993**	**1992**	**1991**	**1990**	**1989**	**1988**	**1987**
KPI	243,6	232,6	227,2	207,6	188,1	176,7	167,0
Löneindex	235,7	227,4	216,9	206,6	187,2	175,8	166,2
Sammanvägda indexet	238,3	229,1	220,4	206,9	187,5	176,1	166,4

I och med att man rensar beloppen från inflation genom division med KPI eller Löneindexet måste en ”ny” inflation läggas till.
I ett första fall har jag antagit konstant ökning av inflationen genom åren, nämligen:

- 2 % för KPI
- 3 % för löneindexet
- 3,3 % för snittet mellan KPI och löneindexet.

Att förändringen av inflationen valdes konstant till 2 % respektive 3 % är baserat på tidigare erfarenhet, men även på att Riksbankens inflationsmål ligger på 2 %. Valet av inflationen 3.3 % för tredje fallet motiveras i resultaten.

Vidare så har jag simulerat hur inflationen kan ha varierat över tiden. De olika inflationsantagandena är:

- likformigt (1,3) (=U(1,3))
- likformigt (0,4) (=U(0,4))
- likformigt (-1,5) (=U(-1,5))
- normalfördelat (2,1) (=N(2,1))
- samtliga inflationsantaganden med en sannolikhet på 0.1 för inflationsstötar på 5 %.
- årets inflation med dragning mot långsiktigt väntevärde: $f_i = f_{i-1} + c*(m - f_{i-1}) + e$, där c, genom minsta kvadratmetoden, har räknats till 0.3, startvärdet f_{i-1} har satts till 0.004 som är senaste årets observerad inflation och där µ har satts till 2 % som är lika med Riksbankens inflationsmål. I fortsättningen kallar vi denna modell för ”alternativ inflation”.

Grunden till inflationsantagandena är målet som Riksbanken har satt på inflationen, nämligen att förändringen i inflationen ska vara 2 % per år med ett toleransintervall på 1 %. Samtliga inflationsantaganden varierar kring väntevärdet 2 % per år. I och med att Sverige har flytande

växelkurs är förekomsten av inflationsstötar inte helt uteslutna, därför har även den möjligheten undersökts.
Inflationen har simulerats genom att låta datorn slumpa fram tal från respektive fördelning.

Genomförande

För att man lättare ska kunna referera till resultaten har jag tilldelat varje steg i detta avsnitt en rubrik som är samma som i resultatavsnittet. Texten ska dock läsas som en sammanhängande sådan.

Trend i faktorerna
Vikten av att undersöka eventuell trend i utvecklingsfaktorerna har betonats i ett tidigare avsnitt. För att inte gå miste om värdefull information har dessa undersökts.

Vidare så har dataunderlaget, alltså skadebeloppen, genom division med KPI inflationsrensats och uttryckts i 1980-års fast penningvärde så att lämpliga inflationsantaganden skall kunnas göras. För varje inflationsantagande har en reserv beräknats med Chain Ladder. Genom att sedan multiplicera samtliga beräkningar med KPI_{2004} / KPI_{1980} uttrycks dessa i dagens pennigvärde.

KPI vs. Löneindexet
Första fallet som har undersökts och som gjordes enbart som en liten jämförelse mellan de alternativa inflationsmått, är med konstant inflationsutveckling. Där har skadebeloppen även inflationsrensats med löneindexet och det sammanvägda indexet.

Stokastiska modeller
I andra fallet så är inflationen ett slumptal från en bestämd fördelning och därmed en stokastisk variabel. Här är vi intresserade av reservens fördelning. För att kunna räkna denna har *2000* simuleringar gjorts, förutom fallet då inflationen är normalfördelad, där har *1000* simuleringar gjorts.
Varje stokastisk inflationsantagande ger således 2000 reserver. Dessa reserver har intervallindelats för att sedan plottas men även för att chi^2-testas, till detta hör beskrivande statistik.
Vidare har samma beräkningar utförts för varje stokastisk inflationsantagande fast med inflationsstötar, förutom fallet med ”alternativ inflation”.
En variant av Chain Ladder som har nämnts är att låta utvecklingsfaktorerna variera stokastiskt med eller utan att ta hänsyn till inflationen. Även här har reserven simulerats 2000 gånger.
För att inkludera de mest extrema fallen har fallet med likformigt(1,3)-inflation, inflationsstötar och stokastiska utvecklingsfaktorer undersökts samtidigt.

Percentiler
Vi får inte glömma att vårt mål är att hitta den procentuella ökningen från medelvärdet som svarar mot 50,- 75,- 90,- och 99 % -iga inflationsjusterade avsättningen. Detta kan enkelt göras, om man vet reservens fördelning, genom att multiplicera medelvärdet med önskad, motsvarande percentil från fördelningen. Alternativt för fallen där fördelningen inte är känd kan man för hand gå in och kolla vart man hamnar när man tagit 75,- 90,- respektive 99 % av reserven. Medelvärdet dividerat med 75,- 90,- respektive 99 % -iga avsättningen ger oss den

procentuella ökningen från medelvärdet. Dessa beräkningar är möjliga då vi har 2000 simuleringar från varje inflationsantagande.

Tabellen som följer visar översiktligt vad som har gjorts.

Inflationsantaganden	**Antal simuleringar**	**Beskrivande statistik**	**Intervallindelning/ Plottar**	**Chi^2-test**
Ingen inflation	-	Endast medelvärde	-	-
Konstant 2 % (infl.rensats med KPI)	-	Endast medelvärde	-	-
Konstant 3 % (infl.rensats med löneindexet)	-	Endast medelvärde	-	-
Konstant 3.3 % (infl.rensats med sammanvägda indexet)	-	Endast medelvärde	-	-
U(1,3) (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
U(0,4) (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
U(-1,5) (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
N(2,1) (KPI-rensats)	1000	Ja	Ja	Ja
U(1,3)+ inflationsstötar (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
U(0,4) + inflationsstötar (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
U(-1,5) + inflationsstötar (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
N(2,1) + inflationsstötar (KPI-rensats)	1000	Ja	Ja	Ja
Stokastiska utvecklingfakt. (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
Stok.utvekl.fakt +U(1,3) +inflationsstötar (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja
Alternativ inflation (KPI-rensats)	2000	Ja	Ja	Ja

Projektbeskrivning, Lösningsansats och Genomförande för Återförsäkring

Beskrivning av problemet

Ett försäkringsbolag kan dela upp sina risker genom att teckna någon sort av återförsäkring. Excess of Loss är en sådan återförsäkring där cedenten bestämmer hur totala skyddet ska delas upp och hur många layers den ska bestå av. Problematiken i Excess of Loss återförsäkring är just att kunna fastlägga hur många layers och nivåerna, självbehållet, på dessa, så att cedenten får ett tillfredställande skydd för varje tänkbar skadehändelse. Det är därför av intresse att kunna beräkna kvarstående skadekostnad i procent av total ursprunglig skadekostnad.
Anledningen till varför man vill fastställa hur stor del som ska återförsäkras och den kvarstående skadekostnaden är att dessa påverkar avsättningen för skadereserven. Ju större återförsäkringen är desto mindre blir skadereserven. Målet är att se återförsäkringens inverkan i ett skadebolag och skadereserv då självbehållet varierar. Vi ska här enbart kolla på återförsäkringen utan att direkt knyta den an till skadereservproblematiken, utan bara fastställa vad som händer då självbehållet varierar.

- Skadekostnad = $\rightarrow$ Återförsäkrarens om skadekostnad > självbehåll
  $\rightarrow$ Cedentens om skadekostnad < självbehåll

Lösningsansats

Genom att simulera skadeutfallen och göra olika antaganden om deras fördelning ska vi kunna se effekten av återförsäkring. Vi vill således veta vad kvarstående skadekostnad blir i procent av total ursprunglig skadekostnad för olika självbehåll. Därför ska följande undersökas:

- total skadekostnad
- medelskada
- standardavvikelsen
- variationskoefficienten (s/μ)

Ett diagram över variationskoefficienterna för varje självbehåll ska kunna kartlägga resultaten och leda oss till våra slutsatser.

Data och antaganden

Vi ska här inte utgå från verkliga data, utan här simulerar vi fram 10 000 olika skadebelopp. Skadebeloppen, Y_i antas vara lognormalfördelade. Då datorn inte klarar av att simulera lognormala slumptal ska vi utgå från normalfördelade slumptal och transformera de till lognormala. Om vi låter X vara N(μ , s)- fördelat så är $Y = \exp(X)$. Fördelningen för X_i ska variera då vi antar fixt medelvärde med inte fix standardavvikelse. De olika fallen vi har är:

- $X \sim N(1,0.5)$
- $X \sim N(1,1)$
- $X \sim N(1,1.5)$
- $X \sim N(1,2)$

För varje fördelning ska vi låta självbehållet variera, m, 2m och 5m, där m=medelvärdet av skadekostnaden Y . Totalt får vi $3*4=12$ olika fall för att testa återförsäkringens inverkan på skadebolaget.

Genomförande

Jag lät datorn slumpa fram 10 000 slumptal från respektive normalfördelning. Efter att ha transformerat dem till lognormala slumptal, se Appendix, har standarsavvikelsen, medelskadan, totala skadekostnad och variationskoefficienten för vart och en av fördelningarna beräknats. Vi har alltså $4*$ 10 000 lognormala slumptal, skadebelopp, med fyra olika standaravvikelser.
Självbehållet är en multipel av medelskadan, m, som är medelvärdet av skadebeloppen. Vi har tre olika antaganden om självbehållet som ska undersökas, nämligen att självbehållet är m, 2m och 5m. De skadebelopp som överstiger självbehållet är de belopp som återförsäkraren får stå för. Allt under självbehållet är cedentens kostnad.
Genom att kolla vilka skadebelopp som inte överstiger självbehållet kan vi ta reda på vad kvarstående skadekostnad i procent blir. Nedan följer en schematisk bild över situationen.

- Skadekostnad =
  - Återförsäkrarens om $Y_i > x*m$
  - Cedentens om $Y_i < x*m$

Det vi är intresserade av är cedentens kvarstående skadekostnad för olika självbehåll.

Resultat och Tolkning för Reservsättning

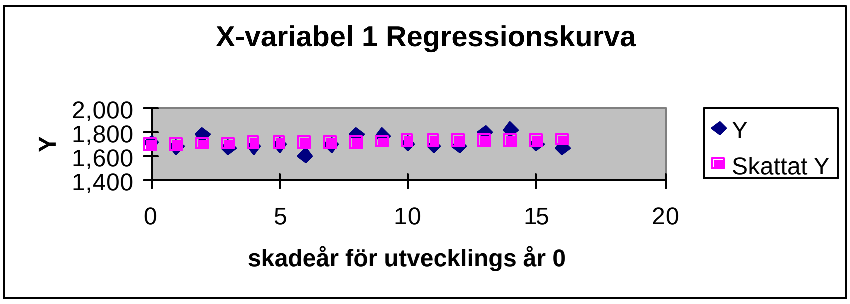
Avsnittet är ”Resultat” är indelat i tre delar som är samma indelning som i avsnittet ”Genomförande”, där det beskrivs vad som har gjorts och varför. I grova drag sägs nedan att ingen trend förekommer i utvecklingsfaktorerna och att KPI anses bättre som inflationsmått än löneindexet.

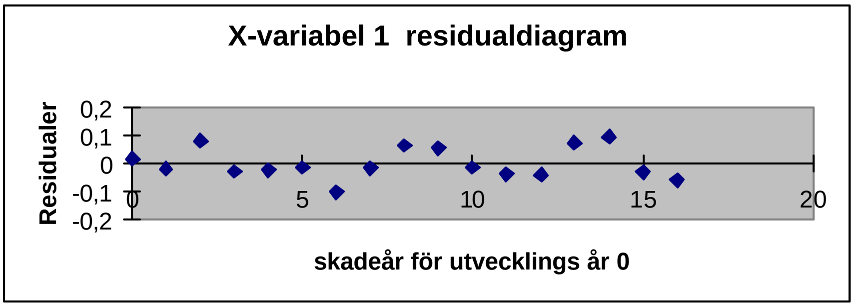
Trend i utvecklingsfaktorerna

Undersökning av eventuell trend i utvecklingsfaktorerna är ekvivalent med att undersöka vilka värden b antar i räta linjens ekvation. Vi erinrar oss om hur räta linjens ekvation ser ut, formel (4) på sida 9, och konstaterar att då b faktorerna är noll så beror inte utvecklingsfaktorerna på skadeåret. Med andra ord innebär detta att utvecklingsfaktorerna är oberoende av skadeåret och därmed trendfria. Resultaten av de olika komponenterna i räta linjens ekvation redovisas i tabellen nedan.

utvecklingsår	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
b	0,0025	0,0030	0,0028	0,0019	0,0021	0,0032	0,0048	0,0017	0,0036	0,0030	0,0025	-0,0010	0,0042
c	1,698	1,107	1,058	1,048	1,035	1,034	1,021	1,036	1,039	1,017	1,030	1,031	1,006
y	1,698	1,107	1,058	1,048	1,035	1,034	1,021	1,036	1,039	1,017	1,030	1,031	1,006

I samtliga fall är b mycket när noll och det ses också av att c-faktorerna är lika med y. Detta garanterar oss att utvecklingsfaktorerna är trendfria och därmed behöver ingen större vikt läggas ned på att hantera dessa. Notera att endast 13 av 17 möjliga utvecklingsår har undersökts för trend i utveckligsfaktorer. Motivet är för få observationer då i >13.
Förutom detta kan man undersöka hur pass bra de observerade värdena (skattat Y) är relativt de teoretiska (Y) för varje utvecklingsår. Jag har nöjt mig med att endast kolla närmare på utvecklingsår noll.





Som ses i första figuren är skillnaden mellan Y och skattat Y försumbar. Residualplotten säger oss att avvikelsen är plus/minus noll. Med detta konkluderar vi att faktorerna är fria från trend och att vi erhållit en god skattning.

KPI vs. Löneindex

En jämförelse mellan KPI och löneindexet, som visas i tabellen nedan, är inte tillräcklig omfattande för att kunna dra slutsatser om vilket index som anses bättre. Hur hade det sett ut om man valde inflationen till 3 % och 4 % för KPI respektive löneindexet? Med facit i handen, se tabellen nedan, vet vi nu att ultimata valet av inflationen för KPI och löneindexet är 3 % respektive 5 %, vilket är det aritmetiska medelvärdet av medelinflationen per år.

	Medelinflationen per år	**Antagen inflation**	**Reserv**
”vanlig”	-	-	282 510
KPI	3 %	2 %	266 681
Löneindex	5 %	3 %	254 430
Sammanvägt index	4 %	3.3 %	267 530

Motiveringen till varför just 3.3 % har valts som inflation för det sammanvägda indexet är till en början att medelvärdet av förändringen i KPI och löneindexet från år 1988 till år 2004 har varit 3 % respektive 5 %. Detta säger oss att löneindexet i snitt ökar med 2 % mer än KPI. Om vi nu antar att KPI ska öka med 2 % per år, i enlighet med inflationsmålet, så ska löneindexet öka med 4 % per år. För personskador gäller att man viktar enligt:

- (2 $*$ (ökningen i löneindex) + (ökningen i KPI)) / 3

Ett viktat medelvärde av KPI och löneindexet ger just 3.3 %.
Sammanfattningsvis kan vi säga att KPI är ett vanligare mått på inflationen än vad löneindexet är och bör därför föredras.

Stokastiska modeller

Det är tre ”stokastiska huvudgrupper” som har undersökts, nämligen: stokastisk inflation, stokastisk inflation + inflationsstötar och stokastiska utvecklingsfaktorer och kombinationer av dessa. Resultaten som följer nedan är indelade efter dessa grupper. I slutet ges en översiktlig tabell över resultaten i samtliga grupper. Hur och varför dessa tester hittas i avsnitten ”Bakgrund och teori” och ”Projektbeskrivning”.

Stokastisk inflation

Inflations-antaganden	Antal simuleringar	Medelvärde	Standard-avvikelse	Chi^2-test/ frihetsgrader	a-signifikansnivå
[3] ”vanlig”	-	282 510	-	-	-
U(1,3)	2000	284 968	4 861	1,29 / 8	>99, 5 %
U(0,4)	2000	284 900	9 590	8,58/ 7	>30 %
U(-1,5)	2000	285 217	14 211	9,36 /7	>20 %
N(2,1)	1000	285 220	8 563	12,17 / 6	>5 %

Om man utgår från resultaten i tabellen ses att samtliga fall är enligt chi^2-testet ej signifikanta för test av normalfördelning, se även Bilaga 2. Vidare ses att det inte är någon större variation i medelvärdet, men däremot, inte helt förvånansvärt, i standardavvikelsen. Som förväntat är standardavvikelsen störst då inflationen varierar som mest, alltså fallet med likformigt (1,5)-fördelad inflation. Notera att endast 1000 simuleringar har gjorts i fallet med normalfördelad (2,1)-inflation.

Alternativ inflation	2000	270 612	22 143	38,08 / 10	<0, 005 %

Det är svårt att yttra sig om hur pass bra modellen är utifrån dessa resultat. Däremot kan vi konstatera att inflationen måste variera kraftigt då standardavvikelsen är stor. Chi^2-statistikans höga värde avslöjar att approximation med normalfördelningen inte är aktuell.

Stokastisk inflation + inflationsstötar

Inflations-antaganden	Antal simuleringar	Medelvärde	Standard-avvikelse	Chi^2-test/ frihetsgrader	a-signifikansnivå
”vanlig”	-	282 510	-	-	-
U(1,3) + inflationsstötar	2000	301 969	14 513	114,313 / 6	<0, 005 %
U(0,4) + inflationsstötar	2000	301 818	16 657	93,17 / 7	<0, 005 %
U(-1,5)+ inflationsstötar	2000	300 388	19 522	29,861 / 7	<0, 005 %
N(2,1) + inflationsstötar	1000	301 237	15 914	28,069 / 5	<0, 005 %

[3] Med ”vanlig” menas Chain Ladder- punktskattningen

De höga värdena på chi^2-testet säger oss att inget av fallen med inflationsstötar kan approximeras med normalfördelningen, se även Bilaga 3. I tabellen ses att medelvärdet har ökat en aning jämfört med fallen utan inflationsstötar, men den stora skillnaden ligger i standardavvikelsen. Även här kan man inte förvånas över att standardavvikelsen har ökat i takt med att inflationens variation har ökat. Ju mindre förutsägbar inflationen är desto större är standardavvikelsen.

Test av log- normalfördelningen
Eftersom det visade sig att fallen med inflationsstötar inte kan approximeras med normalfördelningen är en tänkbar fördelning lognormalfördelningen. Log-normalfördelningen är en bra kandidat av den anledningen att fördelningsfunktionen för denna är skev åt höger och tjocksvansad, vilket är nästan vad vi har observerat, se Bilaga 3. Här har samtliga testvariabler logaritmerats för att kunna testas, se Appendix.
Test av log- normalfördelningen gav följande resultat.

Inflations-antaganden	**Medelvärde**	**Standard-avvikelse**	**Chi2-test/ frihetsgrader**	**a-signifikansnivå**
U(1,3) + inflationsstötar	11,59	0,048	69,09 / 10	<0, 005 %
U(0,4) + inflationsstötar	11,59	0,055	59,49 / 8	<0, 005 %
U(-1,5) + inflationsstötar	11,58	0,065	14,76 / 9	>5 %
N(2,1) + inflationsstötar	11,59	0,053	17,79 / 10	>5 %

Resultaten är kanske inte dem vi hade förväntat oss. Chi^2-testet visar tydligt att endast de två sista modellerna kan eventuellt anpassas med lognormalfördelningen. Att just log-normalfördelningen testades var att den observerade fördelningen var skev, men med lite mer eftertanke så är fördelningen inte särkilt tjocksvansad så som den ska vara för att kunna approximeras med lognormalfördelningen. Således har vi ingen explicit fördelning som kan beskriva reserven då inflationen varierar stokastisk med inflationsstötar.

Stokastiska utvecklingsfaktorer

Beräkningar med Stokastiska utvecklingsfaktorer + U(1,3) har gjorts, men har inte givit något användbart resultat. På grund av detta har modellen Stokastiska utvecklingsfaktorer + U(1,3) inte inkluderats i vidare beräkningar.

Inflations-antaganden	**Antal simuleringar**	**Medelvärde**	**Standard-avvikelse**	**Chi^2-test/ frihetsgrader**	**a-signifikansnivå**
”vanlig”	-	282 510	-	-	
Stokastiska utvecklingsfakt.	2000	282 453	8 952	10,47 / 13	>50 %
Stok.utveckl.fakt +U(1,3) +inflationsstötar	2000	385 539	18 877	154,67 / 6	<0, 005 %

Se även Bilaga 4.

Hur är det med de stokastiska utvecklingsfaktorerna? Idén bakom detta är att låta datorn slumpmässigt välja en av de individuella utvecklingsfaktorerna som en simulering av hur verkligheten kan te sig. Som känt beskriver utvecklingsfaktorerna förändringen i skadebeloppen då man går från år j till $j+1$. Man vet ju inte vad som händer från det ena året till det andra och det är just vad simuleringen går ut på. Det relativt höga värdet på standardavvikelsen visar hur känsligt valet av utvecklingsfaktorer är. Vi har tidigare betonat vikten av att undersöka eventuell trend i utvecklingsfaktorerna, vi har just sett varför. Här har inte valet av modell testats, men en bra modell ska ge en rättvis bild av verkligheten. I detta fall innebär det bl.a. liten standardavvikelse.

Varianter på fallet med U(1,3)-inflation

Tabellen nedan ger oss ingen ny information, utan den har tagits med för att lättare illustrera och jämföra de olika fallen på U(1,3)-inflation.

Modell / inflationsantaganden	**Antal simuleringar**	**Medelvärde**	**Standard-avvikelse**	**Chi^2-test/ frihetsgrader**	**a-signifikansnivå**
”vanlig”	-	282 510	-	-	
U(1,3)	2000	284 968	4 861	1,29 / 8	>99, 5 %
U(1,3)+ inflationsstötar	2000	301 969	14 513	114,313 / 6	<0, 005 %
Stok.utveckl.fakt +U(1,3) +inflationsstötar	2000	385 539	18 877	154,67 / 6	<0, 005 %

Översiktligt resultat

Modell / inflationsantaganden	Antal simuleringar	Medelvärde	Standard-avvikelse	Chi^2-test/ frihetsgrader	a-signifikansnivå
”vanlig”	-	282 510	-	-	-
KPI + 2 % inflation	-	266 681	-	-	-
Löneindex + 3 % inflation	-	254 430	-	-	-
Sammanvägt index + 3.3 % inflation	-	267 530	-	-	-
U(1,3)	2000	284 968	4 861	1,29 / 8	>99, 5 %
U(0,4)	2000	284 900	9 590	8,58 / 7	>30 %
U(-1,5)	2000	285 217	14 211	9,360 / 7	>20 %
N(2,1)	1000	285 220	8 563	12,165 / 6	>5 %
U(1,3)+ inflationsstötar	2000	301 969	14 513	114,313 / 6	<0, 005 %
U(0,4) + inflationsstötar	2000	301 818	16 657	93,17 / 7	<0, 005 %
U(-1,5) + inflationsstötar	2000	300 388	19 522	29,861 / 7	<0, 005 %
N(2,1) + inflationsstötar	1000	301 237	15 914	28,069 / 5	<0, 005 %
U(1,3)+ inflationsstötar (lognormal)	2000	11,59	0,048	69,09 / 10	<0, 005 %
U(0,4) + inflationsstötar (lognormal)	2000	11,59	0,055	59,49 / 8	<0, 005 %
U(-1,5) + inflationsstötar (lognormal)	2000	11,58	0,065	14,76 / 9	>5 %
N(2,1) + inflationsstötar (lognormal)	1000	11,59	0,053	17,79 / 10	>5 %
Stokastiska utvecklingsfakt.	2000	282 453	8 952	10,47 / 13	>50 %
Stok.utveckl.fakt +U(1,3) +inflationsstötar	2000	385 539	18 877	154,67 / 6	<0, 005 %
Alternativ inflation	2000	270 612	22 143	38,08 / 10	<0, 005 %

Percentiler

Nu börjar vi närma oss slutet på reservsättningsavsnittet. Anledningen till de tidigare beräkningarna var att vi ville hitta den inflationsjusterade avsättningen som svarar mot 50-, 75-, 90-, och 99 % percentilerna för att kunna uttrycka punktskattningen med ett procenttal som svarar mot 50-, 75-, 90-, och 99 % -iga inflationsjusterade avsättningen. För detta krävdes att man hittade medelvärdet och standardavvikelsen men även rätt fördelning.

De två första tabellerna som följer här nedan visar de teoretiska respektive de observerade punktskattningarna i varje inflationsjusterad percentil och tabellen efter visar det procentuella påslaget från respektive medelvärde för att nå de olika inflationsjusterade percentilnivåerna. Teoretiska värden fås fram endast för fallen då fördelningen är känd. Kom ihåg att ingen fördelning har hittats för följande modeller: samtliga modeller med inflationsstötar, Stokastiska utvecklingsfaktorer +U(1,3) +inflationsstötar och Alternativ inflation. För dessa modeller har önskad nivå på avsättningen spårats genom att endast studera de observerade värdena. Detta görs enkelt genom att se vilken punktskattning man hamnar på när man tar 75-, 90- respektive 99 % av de 2000 respektive 1000 (för normalfördelningen) simulerade reserverna.

Teoretiska värden

För fallen där fördelningen är känd.

Modell / inflationsantaganden	**Medelvärdet**	**50%-percentilen**	**75%-percentilen**	**90%-percentilen**	**99%-percentilen**
U(1,3)	284 968	284 968	288 249	291 190	296 275
U(0,4)	284 900	284 900	291 373	297 175	307 206
U(-1,5)	285 217	285 217	294 809	303 407	318 272
N(2,1)	285 220	285 220	291 000	296 181	305 138
Stokastiska utvecklingsfakt.	282 453	282 453	288 496	293 912	303 275

Observerade värden

Tabellen illustrerar de empiriska värdena för samtliga inflationsantaganden. För fallen med inflationsstötar, Stokastiska utvecklingsfaktorer +U(1,3) +inflationsstötar och Alternativ inflation är dessa värden de enda värdena vi kan erhålla, av den orsaken att dessa fall saknar fördelning.

Modell / inflationsantaganden	Medelvärdet	50%-percentilen	75%-percentilen	90%-percentilen	99%-percentilen
U(1,3)	284 968	285 450	288 840	291 693	297 135
U(0,4)	284 900	284 798	291 108	297 224	308 409
U(-1,5)	285 217	284 996	294 570	303 680	318 912
N(2,1)	285 220	285 185	290 968	295 890	306 605
U(1,3)+ inflationsstötar	301 969	300 106	310 248	322 513	342 939
U(0,4) + inflationsstötar	301 818	300 175	311 531	323 326	349 189
U(-1,5) + inflationsstötar	300 389	298 994	313 010	326 570	349 346
N(2,1) + inflationsstötar	301 237	299 298	311 307	321 896	347 881
Stokastiska utvecklingsfakt.	282 453	282 241	288 289	294 087	304 220
Stok.utveckl.fakt +U(1,3) +inflationsstötar	385 539	383 513	396 652	411 200	436 597
Alternativ inflation	270 612	269 437	283 971	298 331	328 187

Procentuella ökningen från medelvärdet

I tabellen ses samtliga procentuella ökningar från medelvärdet för respektive percentil.

Modell / inflationsantaganden	Medelvärdet	50%-percentilen	75%-percentilen	90%-percentilen	99%-percentilen
U(1,3)	284 968	0 %	1,15 %	2,18 %	3,97 %
U(0,4)	284 900	0 %	2,27 %	4,31 %	7,83 %
U(-1,5)	285 217	0 %	3,36 %	6,38 %	11,59 %
N(2,1)	285 220	0 %	2,03 %	3,84 %	6,98 %
[4] *U(1,3) + inflationsstötar*	*301 969*	*-0,62%*	*2,74 %*	*6,80 %*	*13,57 %*
U(0,4) + inflationsstötar	*301 818*	*-0,54%*	*3,22 %*	*7,13 %*	*15,70 %*
U(-1,5) + inflationsstötar	*300 388*	*-0,46%*	*4,20 %*	*8,72 %*	*16,30 %*
N(2,1) + inflationsstötar	*301 237*	*-0,64%*	*3,34 %*	*6,86 %*	*15,48 %*
Stokastiska utvecklingsfakt.	282 453	0 %	2,14 %	4,06 %	7,37 %
Stok.utveckl.fakt +U(1,3) +inflationsstötar	*385 539*	*-0,53%*	*2,88 %*	*6,66 %*	*13,24 %*
Alternativ inflation	*270 612*	*-0,43%*	*4,94 %*	*10,24 %*	*21,28 %*

I takt med att den procentuella nivån för avsättningen ökar, alltså att man går från 50 % -ig - till 99 % -ig avsättning, så ökar också procenttalen som ska multipliceras med medelvärdet för att nå de olika nivåerna.

Procentuella ökningen från den ej inflationsjusterade Chain Ladder punktskattningen

Nu har vi äntligen kommit till kritan och kan lösa vår ekvation (8) som ställdes upp i avsnittet ”Projektbeskrivning, lösningsansats och genomförande för reservsättning”.
Som känt är Chain Ladder -metoden uppbyggd på sådan sätt att endast en ej inflationsjusterad punktskattning som svarar mot en 50 % -ig avsättning kan erhållas. Genom alla beräkningar som har gjorts kan vi nu även se hur stor en 75-, 90-, respektive 99 % -ig inflationsjusterad avsättning blir. En 50 % -ig avsättning innebär att avsättningen endast täcker 50 % av alla möjliga skadekostnader.
I tabellen på näsa sida visas den procentuella ökningen från Chain Ladder -punktskattningen. Resultaten kan tolkas på olika sätt. Det kan konstateras att punktskattningen som erhålles men vanlig Chain Ladder tar, på sitt sätt, väl hänsyn till inflationen. Ett påslag på mindre än 1 % räcker för att inflationsjustera punktskattningen med en inflation som har sitt väntevärde runt inflationsmålet 2 %. Detta visar att Chain Ladder skattningen trots allt inte är så tokig, med tanke på att Chain Ladder -metoden använder sig av ökningen i skadebeloppen för att stega sig fram till slutvärdet. Ett ytterligare tecken på att inflationen har varierat kring 2 % är att

[4] De fall som är kursiva är utan fördelning och saknar därmed teoretiska värden. I dessa fall har de observerande värdena använts.

punktskattningen inte skiljer sig avsevärt från skattningarna med 2 % stokastisk medelinflation per år.
Ur tabellen kan, förutom en jämförelse mellan Chain Ladder skattningen och inflationsskattningarna, även ses hur mycket punktskattningen behöver utökas i procent för att den ska nå de olika inflationsjusterade percentilernanivåerna.

Modell / Inflationsantaganden	**Medelvärdet**	**50%-percentilen**	**75%-percentilen**	**90%-percentilen**	**99%-percentilen**
"vanlig"	282 510	-	-	-	-
U(1,3)	-	0,87 %	2,03 %	3,07 %	4,87 %
U(0,4)	-	0,85 %	3,14 %	5,19 %	8,74 %
U(-1,5)	-	0,96 %	4,35 %	7,40 %	12,66 %
N(2,1)	-	0,96 %	3,01 %	4,84 %	8,01 %
U(1,3)+ inflationsstötar	-	*6,89 %*	*9,82 %*	*14,16 %*	*21,39 %*
U(0,4) + inflationsstötar	-	*6,83 %*	*10,27 %*	*14,45 %*	*23,60 %*
U(-1,5) + inflationsstötar	-	*6,33 %*	*10,80 %*	*15,60 %*	*23,66 %*
N(2,1) + inflationsstötar	-	*6,63 %*	*10,19 %*	*13,94 %*	*23,14 %*
Stokastiska utvecklingsfakt.	-	-0,02 %	9,82 %	14,16 %	21,39 %
Stok.utveckl.fakt +U(1,3) +inflationsstötar	-	*36,47 %*	*40,40 %*	*45,55 %*	*54,54 %*
Alternativ inflation	-	*-4,21 %*	*0,52 %*	*5,60 %*	*16,17 %*

Har en punktskattning som inte är inflationsjusterad erhållits så kan denna multipliceras med ett procenttal från kolumnen "50 % -percentilen", beroende på vilken inflation som önskas, för att inflationsjustera avsättningen.
Som illustration antar vi att vi ska inflationsjustera punktskattningen med U(0,4) inflation och hitta den 75 % -iga avsättningen för denna. Vi erinrar oss om hur ekvation (8) på sidan 46 ser ut och får:

- $(\text{Reserv})_{75\%\text{-ig}} = 282\ 510 * \ (1 + 3{,}14\ \%) = 368\ 393$

Det är värt att notera att två av modellerna, Stokastiska utvecklingsfaktorer och Alternativ inflation, krävde en minskning av punktskattningen för att uppnå önskad modell/inflation.

Resultat och Tolkning för Återförsäkring

Vi erinrar oss om våra skadebelopp som skulle vara lognormalfördelade. Genom att transformera de normalfördelade slumptalen har vi erhållit nya slumptal från lognormalfördelningen som har följande egenskaper:

Egenskaper	X~N(1,0.5)	X~N(1,1)	X~N(1,1.5)	X~N(1,2)
Standardavvikelse (s)	1,642	5,875	24,39	147,048
Väntevärdet (m)	1,66	5,70	24,16	134,00
Medelvärdet	3,10	4,46	8,33	20,26
Variationskoefficient	0,54	1,28	2,90	6,61
Summan av skadebeloppen	31 002	44 586	83 308	202 565

Formlerna för hur man transformerar normalfördelad medelvärde och standardavvikelse till lognormal återfinns i Appendixet.

För varje fördelningsantagande har ett självbehåll på m, 2m och 5m beräknats. Det vi vill komma åt är kvarstående skadekostnad efter återförsäkring.

Självbehåll m

Till skillnad från första tabellen, som visar den totala skadekostnaden, så redovisas i tabellen nedan den kvarstående skadekostnaden för cedenten då självbehållet är m.

Egenskaper	X~N(1,0.5)	X~N(1,1)	X~N(1,1.5)	X~N(1,2)
Standardavvikelse (s)	0,68	1,47	3,08	7,38
Väntevärdet (m)	2,49	2,75	3,81	6,42
Total kvarstående skadekostnad	24 879	27 539	38 148	64 163
Kvarstående skadekostnad i %	80,25%	61,77%	45,79%	31,68%
Variationskoefficient	0,27	0,53	0,81	1,15

Hur ska man tolka tabellen? Jo, då standardavvikelsen för skadebeloppen är 0.68 och väntevärdet är 2,49 så är kvarstående skadekostnad som cedenten ska betala 80.25%.
Man ser tydligt att den kvarstående skadekostnaden minskar i takt med att väntevärdet och standardavvikelsen för skadebeloppen ökar. Variationskoefficienten som är ett spridningsmått på hur pass koncentrerad fördelningen är kring sitt väntevärde säger oss samma sak. Ju större variationskoefficienten är desto mindre är skadekostnaden.
Det här är just det som är effekten av återförsäkring, att den tar hand om skador som hamnar långt ut i svansen, alltså skador som avviker för mycket från sitt medelvärde.

Självbehåll 2m

Siffrorna som redovisas i tabellen nedan är för den kvarstående skadekostnaden då självbehållet är 2m.

Egenskaper	X~N(1,0.5)	X~N(1,1)	X~N(1,1.5)	X~N(1,2)
Standardavvikelse (s)	1,39	2,75	5,40	12,54
Väntevärdet (m)	3,01	3,61	5,12	8,77
Total kvarstående skadekostnad	30 143	36 071	51 189	87 725
Kvarstående skadekostnad i %	97,23%	80,90%	61,45%	43,31%
Variationskoefficient	0,46	0,76	1,05	1,43

Att självbehållet nu är 2m innebär att vi har tillåtit större avvikelser från medelvärdet tillfalla cedentens skadekostnad. Men så fort svansen blir alltmer långdragen, d.v.s. när standardavvikelsen ökar, så minskar cedentens skadekostnad, vilket även ses i variationskoefficients värde.

Självbehåll 5m

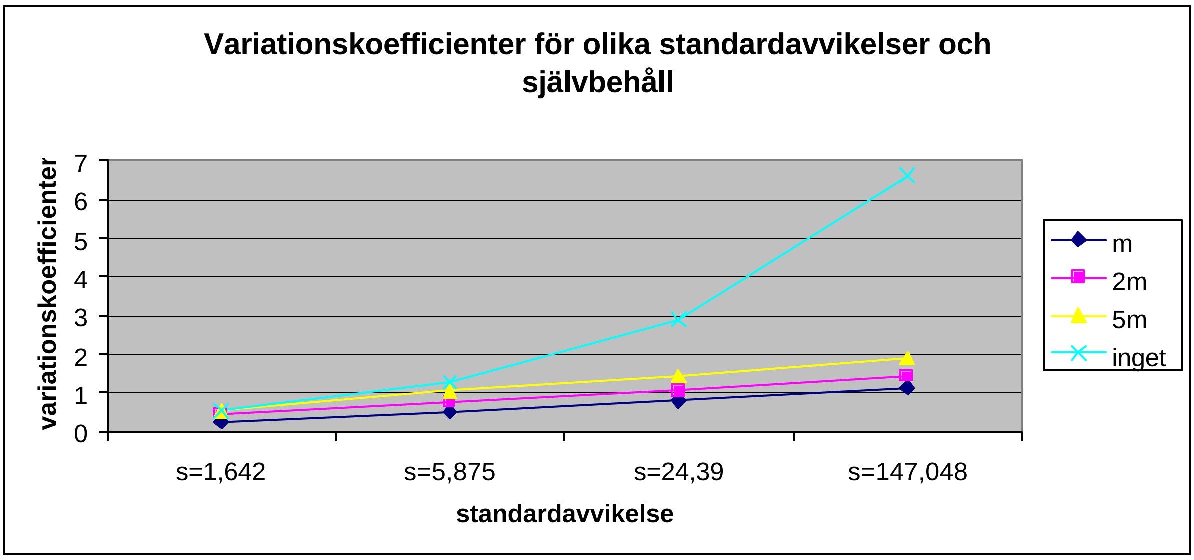
Siffrorna som redovisas i tabellen nedan är för den kvarstående skadekostnaden då självbehållet är 5m.

Egenskaper	X~N(1,0.5)	X~N(1,1)	X~N(1,1.5)	X~N(1,2)
Standardavvikelse (s)	1,66	4,50	9,48	23,02
Väntevärdet (m)	3,10	4,27	6,59	12,11
Total kvarstående skadekostnad	30 998	42 670	65 851	121 086
Kvarstående skadekostnad i %	99,99%	95,70%	79,04%	59,78%
Variationskoefficient	0,54	1,06	1,44	1,90

I och med att självbehållet nu är 5m så har man tillåtit ännu större avvikelser från medelvärdet tillfalla cedentens skadekostnad och det syns tydligt i första kolumnen där kvarstående skadekostnad är nästan 100 %. Eftersom standardavvikelsen och spridningen inte är så stor så kommer i stort sett alla skador hamna i cedentens del av skadekostnaden. Även här ser man att kvarstående skadekostnad minskar i samband med att standardavvikelsen och variationskoefficienten ökar.

Jämförelse mellan med och utan självbehåll

I figuren nedan visas jämförelse mellan de olika självbehållen för de olika standardavvikelserna.



Observera att på x-axeln så anges standardavvikelsen för skadebeloppen men att skalan inte är skalenlig.
Huvudtolkningen av figuren är sådan att man med självbehåll på ett ungefär vet hur stor spridningen bland skadekostnaderna kommer att vara och man har någorlunda koll på skadebeloppens storlek, medan utan självbehåll så kan man hamna i vilka oförutsägbara belopp som helst. Även då man låter standardavvikelsen variera kraftigt för de olika självbehållen så ser man att man att spridningen bland skadebeloppen är begränsad och kontrollerbar.

Diskussion

Det nya solvenssystemet som utformas vill att skadebolagen ska utveckla nya riskanpassade avsättningsmodeller. Innebörden av detta är bl.a. att man måste riskanpassa avsättningsprocessen, men att även se över återförsäkringens roll i avsättningsprocessen. Med anledning av detta studerade vi inflationens betydelse, som innehåller ett riskmoment, i avsättningsprocessen men även återförsäkringens betydelse i avsättningsprocessen.

Syftet med reservsättningsdelen var att vi ville hitta den inflationsjusterade avsättningen i olika percentiler för att kunna lösa följande ekvation:

$(\text{Reserv})_x$ = punktskattningen $*$ (1 $+$ ett procenttal som svarar mot x percentilen)
= inflationsjusterad reserv i x percentilen

Till en början gjordes 14 olika antaganden, alternativt modeller, om hur inflationen kan, och kommer att variera.

- I tre olika fall antogs att inflationen kommer att vara konstant. Självklart är dessa antaganden om konstant inflation inte så troliga. Det har ännu inte visat sig att förändringen i inflationen ska ha varit konstant genom åren.

Mer troligt är det att inflationen kommer att variera stokastiskt genom åren. Då återstår de 11 resterande inflationsantagandena och modeller som lämpliga lösningar till ekvationen överst på sidan.
Vi får inte glömma att syftet med arbetet inte var att hitta en modell som bäst beskriver förändringen i inflationen, utan syftet var att studera skillnaden mellan en inflationsjusterad avsättning och en ej inflationsjusterad avsättning med hjälp av olika inflationsantaganden. Därför är vi inte i situation för att yttra oss om vilken modell som bäst beskriver förändringen i inflationen. Dessutom är det svårt att testa valet av inflationsmodell då historiken om inflationens utveckling, sen Sverige bytte till flytande växelkurs under 90-talet, är för kort. För övrigt så är det nu på senare år som inflationsutvecklingen börjar stabilisera sig och börjar följa ett mönster.

- Om man nu ska välja ett av dessa inflationsantaganden för att inflationsjustera reserven med, är inflationsantagandet U~(1,3) det mest verklighetsbaserade, då det exakt följer Riksbankens inflationsmål. Det har även på senare år visat sig att inflationen i snitt har ökat med 2 % per år. Riksbankens inflationsmål definieras som att den årliga ökningen av KPI ska vara 2 %, med ett toleransintervall på plus/minus 1 % kring detta mål. Att inflationsjustera en avsättning med en inflation från U~(1,3) -fördelningen innebär, i enlighet med tabellen på sida 39, att punktskattningen ska multipliceras med förändringsfaktorn (1 + 0,087). Vill man dessutom hamna längre ut i normalfördelningskurvan än 50 % percentilen, multipliceras punktskattningen med (1 + 2,03 %), (1 + 3,07 %) respektive (1 + 4,87 %) för 75-, 90-, respektive 99 % inflationsjusterade percentilen.

Följden av att Sverige bytte till flytande växelkurs är att i vissa perioder har inflationen varierat kraftigt, så kallade inflationsstötar har förekommit.

- En mer rättvis inflationsmodell hade då varit att välja U~(1,3) + inflationsstötar. Men då vi inte känner till fördelningen för fallen med inflationsstötar och har bara observerat skillnaden så är det svårt att dra generella slutsatser om hur mycket större reserven ska vara. Detta gäller för alla fall, där vi bara har observerade data, att dra försiktiga slutsatser om utökningen av reserven.

Studerar man tabellen på sidan 41, som även är lösningen till ekvationen som ställdes upp överst på föregående sida, ser vi att i vissa extrema fall så krävs en fördubbling av reserven för att inflationsjustera den med 99 % säkerhet. Det är även värt att notera att en sänkning av reserven krävs för vissa modeller för att inflationsjustera Chain Ladder- avsättningen.

Nästa del i arbetet var att studera återförsäkringens roll i avsättningsprocessen. Simulering av 10 000 lognormalfördelade skadebelopp, med olika varianser, belyste skillnaden på skadekostnaden mellan olika självbehåll och utan självbehåll.

- Genom att studera figuren på sidan 44 fås en bra uppfattning av vikten med återförsäkring. Översta kurvan illustrerar skadekostnadernas variationskoefficient då man inte är återförsäkrad. Även då man låter skadebeloppen ha en stor standardavvikelse så är cedentens skadekostnad under kontroll. Nya riskanpassade solvensregler kan möjligtvis innebära ökad hänsyn till utformningen av återförsäkringsskyddet.

Källförteckning

1. Andersson, Christian (2004): *Minsta kvadratmetoden, en enkel introduktion*. www.lth.se

2. Dahl, Patrik (corrected edition, 2003): *Introduction to Reservning.* Kompendium, Institution för Matematisk Statistik, Stockholms Universitet.

3. Ek, Jesper & Ekman Rasmus: *Funktionsprogrammering: Slump.* www.nezzo.se

4. Enger, Jan & Englund, Gunnar (2001): *Något om slumptalsgenerering.* www.math.kth.se/matstat/gru/godis/slumptalgen.pdf

5. Gustafsson, Björn: *Återförsäkring.* Ifu

6. Håstad, Johan: *Generering av pseudoslumptal.* www.ml.kva.se

7. Institute of Actuaries (1997): *Claims Reserving Manual.* Vol 1, section E. The Faculty and Institute of Actuaries.

8. Linder, Ulf & Ronkainen, Vesa (2004): *Solvency II-Towards a new insurance supervisory system in the EU.* Scandianavian Actuarial Journal, No.6/2004.

9. Lindgren, W. Bernard (1998): *Statistical Theory*. Chapman & Hall/CRC

10. Mack, Thomas (1993): *Measuring The Variability of Chain Ladder Reserve Estimates.* Munich Re

11. *Monte Carlo-simulering.* www.mv.helsinki.fi/sundius/fbf/fbf22.pdf

12. Ohlsson, Esbjörn & Johansson, Björn (2004): *Prissättning inom sakförsäkring med Generaliserade linjära modeller.* Kompendium, Institution för Matematisk Statistik, Stockholms Universitet.

13. Pramsten, Håkan (2003): *Driftredovisning inom skadeförsäkring* (kompendium).

14. Ross, M. Shekdon (2003): *Introduction to Probability Models.* Academic Press.

15. *Simulering.* www.matstat.umu.se

16. *Simulering och slumptalsgenerering.* Ur tilläggsmaterialet, Sannolikhetsteori, till G. Blom. Utgivet 2001. Lunds Universitet, Matematikcentrum,www.maths.lth.se/ /matstat/kurser/mars101/slh/tillagskomp/vt01/mas101A_tillagg_vt01.pdf

17. Tamhane, C. Ajit, Dunlop, D. Dorothy (2000): *Statistics and data analysis-from elementery to intermediate.* Prentice Hall

18. www.fi.se

19. www.riksbanken.se

Appendix

Pearsons Chi^2-statistika

Pearsons chi2-statistika mäter avvikelsen mellan den ansatta fördelningen och den empiriska/observerade fördelningen.
Antag att varje observation är indelat i en av k kategorier. Låt f_j beteckna frekvensen i varje kategori och np_{j0} den förväntade frekvensen, givet fördelningen man vill testa. Vi definierar då chi^2-statistikan som:

$$c^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_j - np_{j0})^2}{np_{j0}}$$

Under $H_0 : p = p_0$ är $c^2 \approx chi^2(k-1)$. För varje skattad parameter tas en frihetsgrad bort. Stora värden på c^2-statistikan tyder på en förkastning av H_0.

Log-normal fördelningen

Låt X vara lognormalfördelad med väntevärdet μ och standardavvikelsen s. Då är $Y = \log(X)$ normalfördelad med väntevärdet m och standardavvikelsen s. Tätheten för X är:

$$f(x) = \frac{\exp - ((\log x)^2 / 2s^2)}{xs\sqrt{2p}} \qquad x \geq 0; s > 0$$

För att transformera normalfördelningen till lognormalfördelning så gäller:

$$m = \exp\left(\frac{\left[2m + s^2\right]}{2}\right)$$

$$s = \sqrt{\exp\left[2m + 2s^2\right] - \exp\left[2m + s^2\right]}$$

Ska däremot lognormalfördelningen transformeras till normalfördelning så gäller:

$$m = \log\left(\frac{m^2}{\sqrt{s^2 + m^2}}\right)$$

$$s = \sqrt{\log\left[(s/m)^2 + 1\right]}$$

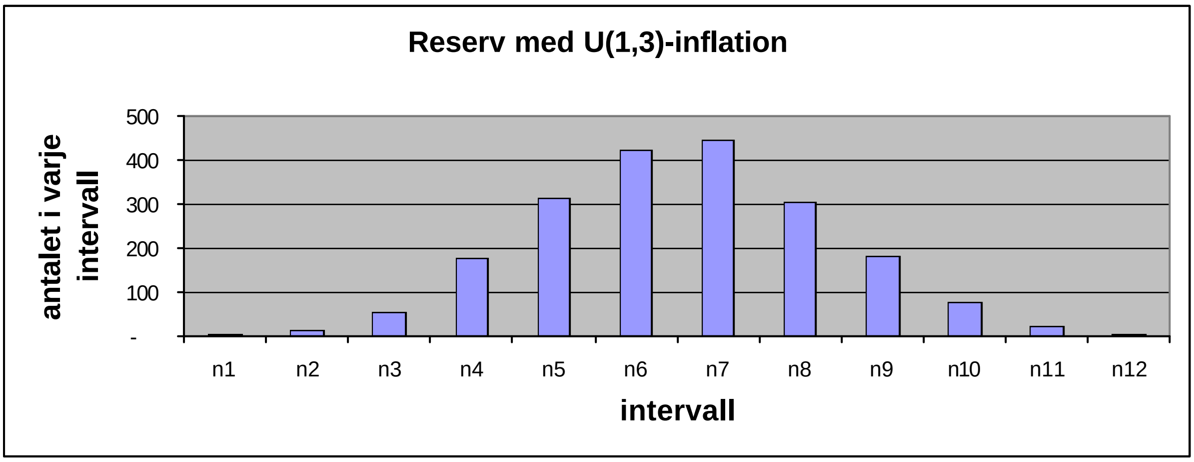
Bilaga 1

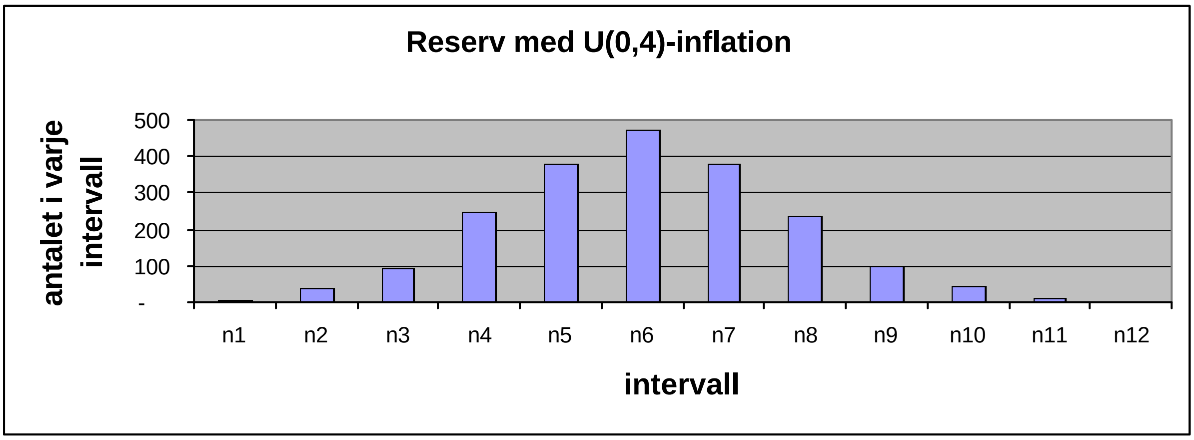
Data

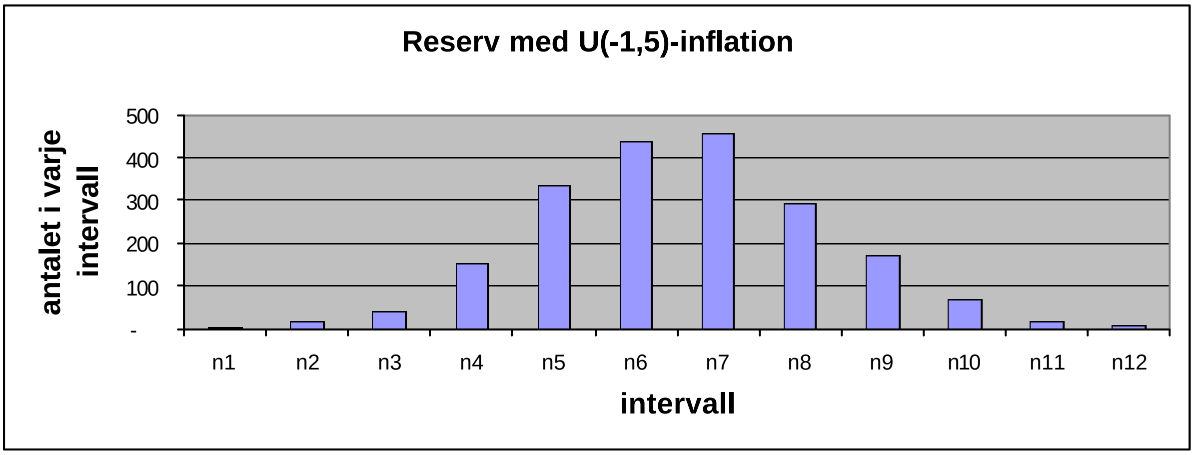
Skadeår	År0	År1	År2	År3	År4	År5	År6	År7	År8	År9	År10	År11	År12	År13	År14	År15	År16	År17
1987	12 860	22 040	24 359	25 786	27 043	28 722	29 798	30 951	32 336	33 987	34 581	34 687	35 322	35 552	36 933	37 546	38 018	42 857
1988	13 286	22 350	24 610	25 881	27 176	28 183	29 667	29 817	30 927	31 525	32 305	33 567	35 037	35 387	36 268	36 764	36 934	
1989	12 428	22 168	24 555	26 306	27 567	28 469	29 523	30 609	31 987	33 970	34 604	35 733	37 079	37 779	38 623	39 765		
1990	13 292	22 288	24 903	26 396	27 858	28 692	29 794	30 528	31 825	32 985	33 766	35 787	36 784	37 200	37 617			
1991	13 174	22 197	24 673	26 259	27 620	28 676	29 434	30 389	31 361	32 829	33 858	36 341	36 940	37 936				
1992	12 300	20 862	23 306	24 588	26 032	26 669	28 143	29 511	30 455	31 783	32 796	34 046	35 055					
1993	12 710	20 457	22 699	24 863	26 341	27 604	28 673	30 833	31 795	35 665	36 468	36 943						
1994	11 935	20 275	23 089	24 959	26 423	27 530	28 751	29 965	31 582	32 892	34 483							
1995	11 959	21 336	24 140	26 628	28 374	29 840	33 008	34 840	36 603	38 654								
1996	11 518	20 471	23 740	25 605	27 127	28 880	30 650	32 367	34 451									
1997	11 621	19 854	23 559	25 650	27 730	29 427	31 227	33 645										
1998	12 416	20 934	23 604	25 555	27 416	28 781	30 655											
1999	12 957	21 874	25 046	27 596	29 737	31 853												
2000	12 964	23 396	26 456	28 838	30 444													
2001	14 959	27 363	31 380	34 043														
2002	16 890	28 789	32 422															
2003	17 167	28 796																
2004	17 658																	

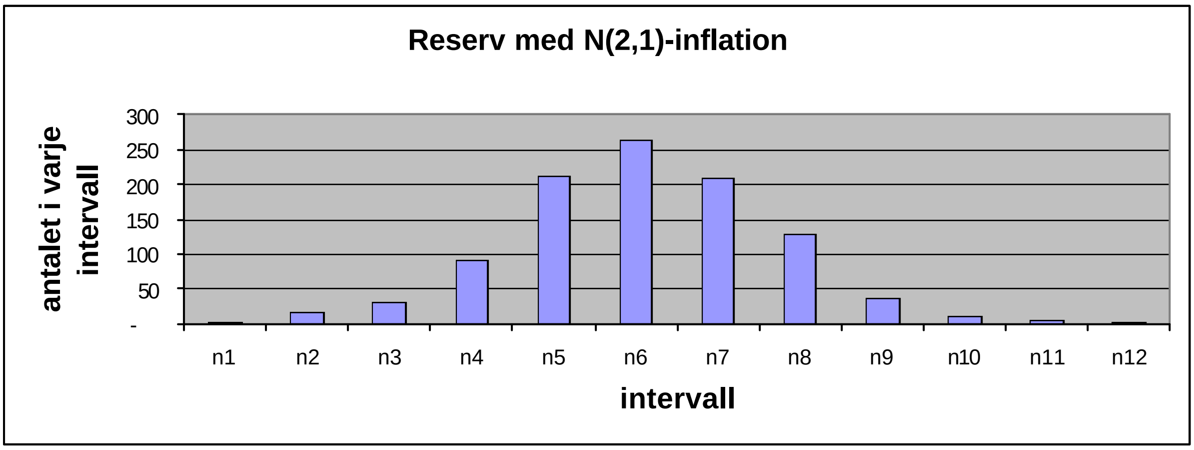
Bilaga 2

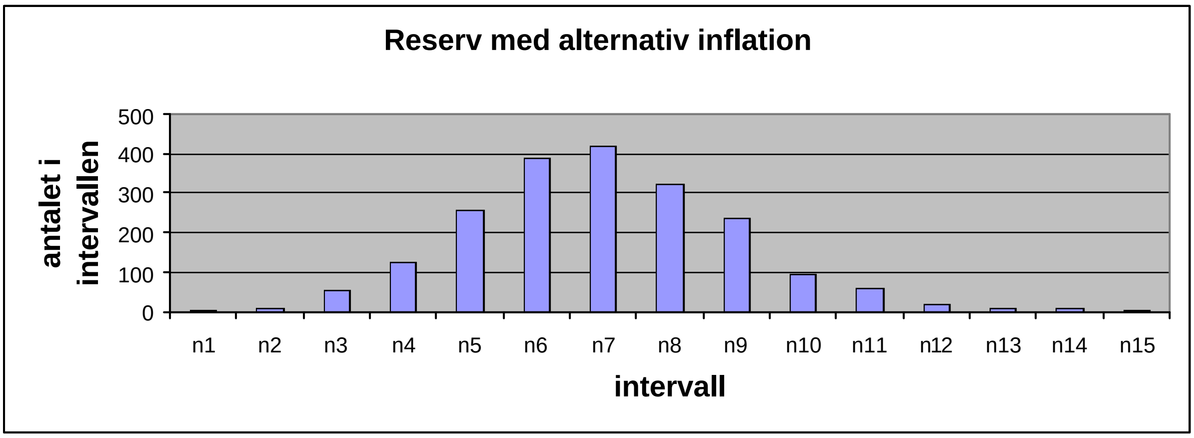
Stokastisk inflation





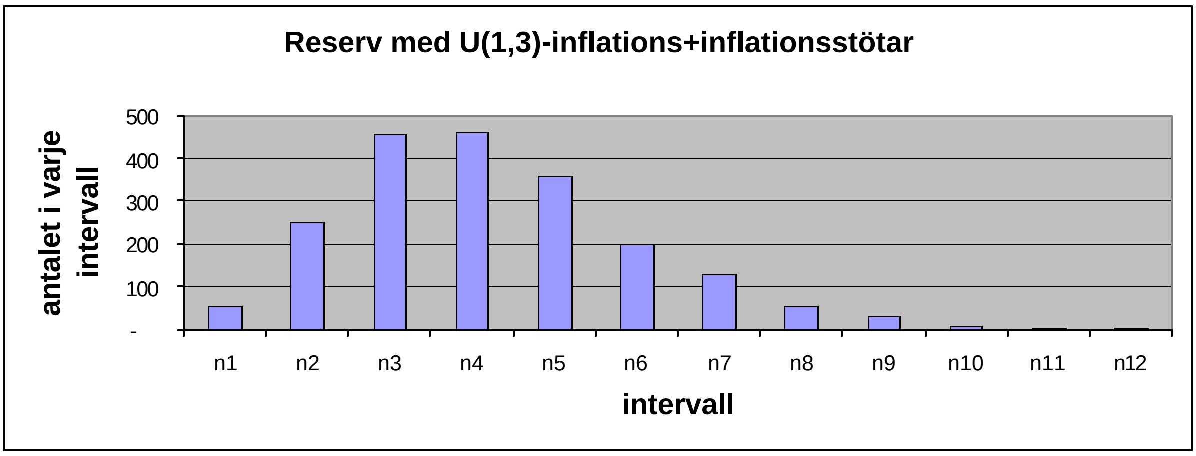


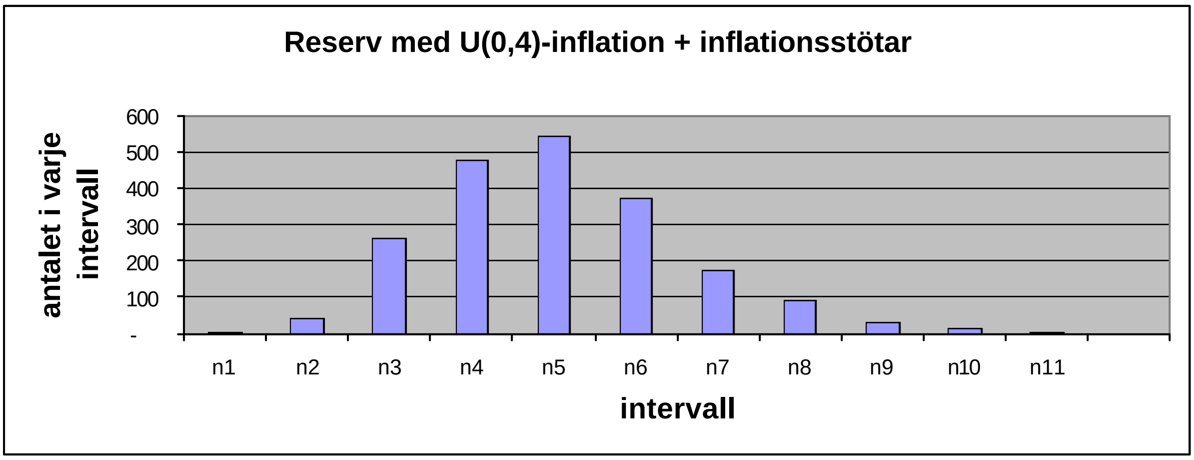

Reserv med N(2,1)-inflation
antalet i varje intervall
300
250
200
150
100
50
-
n1
n2
n3
n4
n5
n6
n7
n8
n9
n10
n11
n12
intervall

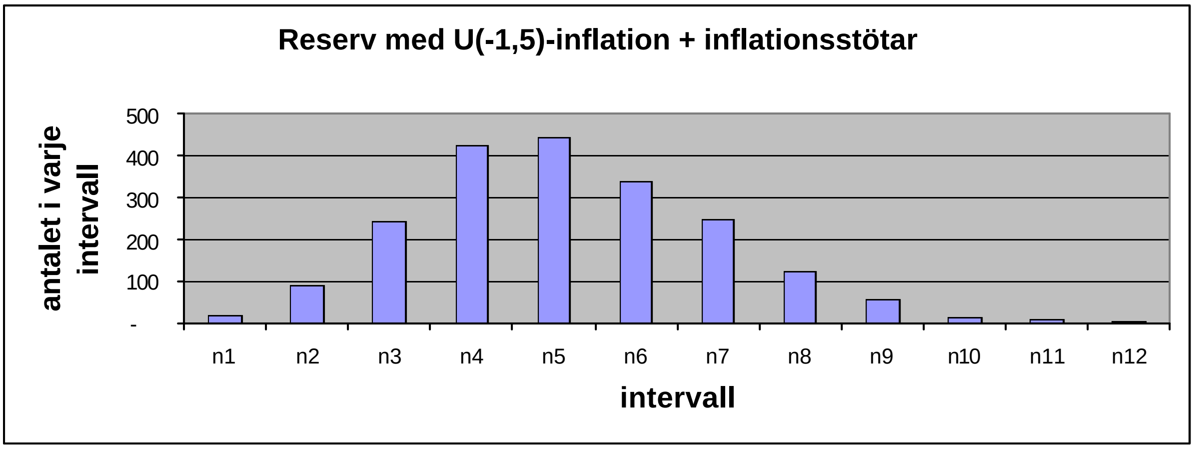

Reserv med alternativ inflation
antalet i intervallen
500
400
300
200
100
0
n1
n2
n3
n4
n5
n6
n7
n8
n9
n10
n11
n12
n13
n14
n15
intervall

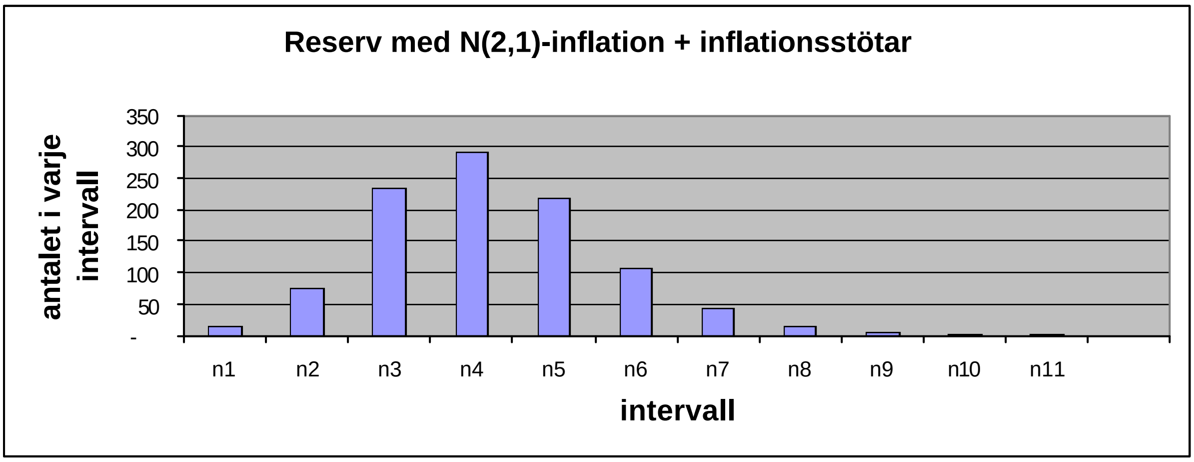
Bilaga 3

Stokastisk inflation + inflationsstötar








Reserv med N(2,1)-inflation + inflationsstötar
antalet i varje intervall
350
300
250
200
150
100
50
-
n1
n2
n3
n4
n5
n6
n7
n8
n9
n10
n11
intervall

Bilaga 4

Stokastiska utvecklingsfaktorer