Finansmarknaden; En översikt av instrument och värderingsmodeller

Jan R. M. Röman
Department of Mathematics and Physics
Mälardalen University, Sweden

Mälardalen University

INLEDNING

På marknaderna ute i världen handlas väldigt många olika instrument bortsett ifrån aktier, och det är främst dessa övriga instrument vi skall studera här. Man skiljer på sådana instrument som är börshandlade och sådana som handlas **OTC** (Over The Counter), d v s över disk hos våra banker och börsmäklare. Vad som är börshandlat och inte skiljer sig från olika börser runt om i världen. Vi skall till en början studera de börshandlade instrument som handlas i Sverige, på OM Stockholmsbörsen och de instrument som är aktierelaterade. Dessa instrument går under samlingsnamnet **derivat**.

Dessa så kallade derivat, delas upp i grupper; **optioner, terminer (forwards), warrants, futures** o.s.v. och har olika karakteristiska egenskaper. Vi skall börja med att presentera dessa egenskaper eller villkor för några av dem. För att få kännedom om allmänna begrepp så kommer vi ibland att ange det motsvarade anglosaxiska uttrycket. I vissa fall saknas svenska namn som för exempelvis warrants (speciella optioner med lång livstid) och futures (terminer, med daglig, eller veckovis avräkning). Alla nya och viktiga begrepp anges med **fet** stil.

På den svenska marknaden finns förutom aktieoptioner även s.k. **indexoptioner**. Indexoptioner, exempelvis optioner på OMX (se nedan) har ingen levererbar underliggande vara. De sägs vara ”cash settled”, vilket innebär att leveransen består av kontanter.

Ett derivat är en finansiellt instrument som har en begränsad livstid, så kallad **löptid**, för vilket värdet på lösendagen bestäms av en fördefinierad funktion av en eller flera mätbara variabler, exempelvis aktiepriset. Under derivatets löptid (d.v.s. tiden före lösendagen) måste värdet beräknas med hjälp av matematiska formler eller via simulering.

På den svenska börsen handlas optioner och terminer på vissa svenska aktier (cirka 30 olika) och på OMX-index. Optioner finns av två slag, **köpoptioner** och **säljoptioner** och av två typer, **amerikans** typ och **europeisk** typ. Har man en amerikansk option (alla svenska aktieoptioner är av amerikansk typ) kan man göra ett tillslag och lösa optionen när som helst under optionens löptid. Har man däremot en europeisk option måste man vänta till slutdagen. Optionerna på det svenska OMX-indexet är av europeisk typ. Förutom amerikanska och europeiska optioner förekommer optioner av **bermudatyp**. Dessa optioner har vissa i förväg bestämda datum då de under löptiden kan lösas in.

En köpoption ger innehavaren rätten (men inte skyldigheten) att av utfärdaren köpa en underliggande vara, exempelvis ett kontrakt bestående av 100 aktier till ett i förväg fastställt pris. För detta har innehavaren (köparen) betalat en avgift till utfärdaren (säljaren). På en börs (så som OM) är det börsens clearinghus som är motpart till både köparen och utfärdaren. Därför innebär det ingen risk för köparen, att han inte skulle få sin vara (sina aktier) om han nu beslutar sig för att utnyttja sin rätt och lösa optionen.

Däremot tar utfärdaren en risk, som han får betalt för att ta, och måste därför avsätta så kallade marginalsäkerheter till börsens clearinghus via sin bank eller mäklare. Dessa marginalsäkerheter räknas sedan om varje natt och kan därför komma att ändras om det sker kursrörelser på den underliggande varan, d v s aktien. Dessa marginalsäkerheter kan bestå av kontanter eller av andra värdepapper (aktier, obligationer o s v). Dock får man aldrig tillgodoräkna sig det fulla värdet av värdepapper då värdet av dessa är mer eller mindre säkra. Marginalsäkerheten är till för att täcka den risk som utfärdaren tagit. Det kan ju vara så att utfärdaren inte äger de aktier han kan komma, att tvingas sälja. Om han då tvingas att sälja dessa till ett pris långt under gällande marknadspris, måste han först köpa dessa aktier dyrt på marknaden för att sedan sälja dem billigt till sin motpart. Båda parter betalar ett så kallat **courtage** till sin mäklare eller bank, där en del av detta går till börsen. På samma sätt ger en säljoption innehavaren rätten (men inte skyldigheten) att sälja en aktie till ett i förväg fastställt pris. Utfärdaren är då tvungen att köpa motsvarande aktier.

Exempel: För en köpt köpoption ges värdet på lösendagen av: $c = max(S - X, 0)$. Där S är aktiens pris på lösendagen och X optionens lösenpris. Vi ser att om $S > X$ gör vi en vinst på optionen, i annat fall är den värdelös. Vi har här inget krav på oss att köpa aktien så vi köper den bara om den blir billigare än att köpa de på marknaden.

Exempel: För en köpt **exotisk option** ges värdet på lösendagen av: $c = max(M_S - X, 0)$. Där M_S är aktiens medelpris under hela dess löptid och X optionens lösenpris på lösendagen. Detta är bara exempel på en exotisk option.

Exotiska optioner är vanligtvis OTC-handlade och kan konstrueras på många olika sätt. Vi kommer att nämna några olika längre fram.

Om man köpt ett finansiellt derivarinstrument säger man att man att man har en **lång** position i instrumentet. På engelska använder man begreppen **long**, **bought** eller **held**. Har man däremot sålt instrumentet säger man att man att man har en **kort** position i detta. De engelska begreppen för detta är **short**, **sold** eller **written**.

Aktieoptionens villkor

Aktieoptioner karakteriseras av en **Identitet** på **underliggande** vara (exempelvis aktien Astra A), en **Mängd** (normalt 100 aktier), en **Löptid** (sex månader för korta och två år för långa, och ett **Lösenpris**. Serier med nya lösenpriser (strike) noteras dagligen efter behov. Om aktiekursen under en dag överstiger eller understiger det näst högsta respektive näst lägsta lösenpriset noteras nya serier. Det finns alltid minst fem serier för varje slutmånad. Två över och två under aktuellt aktiepris och en med ungefär samma pris. Slutdagen (lösendagen) för svenska aktieoptioner är normalt tredje fredagen i respektive slutmånad. Det finns som mest fem olika löptider varav tre korta och två långa. Alla aktieoptioner på den svenska optionsmarknaden är av så kallad amerikans typ. Med **amerikanska optioner** menar vi sådana optioner där man kan göra tillslag när som helst under hela dess löptid. Med andra ord, om vi anser att vi mitt under löptiden gjort en så pass stor vinst och inte vill riskera att förlora denna, kan vi slå till och därmed utnyttja optionen.

Aktieterminens villkor

Aktieterminen karakteriseras på samma sätt av en **Identitet** (ex. Astra A), en **Mängd** (normalt 100 aktier), en **Löptid** (som längst två år) och ett **Terminspris**. En termin kostar inget att införskaffa utan fungerar som ett kontrakt mellan två parter där den ena parten förbinder sig att köpa ett bestämt antal aktier av den andra parten till ett i förväg bestämt pris och tidpunkt. På så sätt tar båda parterna en **risk**. Vad vi menar med risk kommer vi att förklara längre fram.

<u>Exempel</u>: För en köpt termin ges värdet på lösendagen av: $f = S - F$. Där S är aktiens pris på lösendagen och F terminskontraktets pris. Vi ser att vi kan göra en vinst eller en förlust. Denna är därmed förknippad med högre risk än för en köpt köpoption. Med ett terminskontrakt är vi tvungna att avsluta affären på slutdagen.

<u>Exempel</u>: För en köpt **future** ges värde av en så kallad daglig (eller veckovis) fix: $f = F_1 - F_0$. Där F_1 är futurens pris idag och F_0 terminskontraktets pris igår. Vi ser att vi kan göra en vinst eller en förlust på daglig basis fram till lösendagen.

OMX-optionens villkor

OMX-optionen karakteriseras av en **Identitet**, de 30 värdemässigt mest omsatta aktierna på Stockholmsbörsen, en **Mängd** (beroende på indexbeloppet), en **Löptid** (tre månader för korta och två år för långa, och ett **Lösenpris**. OMX-optionernas underliggande vara är ett så kallat index, OMX-index. Därför existerar, som vi tidigare nämnt inget att leverera, utan innehavaren får kontanter eller tvingas betala mellanskillnaden mellan lösenpriset och det verkliga priset på slutdagen. Slutdagen för OMX-optioner är den fjärde fredagen i respektive slutmånad. OMX-optioner är av så kallad europeisk typ. Med **europeiska optioner** menar vi sådana optioner där man <u>**inte**</u> kan göra tillslag under dess löptid. Med andra ord, måste vi vänta till slutdagen innan vi kan utnyttja optionen. De i indexet ingående aktierna viktas på så sätt att aktier med hög omsättning påverkar index mer än de med lägre. I skrivande stund är Ericssonaktien den aktien med den största vikten. Ingående aktier och deras vikt kan ändras en gång om året. Den stora fördelen med indexoptioner är att de kan användas för att skydda (hedga) en komplex portfölj. Man kan naturligtvis även använda dessa för att spekulera på marknadsrörelser i stort.

OM tillhandahåller en **marknadsplats** och en **clearingcentral**. Aktörerna är **kunder**, **mäklare** eller **market-makers**. Market-makers har som uppgift (skyldighet) att ställa priser (köp och sälj) i optioner och terminer för vissa aktier. Köp och säljkurserna får bara ha en viss bestämd prisskillnad s.k. **spread**. För detta får market-makern lägre transaktionskostnader.

Handlingsalternativ för optioner

Då man innehar eller har utfärdat optioner har man ett antal handlingsalternativ att tillgripa vid kursrörelser på den underliggande aktien.

Innehavaren av en amerikansk option kan:

1. Begära lösen, d.v.s. köpa eller sälja aktien till optionens lösenpris.
2. Kvitta (**netta)** positionen, d.v.s. sälja optionen före slutdagen (vilket är det vanligaste).
3. Låta den förfalla om den är värdelös.

Utfärdaren av amerikansk optionen kan:

1. Låta den löpa till lösen eller förfall.
2. Kvitta, d.v.s. återköpa optionen till rådande marknadspris.

Observera! Som utfärdare kan du bli löst när som helst om optionen har ett realvärde. Därför är det viktigt att följa utvecklingen och handla därefter.

Handlingsalternativ för terminer

Den som sålt en termin kan

1. Leverera varan (aktietermin), eller stänga (indextermin) på slutdagen eller
2. Netta, d.v.s. gå ur sin position genom att köpa en termin i samma serie före slutdagen.

Rangordning vid köp och sälj

Eftersom många order ligger i orderboken på börsen, måste dessa rangordnas. De affärer med högst rang sker först och de ordnas efter:

1. Pris, lägsta sälj- respektive högsta köpkurs.
2. Ankomsttid, FIFO (First In First Out).

Varför köpa köpoptioner?

Det finns flera olika anledningar och fördelar med att handla optioner i stället för aktien, eller den underliggande varan:

1. För att uppnå en hög hävstångseffekt, d.v.s. göra en större vinst per investerad krona jämfört med att köpa aktien.
2. Det är mindre risk jämfört med att köpa underliggande vara. Om aktien går ner har du bara förlorat det investerade kapitalet, inte motsvarande aktiens nedgång.
3. För att undvika binda kapital. Du kan ha pengarna på banken tills du önskar köpa aktien.
4. För att försäkra sig om ett framtida aktieköp.
5. Sälja aktier och göra vinst, samtidigt tjäna på fortsatt kursuppgång.

Varför sälja köpoptioner?

1. För att få avkastning i en stillastående eller fallande marknad.
2. För att öka avkastningen i en neutral eller svagt stigande marknad.
3. För att få kompensation för ett befarat kursfall.
4. För att fixera en tillfredsställande säljkurs.

Varför köpa säljoptioner?

1. För att få avkastning i en nedåtgående marknad.
2. För att skydda en kursvinst i den underliggande varan.
3. För att minska risken med ett innehav.

Varför sälja säljoptioner?

1. För att få avkastning i en stillastående eller svagt stigande marknad.
2. För att planera ett framtida aktieköp.

Varför köpa terminer?

1. För att binda mindre kapital än att köpa varan.
2. För att försäkra sig om en köpkurs.

Varför sälja terminer?

1. För att få avkastning i en nedåtgående marknad.
2. Låsa en kursvinst i den underliggande varan.
3. För att minska risken med innehav.

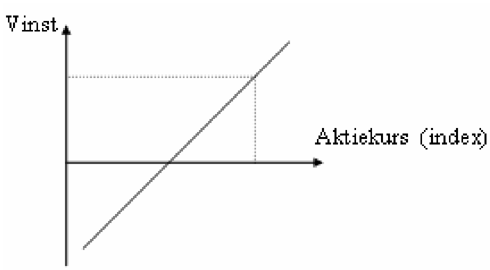
MARKNADSTRO - BESLUT

När man handlar optioner och terminer, fattar man sina beslut och handlingsalternativ beroende av sin marknadstro. Tror man exempelvis att en aktie kommer att stiga mycket på en kort tid, köper man köpoptioner i denna för att på så sätt göra en stor vinst per investerad krona. Vanliga handlingsalternativ är:

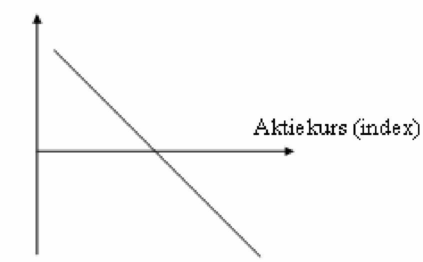
1. Kraftigt uppåt: Köp köpoptioner eller terminer.
2. Svagt uppåt: Utfärda säljoptioner.
3. Stillastående: Utfärda köp- eller säljoptioner.
4. Svagt nedåt: Utfärda köpoptioner.
5. Kraftigt nedåt: Sälj terminer eller köp säljoptioner.

Fundera på dessa påståenden.

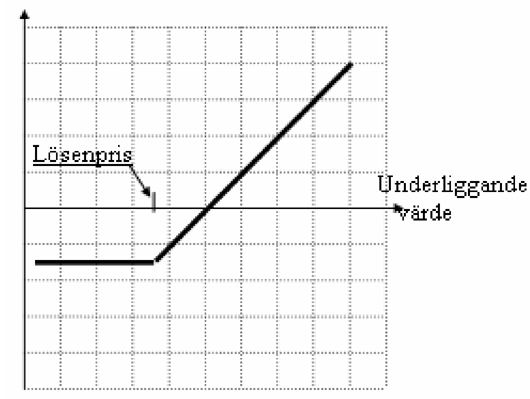
Vill man lära sig att handla med optioner och terminer måste man lära sig de grundpositioner som finns. Dessa åskådliggörs i figurerna nedan. Dessa grundpositioner används sedan för att bygga strategier. Då kombinerar man dessa, eventuellt med ett innehav i den underliggande varan. Detta kommer vi att beskriva i nästa avsnitt.



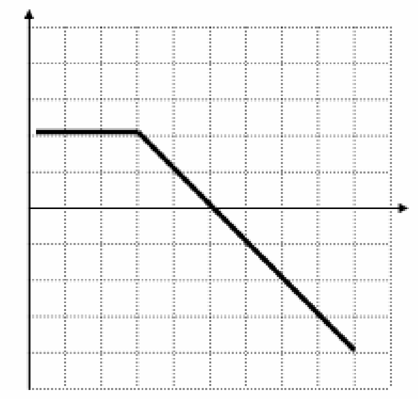
Resultatkurva vid köp av aktie, aktieportfölj, aktietermin och OMX-termin.

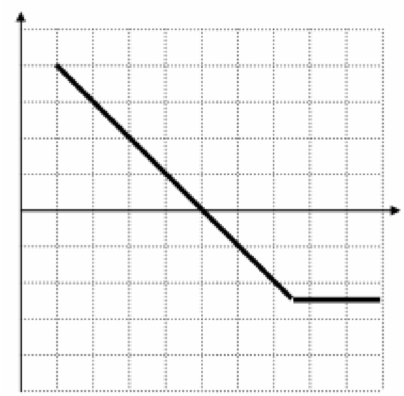


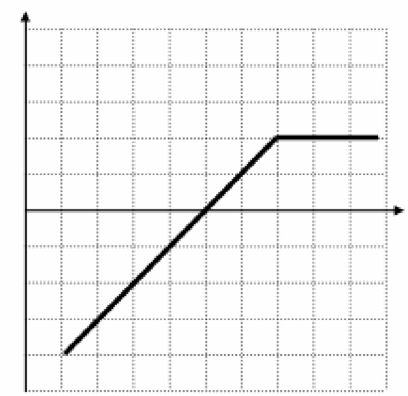
Resultatkurva vid såld aktietermin, OMX-termin Och blankad aktie.



Resultatkurva för köpt köpoption

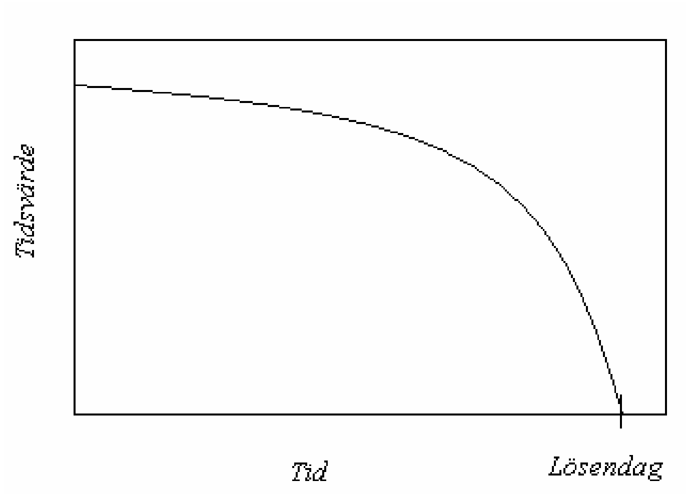

Resultatkurva för utfärdad köpoption


Resultatkurva för köpt säljoption


Resultatkurva för utfärdad säljoption

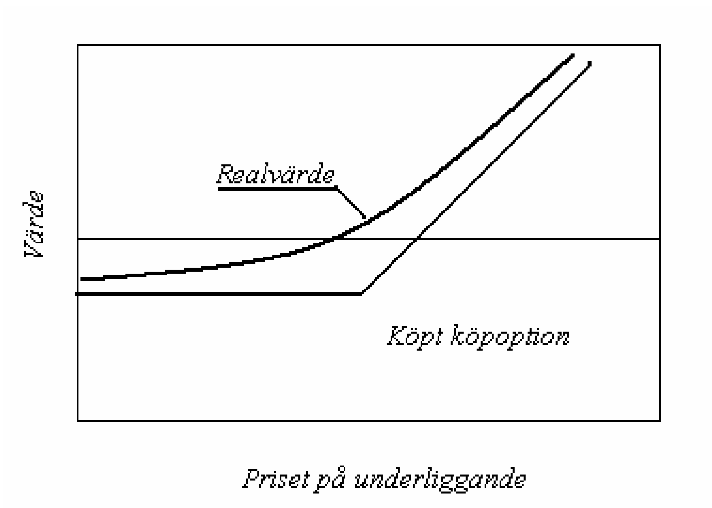
Optioner har ett **realvärde** som är **premien - tidsvärdet**. Tidsvärdet är aldrig negativt men går mot noll när optionen närmar sig lösendagen. Orsaken är att tiden under vilken optionen kan öka sitt värde minskar. I figurerna nedan ser vi först hur tidsvärdet sjunker med tiden och på lösendagen är lika med noll. Därefter ser vi hur det verkliga värdet på en köpoption ser ut vid en tidpunkt inte alltför nära lösendagen. Skillnaden mellan de båda kurvorna är tidsvärdet. Mot slutet minskar denna skillnaden och på slutdagen sammanfaller de helt.

Om lösenpriset är högre än priset på den underliggande varan har optionen ett realvärde. Optioner med realvärde kallas **plusoption** (**in-the-money-option**), saknar den realvärde kallas den **minusoption** (**out-of-the-money-option**). Om lösenpriset och priser på underliggande vara överensstämmer kallas optionen en **parioption** (**at-the-money-option**).



Optionens marknadspris påverkas av ett antal faktorer, nämligen:

1. Den underliggande varans värde.
2. Optionens lösenpris, **striken**.
3. Återstående **löptid** (längre tid ger högre värde).
4. Varans **volatilitet** (rörlighet, standardavvikelse, ju högre desto högre värde).
5. Eventuella utdelningar (**dividends**), kända eller förväntade.
6. Marknadsräntan, ofta kallad den **riskfria räntan**.
7. Annat som förväntningar, skatter, politiskt klimat mm. mm.



PRISMODELLER

För att värdesätta optioner används ett antal prismodeller. Vi skall här gå igenom de vanligaste så att även den matematiskt intresserade får sina behov uppfyllda. De som vill kan utan problem hoppa över detta avsnitt. Modellerna nedan är flitigt använda av analytiker och de som studerar risker på optionsmarknaden.

Följande metoder används vanligen:

Produkt	Metod utan utdelningar	Metod med utdelnings-yield	Metod med diskreta utdelningar
Amerikansk köp baserad på avista	Black & Scholes	Binomial	Binomialmodellen med utdelning
Amerikansk sälj baserad på avista	Binomialmodellen	Binomialmodellen	Binomialmodellen med utdelning
Amerikans option på avista med priset baserat på en termin.	Beräkna en diskonterad spot, anv. Black & Scholes för call och Binomial för put.	Beräkna diskonterad avista, använd q och Binomialmodellen	Beräkna en diskonterad avista med utdelning och anv. Binomial-modell med utdelning
Amerikansk på termin	Binomial med ränta	Binomialmodellen med r-q för sannolikheter och r vid bakåt-diskontering	Binomialmodellen med ränta
Europeisk, baserad på avista	Black & Scholes	Modifierad Black & Scholes med q.	Diskontera avista med utdelning och anv. Black & Scholes
Europeisk, baserad på termin	Black –76	Black-76 (q används ej).	Black –76

1. För att korrekt beräkna amerikanska optioner på futures skall den utdelnings-yield
   $q = r$ användas.
2. Tekniskt sett kan man använda diskret utdelning och yield samtidigt, men det rekommenderas inte.
3. För valutaoptioner skall q användas som riskfria räntan för det andra landets valuta.

Underliggande Pris

Priset som används för underliggande i optionsberäkningar kan anta följande värden:

- Senaste betalda för underliggande.
- Medelvärdet av köp- och säljpris för motsvarande future eller termin.
- Fixingpriset på motsvarande future eller termin.
- Syntetisk Termin. En sådan konstrueras genom en köp och en säljoption för samma underliggande, marknad och slutdag. Båda måste ha ett enda seriepris (strike price). Om ett sådant par inte existerar tas paren närmast at-the-money. Priset på den syntetiska optionen blir då: (köpt köp + såld köp - köpt sälj - såld sälj)/2 + lösenpris

Volatilitet

Volatiliteten (d.v.s. måttet på hur mycket priset på underliggande kan röra sig) är den svåraste delen vid teoretiska beräkningar. Teoretiskt sett är den standardavvikelsen av den log-normala fördelningen som vi antar att det underliggande priset följer. Den kan mätas med historiska data under en tidsperiod eller genom att applicera prisformeln för optioner (se nedan) för att på så sätt beräkna den **implicita volatilitet** (implied volatility). Detta är den viktigaste faktorn för en Risk Manager när han/hon skall beräkna risker. Volatiliteten påverkar inte priset på terminer och futures. Det är heller ingen observerbar storhet utan måste beräknas (eller uppskattas med en gissning).

Man kan använda sig av:

Individuell:	Den implicita volatiliteten för underliggande, för individuella optioner används en för köpkurs och en för säljkurs.
Medelvärde:	Medelvärdesbildning av de tre närmast at-the-mony optionerna av samma typ (köp/sälj), med samma underliggande, pris och livstid. Om ingen av de närmast at-the-money har något pris beräknas volatiliteten på Optionen själv.
Fixt:	Fixa volatiliteter, samma för både köp- och säljoptioner.

Den historiska volatiliteten kan bestämmas genom att observera aktiens prisutveckling. Antag att vi under en tid gör n stycken observationer a_i: $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$. Bilda kvoten av två följande observationer och tag den naturliga logaritmen av denna, d.v.s.: $u_i = ln(a_i/a_{i-1})$. Kvoten a_i/a_{i-1} kallas för den periodiska (dagliga) avkastningen. Då definieras standardavvikelsen av:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n \cdot (n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right)^2}$$

Volatiliteten σ definieras sedan som $s \cdot \sqrt{d}$, där d är antalet börsdagar på ett år (≈ 250).

Volatilitetsmodeller

I vissa sammanhang är man intresserad av att kunna modullera volatiliteten. I Black-Scholes model, som vi ska diskutera nedan antar man att volatiliteten är konstant och lika för alla optioner på samma underliggande, oavsett lösenpris och tid till förfall. Riktigt så enkel är nu inte verkligheten, och då kan det vara värdefullt att känna till några av de vanligaste volatilitetsmodellerna.

De utgår ifrån: autoregressive conditional heteroscedasticity ARCH (m) modellen:

$$\sigma_n^2 = \gamma v + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_{n-j}^2,$$

där

$$\gamma \geq 0, \qquad \alpha_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1.$$

EWMA

En vanlig model för volatiliteten är EWMA, som står för Exponentially Weighted Moving Average. I stället för att använda sig av samma vikt i varje observerad tidpunkt låter man i denna modell vikten av de senaste observationerna vara något högre. Den tilldelade vikten för en viss data punkt låter man bero på värdet av en dämpningsfaktor λ.

Idealt skulle vi i EWMA använda oss av ett obegränsat antal observationer och vikta dessa exponentiellt. Eftersom detta är orealistiskt måste vi fråga oss hur mycket information vi kan avvara. Detta mått kallas toleransnivån. För en toleransnivå på 0.01 behöver vi endast 74 observationer, punkter. Detta innebär att med 74 punkter får vi en noggrannhet av 99 % av den information vi kan få genom den historiska prisutvecklingen.

Formeln för EWMA ges av:

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

För stora *m* kan den sista termen försummas.

GARCH

En annan vanligt förekommande model är GARCH(1,1) som står för Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Dessa ord säger oss hur modeller fungerar.
Heteroscedasticity betyder att variationen ändras med tiden. Conditional Heteroscedasticity betyder att hur variationerna ändras beror på tidigare händelser. Detta är tvärtemot den vanliga historiska volatiliteten där man försöker bestämma en volatilitet som är samma för alla tider. Autoregressive betyder att tidsserien av priser modulleras autoregressivt. Detta innebär att dagens priser beror på gårdagens priser.

Ekvationen för GARCH(1,1) är:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

där σ_t^2 är variansen vid tiden t och α_0, α_1 och β_1 konstanter.

Konstanterna bestäms genom att maximera sannolikhetsfunktionen för de observerade prisförändringarna. Den data som används är dagliga stängningspriserna. Upp till 500 kan användas i analysen.

RISKER

Risker på aktiemarknaden kan delas in i **marknadsrisk** (d.v.s. att hela marknaden går ner) och **företagsrisk**. Alla som handlar med terminer eller utfärdar optioner måste därför avsätta en säkerhet för sin kommande affär. Denna säkerhet, kallad **marginalsäkerhet** ändras från dag till dag beroende av det totala värdet på de optioner och terminer man har och har utfärdat. Dessutom måste man erlägga en **transaktionskostnad** bestående av **courtage** och **clearingavgift**.

	Optionspremie	OMX-termin	Aktietermin
Courtage	2.5%	0.2%	0.3 – 0.4%
Clearingavgift	15 kr/kontrakt		0.1%

Som säkerheter accepteras följande:

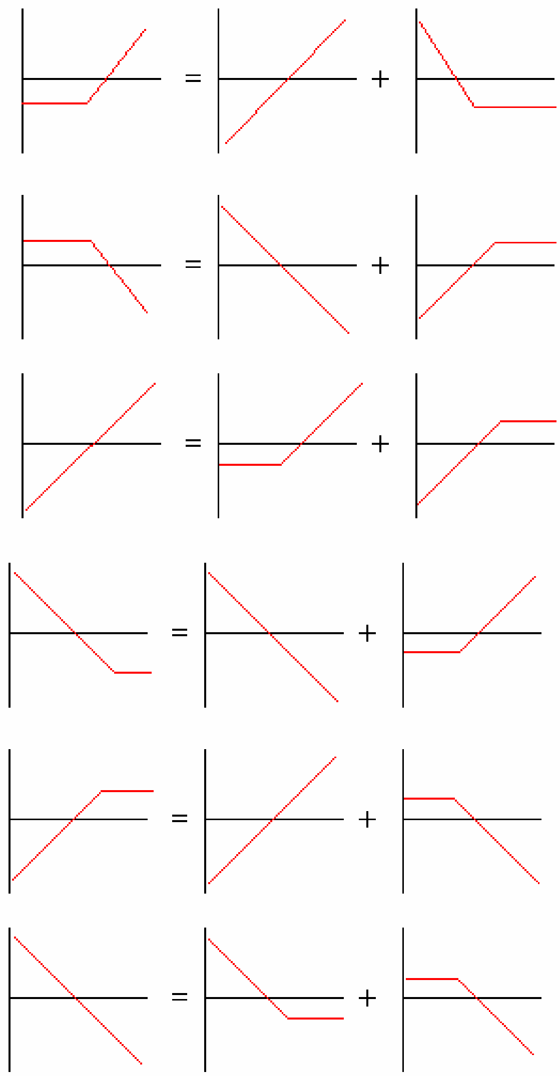
- Medel pantskrivna på kontor av Börsen godkänt säkerhetsinstitut.
- Borgen av bankinstitut accepterat av Börsen.
- Stadsskuldsväxlar och Riksbankscertifikat med upp till 1 års löptid till 80% av nominellt värde eller 90% av marknadsvärdet.
- Stadsobligationer till 90% av marknadsvärdet.
- Certifikatprogram med upp till 1 års löptid eller obligationer utfärdade av vissa banker till 80% av marknadsvärdet.
- Vissa aktier med 70% av marknadsvärdet.

Syntetiska kontrakt / Kombinationer

Genom att kombinera de standardiserade kontrakten ovan kan vi bilda så kallade syntetiska kontrakt. Avkastningskurvorna för dessa ser precis ut som de standardiserade kontrakten. Med hjälp av dessa kan man göra arbitrage, d.v.s. säkra vinster om något av instrumenten är felaktigt prissatt. Priset för ett syntetiskt instrument skall vara det samma som för det standardiserade. Om inte kan man ju köpa det syntetiska och sälja det standardiserade (eller tvärt om). Tänk på att köpa billigt och sälja dyrt. Oftast orsakar transaktionskostnaderna så höga avgifter att det inte lönar sig, d.v.s. går att göra arbitrage. Men, en Market-Maker med låga sådana kan utnyttja denna situationen. När sådana affärer sker återställs ordningen i priserna eftersom handeln påverkar kurserna. De syntetiska kombinationerna är följande:

```
Köpt Köpoption  = Köpt Termin    + Köpt Säljoption
Såld Köpoption  = Såld Termin    + Såld Säljoption
Köpt Termin     = Köpt Köpoption + Såld Säljoption
Köpt Säljoption = Såld Termin    + Köpt Köpoption
Såld Säljoption = Köpt Termin    + Såld Köpoption
Såld Termin     = Såld Köpoption + Köpt Säljoption
```

Vi kan illustrera dessa på med följande grafer:



RÄNTA

Om vi vid tiden $t = 0$ har en obligation (bond) värd $B(0)$ kr är denna vid tiden t värd:

$$B(t) = B(0) \cdot e^{r \cdot (T-t)}$$

Om R_c betecknar den kontinuerliga räntan och R_m samma ränta men med utdelning m gånger per år har vi sambanden:

$$R_c = m \cdot \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)$$
$$R_m = m \cdot \exp\left(\frac{R_c}{m} - 1\right)$$

I litteraturen förekommer en rad olika räntor, men när vi har att göra med optioner använder vi alltid kontinuerlig ränta.

$$dB = B r_{kont} dt$$

$$\int_{B_1}^{B_2} \frac{1}{B} dB = \int_t^T r_{kont} dt$$

$$\ln\left(\frac{B_2}{B_1}\right) = \int_t^T r_{kont} dt$$

$$värde = B_1 \cdot \left(Exp\left[\int_t^T r_{kont} dt \right] - 1 \right)$$

Detta möjliggör att beräkna en ränta på daglig basis under en tid $(T-t)$. Vanligtvis ses räntan under denna tiden som konstant.

$$värde = B_1 \cdot \left(Exp\left[\int_t^T r_{kont} dt \right] - 1 \right) = B_1 \cdot \left(Exp\left[r_{kont} \int_t^T dt \right] - 1 \right) = B_1 \cdot \left(Exp\left[r_{kont} \left(T-t\right) \right] - 1 \right)$$

Periodisk ränta (Enkel ränta)

Antag att räntan betalas ut efter perioden $(T - t)$. Under denna period får vi en ränta motsvarande r_{period}. Viktigt är att vi inte får något under själva perioden.

$$värde = K_1 \cdot r_{period}(T - t)$$

Effektiv ränta

I detta fall betalas räntan ut periodiskt. Längden av denna anges i år, men kan vara godtycklig.

$$värde = K_1\left(\left(1 + r_{Eff}\right)^{T-t} - 1\right)$$

Förhållandet mellan enkel och kontinuerlig ränta

Den enkla räntan, till exempel den som används som riskfria räntan vid riskberäkningar och utdelning i form av yield kan konverteras till kontinuerlig ränta på följande sätt;

$$r_{konst} = \frac{\ln(1 + r_{enkel} \cdot T)}{T}$$

där T är tiden mellan beräkningstillfället och förvall, vanligtvis *(d/360)*.

NAMNSTANDARD

Namnstandard för Optioner

Som namnstandard för optioner används ett kortnamn (exempelvis ERIC för Ericssons), lösenpris samt årtal och månad för förfall. Exempelvis motsvarar ERIC1J45 en oktober-option, köp, på Ericsson med lösen tredje fredagen i oktober 2001. lösenpriset är 45 kr (skulle även kunna vara 450 kr eller 4.50). Bokstaven J talar om att månaden är oktober. I tabellen nedan ser vi vilka tecken som används för att tala om i vilken månad optionen förfaller. Motsvarande kod från Rueters är: LMEb450J1.ST

```
Månad | J F M A M J J A S O N D
------+------------------------
köp   | A B C D E F G H I J K L
sälj  | M N O P Q R S T U V W X
```
(Även terminer)

Namnstandard för Terminer

En motsvarande namnstandard finns också för terminer exempelvis är ERIC2B en termin på Ericsson som förfaller i februari år 2002. Motsvarande RIC-kod från Ruters är: LMEbG2.ST. Reuter har följande regler för månad:

```
Jan  = F,  Feb  = G,  Mar  = H,  Apr  = J,
Maj  = K,  Jun  = M,  Jul  = N,  Aug  = Q,
Sep  = U,  Okt  = V,  Nov  = W,  Dec  = Z.
```

Aktieterminer förfaller 3:e fredagen i månaden och OMX-terminer den 4:e fredagen i månaden.

MARKNADENS AKTÖRER

Marknadens aktörer kan delas in i tre kategorier:

- Traders
- Hedgers
- Arbitragörer

Traders tar positioner på optionsmarknaden för att få avkastning på en viss marknadstro. Han är beredd att ta en risk för att på så sätt erhålla en högre avkastning.

Hedgers tar positioner på optionsmarknaden i syfte att avlägga risk. Dessa är ofta förvaltare av större aktieportföljer vilka de vill skydda mot kursfall och/eller öka avkastningen i en stillastående marknad.

Arbitragörer utnyttjar felprissättningar på marknaden för att på så sätt göra riskfria vinster. Oftast är detta s.k. market makers. Dessa har lägre avgifter och har därmed större möjligheter att göra arbitrage. Vanligtvis är felprissättningarna så små att de ”äts upp” av de avgifter man måste betala för att gå in i positionerna.

ANALYTISKA PRISMODELLER

Vi ska här redogöra för några av de vanligaste analytiska modellerna för att värdera optioner.

Black-Scholes formel

Nobelpriset i ekonomi, gick 1997 till upphovsmännen till följande värderingmodell. Modellen som ses nedan kan användas för att värdera europeiska optioner, men kan även värdera amerikanska köpoptioner. Däremot kan man inte använda modellen på amerikanska säljoptioner. Orsaken är att dessa kan vara fördelaktiga att lösa i förtid, vilket teoretiskt inte gäller för köpoptioner om man planerar att köpa aktien. För amerikanska säljoptioner används vanligtvis olika Binomialmodeller. Den kanske vanligaste av dessa är den s k Cox-Ross-Rubensteins modellen.

Black-Scholes modell (se detaljer i teoridelen) bygger på följande antaganden:

- Marknaden är arbitragefri.
- Prisrörelsen beskriver en Geometrisk Brownsk Rörelse:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

- Den riskfria räntan är konstant och lika för in- och utlåning.
- Volatiliteten är konstant och lika för alla lösenpriser och densamma för köp och sälj.
- Det förekommer inga utdelningar på aktien/aktierna under löptiden.

Värdet av en europeisk köp respektive säljoption ges av:

$$P_k = S \cdot e^{-qT} \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

$$P_s = X \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S \cdot e^{-qT} \cdot N(-d_1)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

P_k	= köpoptionens värde [kr]
P_s	= säljoptionens värde [kr]
S	= underliggande varas pris [kr]
X	= lösenpris (strike) [kr]
r	= effektiv riskfri årsränta (typ årsränta för stadsskuldsväxlar med samma löptid).
q	= utdelning i procent per årsbasis (dividend **yield**) [%],
T	= återstående löptid (i år räknat) [0.5 = halvt år]
σ	= volatiliteten = standardavvikelsen för logaritmen av underliggande varas rörlighet.
$N(x)$	= normalfördelningsfunktionen.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-y^2/2}$$ Derivatan av $N(x)$

Oftast låter man q vara noll, men vi har med den för att vara något mer generella i vår framställning.

Förstå Black-Scholes

För att bättre förstå innebörden i Black-Scholes modell bör man inte skriva den som ovan. I stället bör man skriva den som

$$P_k = e^{-rT} \cdot \left[S \cdot e^{(r-q)T} \cdot N(d_1) - X \cdot N(d_2)\right]$$

Då ser man att $S \cdot e^{(r-q)T}$ är det förväntade framtida priset för underliggande, vilket är detsamma som dess terminspris. Detta är det så villkoret för att det inta skall finnas möjligheter for arbitrage mellan underliggande och dess terminskontrakt.
Termen $S \cdot e^{(r-q)T} \cdot N(d_1)$ är därför det förväntade värdet på underliggande under förutsättning att priset överstiger optionens lösenpris på lösendagen. Termen $X \cdot N(d_2)$ är

den förväntade lösenkostnaden, d.v.s. vad vi behöver betala för underliggande om vi besluta oss för att lösa optionen multiplicerat med sannolikheten för lösen på lösendagen. Tillsist har vi att e^{-rT} är diskonteringsfaktorn som diskonterar optionens förväntade värde till nuvärdet.

En vanlig fråga är: Varför beror inte det teoretiska priset på en termin? Svaret på detta är att den är symmetrisk. Både säljare och köpare skyldighet att genomföra affären. Det spelar ingen roll vad som sker med priset på underliggande. I en optionsaffär har endast den ena parten en skyldighet. Köparen kan ju ”hoppa av” affären (låta optionen förfalla) om optionen är värdelös på slutdagen. Dynamiken i priset ligger i volatiliteten. Därför är den en viktig parameter i optionsvärdering.

<u>Exempel</u>

Underliggande marknad:

Aktiepris:	90 kr
Utdelning yield:	3.00 %
6-månads LIBOR:	6.00 %
Volatilitet:	10 % per år

Optionen:

Typ:	Europeisk köpoption
Löptid:	6 månader (d.v.s. T = 0.5 år)
Lösenpris:	100 kr

Vilket är optionens teoretiska pris (fair price)?

Lösning:

$\sigma \times \sqrt{T} = 0.10 \times \sqrt{0.5} = 0.07071$

$\sigma x \sqrt{T}$ är den **effektiva volatiliteten** vid 6 månader till lösen.

$$e^{-YT} = 2.71828^{\{(0.06 - 0.03) \times 0.5\}} = 1.01512$$

$$e^{-RT} = 1 / 2.71828^{(0.06 \times 0.5)} = 0.97045$$

$$d = \frac{\ln\{90 / 100\} + (0.06 - 0.03 + 0.5 \times 0.10^2) \times 0.5}{0.07071}$$

$$= -1.24254$$

$$d - \sigma \sqrt{T} = -1.24254 - 0.07071$$

$$= -1.31325$$

$N(-1.24254)$ och $N(-1.31325)$ hämtas ur tabeller för standardavvikelsen.:
$N(-1.24254) = 0.10702$
$N(-1.31325) = 0.09455$

Sätt in värdena i BS formel:

Pris = 0.97045 x (90 x 1.01512 x 0.10702 - 100 x 0.97045 x 0.09455)
= 0.313 kr

Hedgeparametrarna

Hedgeparametrarna eller känslighetsparametrarna (ofta kallade grekerna) används för att studera känsligheten i optionspriset. Dessa beskriver förändringen i optionens värde om någon av parametrarna *S, T, r* eller σ ändras medan alla andra värden hålls fixa. Hedgeparametrar definieras av de partiella derivatorna:

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}, \quad \Theta = \frac{\partial P}{\partial T}, \quad \upsilon = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad \text{och} \quad \rho = \frac{\partial P}{\partial r}$$

Tolkning av hedgeparametrarna

För att kunna använda sig av hedgeparametrarna måste man förstå deras innebörd och kunna tolka dem. Först skall vi kort beskriva deras tolkning och beskriva de formler med vilka vi kan beräkna dem. Därefter skall vi se hur de ändras om priset på den underliggande aktien och volatiliteten ändras. Kortfattat kan vi tolka grekerna på följande sätt:

Delta	= premiens värdeförändring givet att aktien stiger med en krona.
Gamma	= förändringen av delta givet att aktien stiger med en krona.
Theta	= premiens värdeförändring givet att en dag går.
Vega	= premiens värdeförändring givet att volatiliteten stiger med en procentenhet.
Rho	= premiens värdeförändring givet att marknadsräntan stiger med en procentenhet.

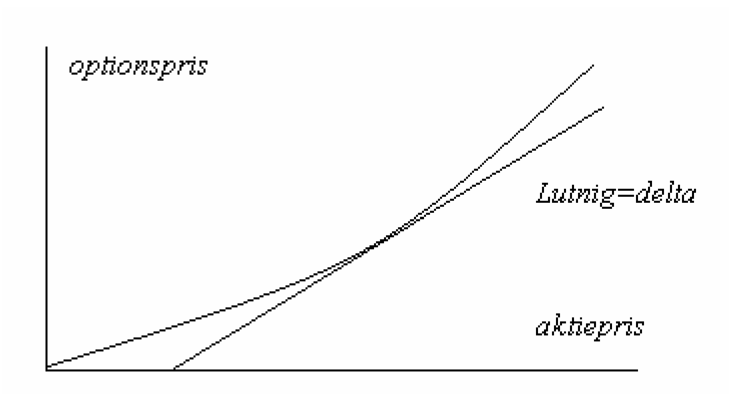
För att hedga (skydda) ett innehav använder man sig av Δ ovan (delta-hedga), för att bestämma det optimalt förhållandet mellan antal aktier och antal optioner.

För Black-Scholes modell kan man visa (se appendix) att *Δ* ges av:

$\Delta = e^{-q(T-t)} N(d_1)$ för en europeisk köpoption och

$\Delta = e^{-q(T-t)} \left[N(d_1) - 1 \right]$ för en europeisk säljoption,

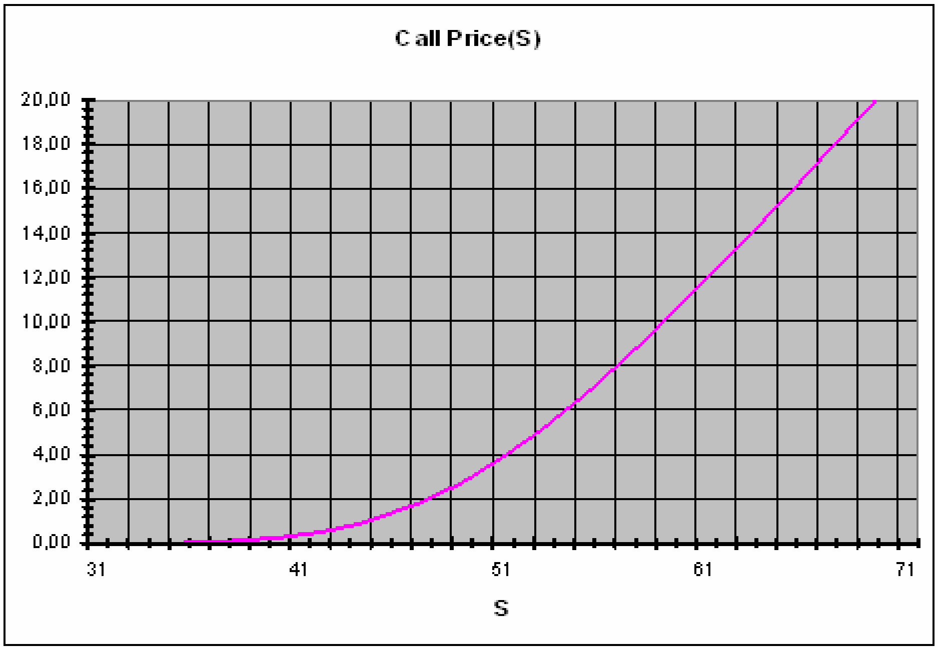
där q vanligtvis är noll. Vi ser då att *Δ* för köpoptioner ligger i intervallet [0, 1] och för säljoptioner i intervallet [-1, 0]. Om *Δ = 0* har vi klara minusoptioner där optionens värde inte ändras vid små prisrörelse hos avistan. Om *Δ = ±1* har vi klara plusoptioner, och om *Δ = ±1/2* parioptioner. Observera att likhet bara gäller då *T = 0* där *T* är den tid tills optionen förfaller och *t* den momentana tiden.



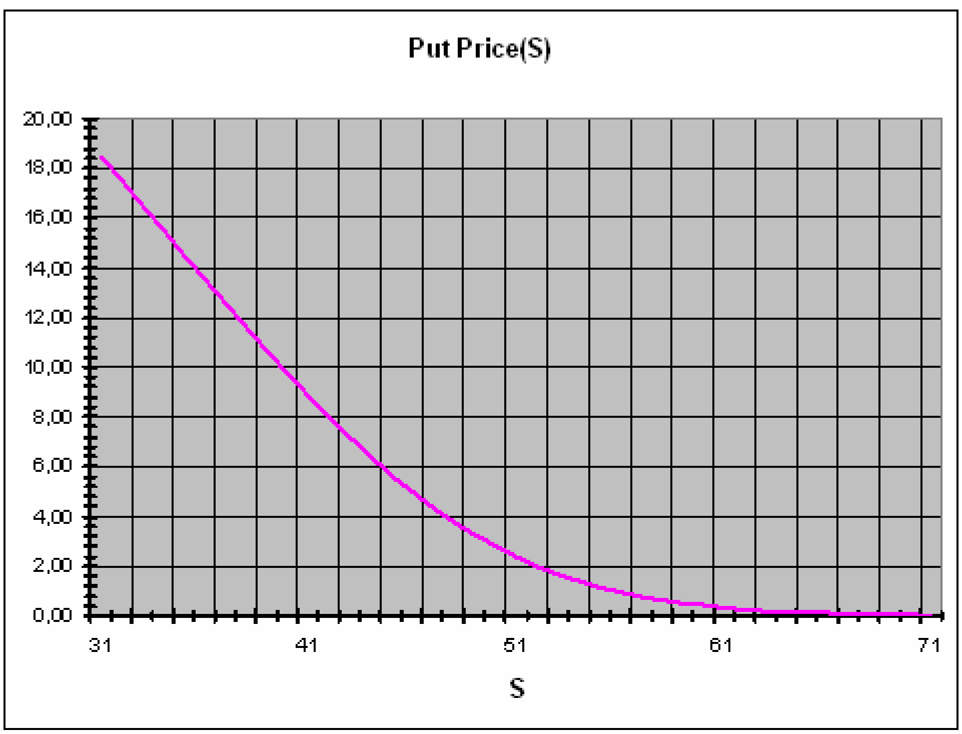
Vill man göra en position delta-neutral skall man inneha (med tecken, - => utfärda) *1/Δ* optioner för varje aktie. Då är totala portföljen okänslig för små kursrörelser. Antag att *Δ* för en innehavd säljoption är -0,5, (d.v.s. en parioption) och att aktiekursen är 100. Detta betyder att om aktien går med 1 kr, så går optionens värde upp med 50% av 1 kr, d.v.s. med 50 öre. Har vi då två optioner för varje aktie (*1/Δ = 2*) så ändras inte det totala värdet av aktien och optionerna. Vi är delta-neutrala och har således hedgat vår aktie mot en nedgång.

Prisgrafer

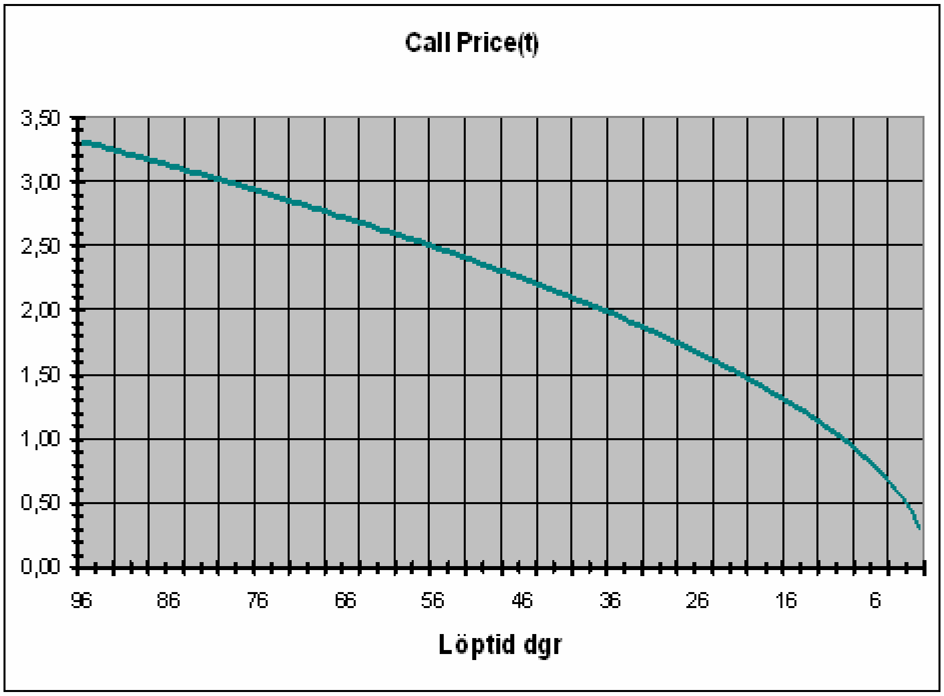
I figurerna nedan ser vi hur priset och delta för en köp och en säljoption med lösenpris 50 kr (en parioption) varierar med tiden och priset på underliggande. Löptiden är 96 dagar, räntan 4 % och volatiliteten 30%. Aktiens pris är från början 50 kr.



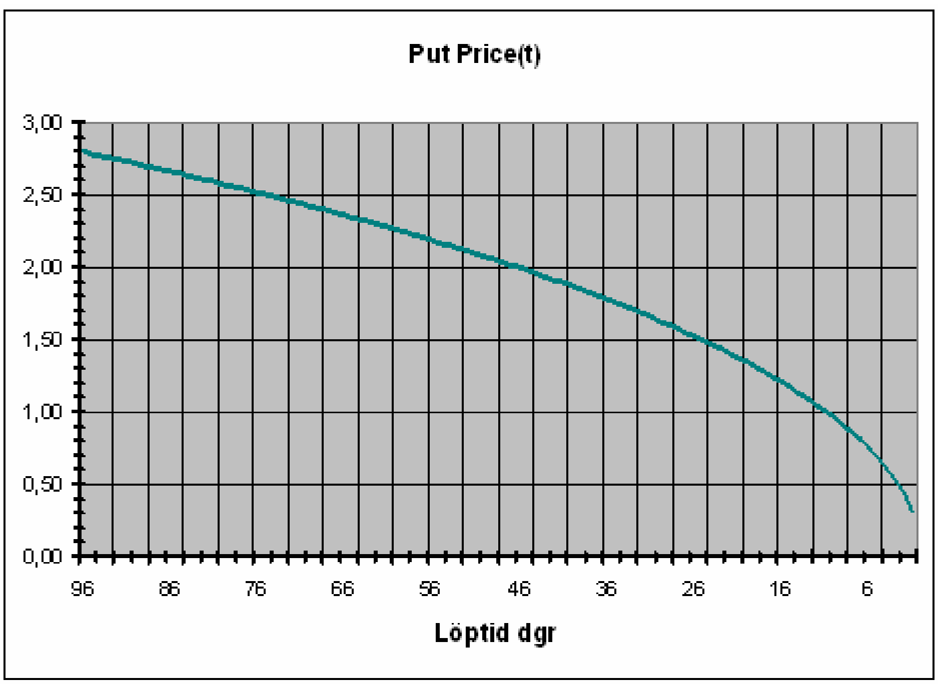
Optionspriset för en köpoption som funktion av aktiepriset.



Optionspriset för en säljoption som funktion av aktiepriset.



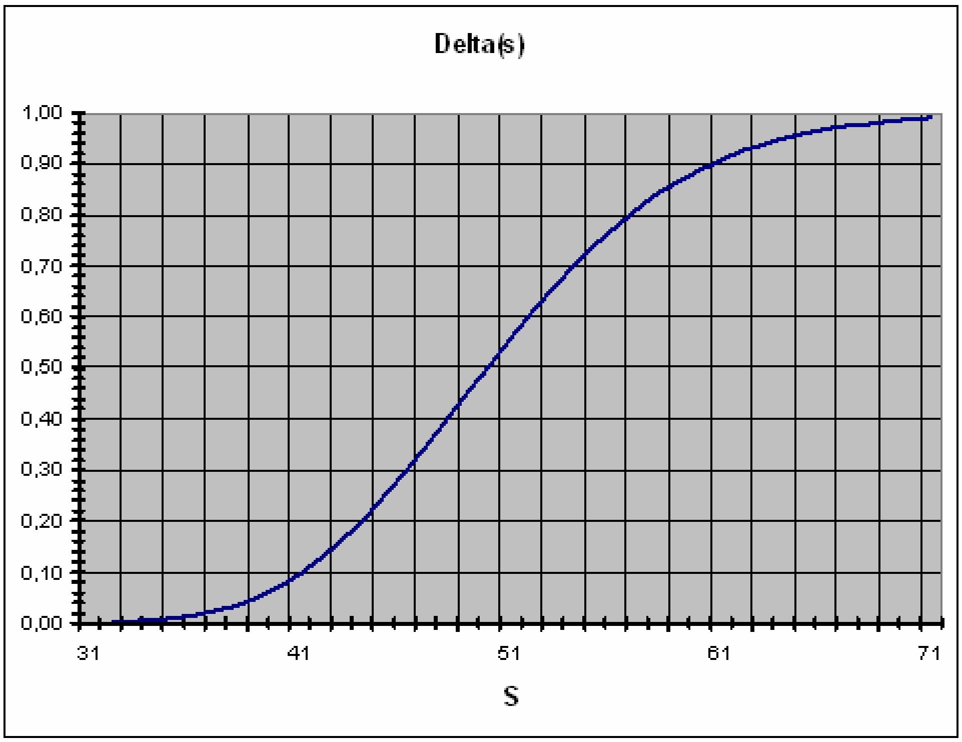
Optionspriset för en köpoption som funktion av antalet dagar till lösen.



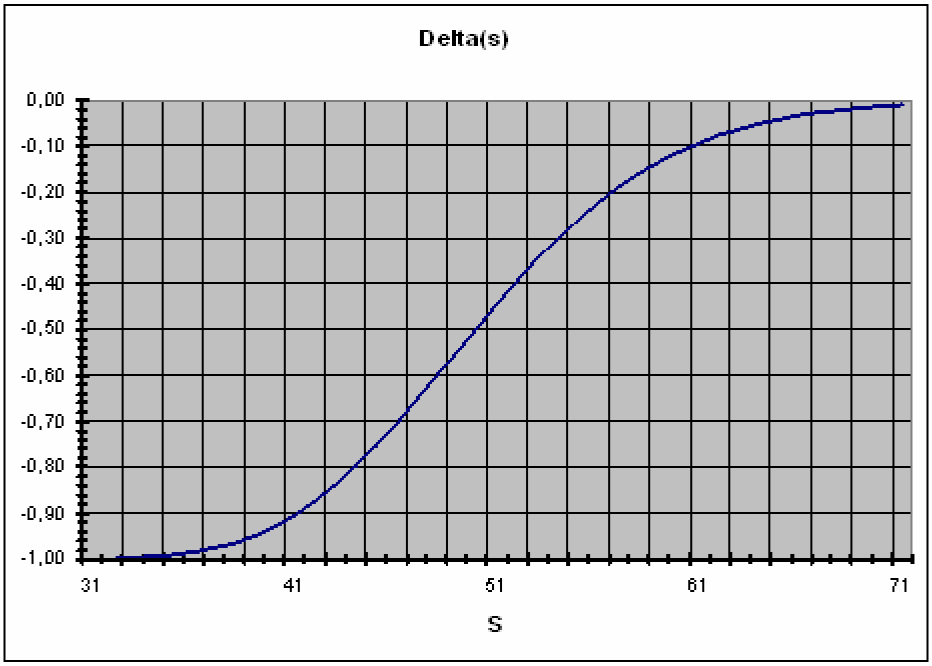
Optionspriset för en säljoption som funktion av antal dagar till lösen.

Delta

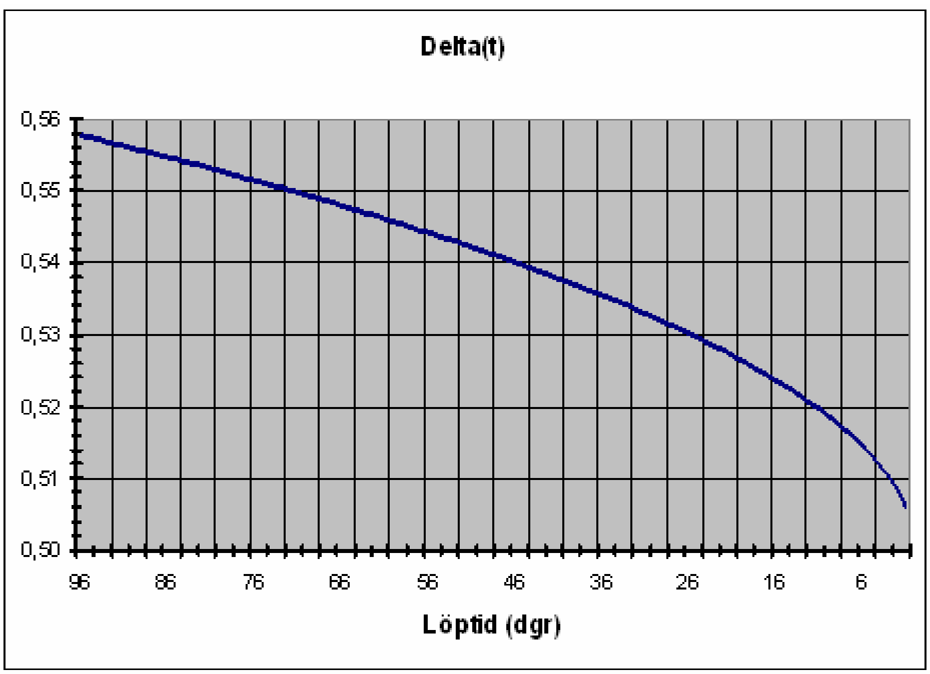
Nedan ser vi utseendet av delta för köp och säljoptioner som funktion av pris och löptid.



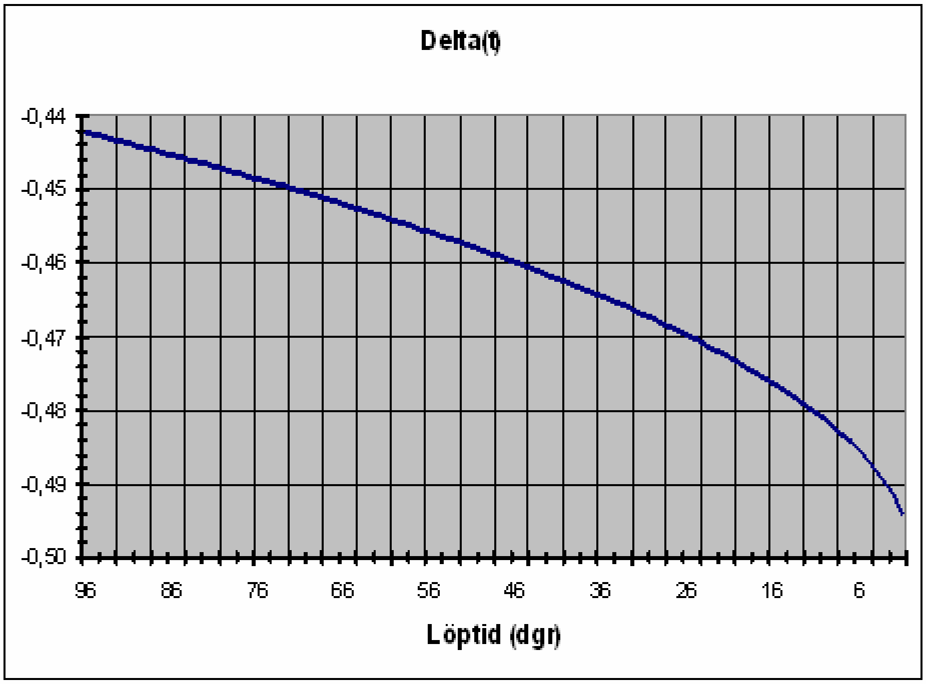
Delta som funktion av aktiepriset för en köpoption.



Delta som funktion av aktiepriset för en säljoption.

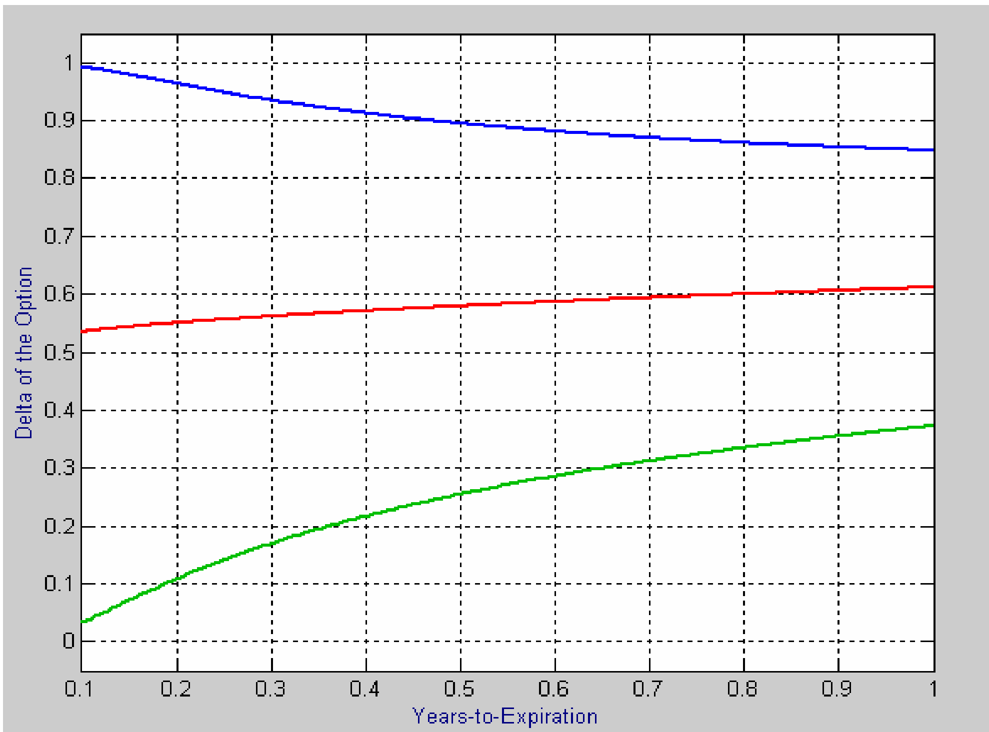


Delta för en köpoption som funktion av antal dagar till lösen.



Delta för en säljoption som funktion av antal dagar till lösen.

Typiska utseenden för delta för en köpoption visas i figuren nedan.



Vi ser här Δ för tre olika köpoptioner med lösenpriser 80, 100 (pari) resp 120 kr.

<u>Delta</u>

För europeiska optioner ges värdet av Δ från Black-Scholes av:

$\Delta = N(d_1)$ för en europeisk köpoption och

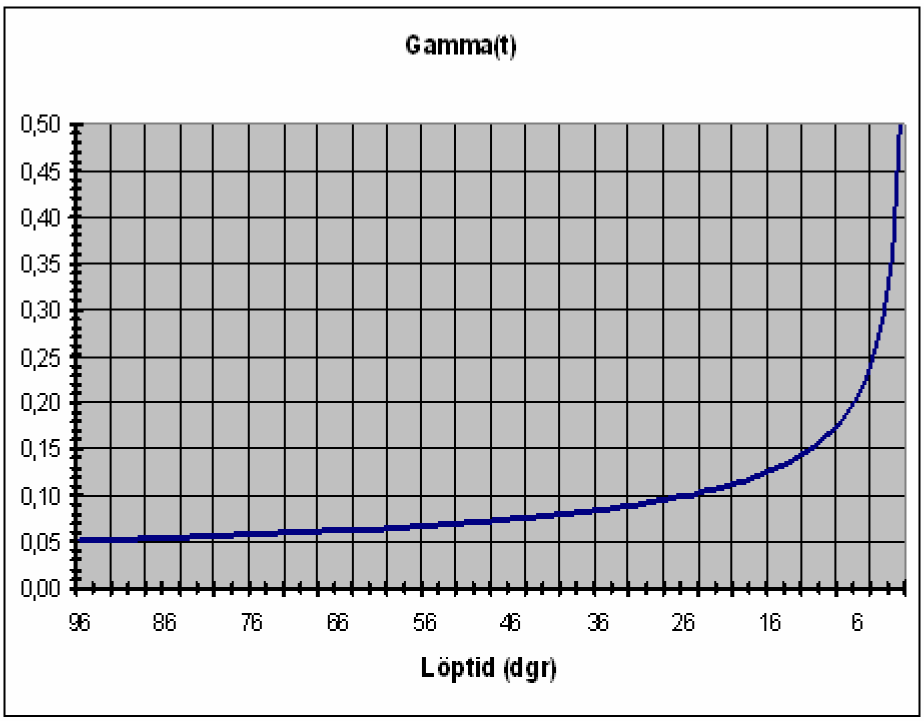
$\Delta = N(d_1) - 1$ för en europeisk säljoption.

Gamma

För europeiska optioner ges värdet av Γ från Black-Scholes av:

$$\Gamma = \frac{e^{-d_1^2} \cdot e^{-q(T-t)}}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (T-t)}}$$

I figuren nedan ser vi hur värdet på Gamma ändras då parioptionen ovan närmar sig lösendagen.



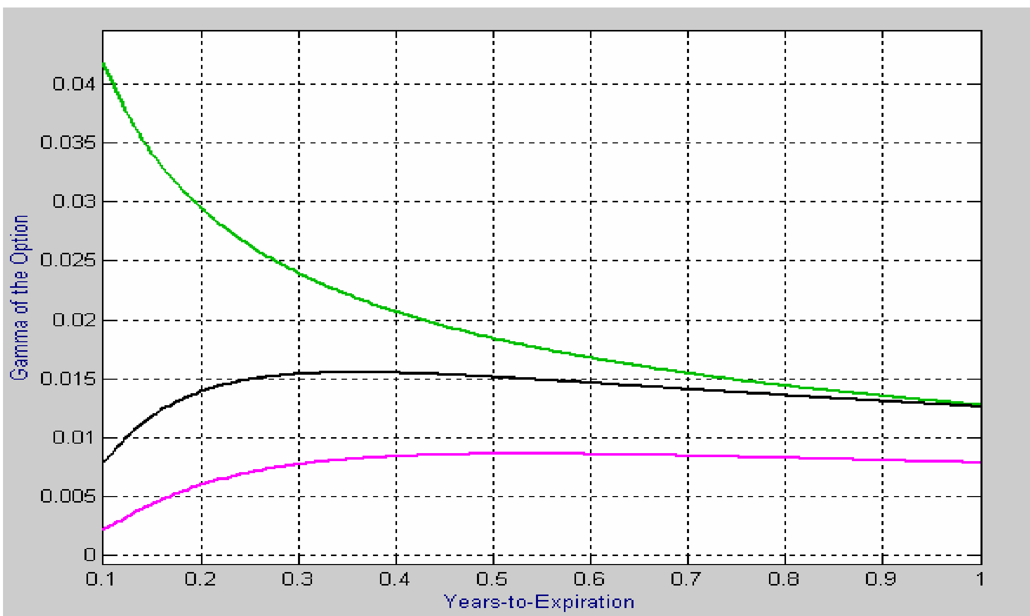
Gamma som funktion av antalet dagar till lösen.

Γ beskriver hur stabilt vårt Δ är vid små kursrörelser. Med andra ord representerar Γ hävstången i positionen, dvs ett mått på exponeringen av de faktiska rörelserna på marknaden. Med ett annat synsätt är Γ ett mått på hur snabbt sannolikheterna på marknaden förändras. Observera att Γ har samma värde för både för europeiska köp- och säljoptioner. För att finna en stabil portfölj vill vi välja denna så att både Δ och Γ är noll. Om $\Gamma > 0$ köper man volatilitet, exempelvis en strut, en vagga en backspread, en ratio-spread eller en butterfly (se strategier i strategiavsnittet).

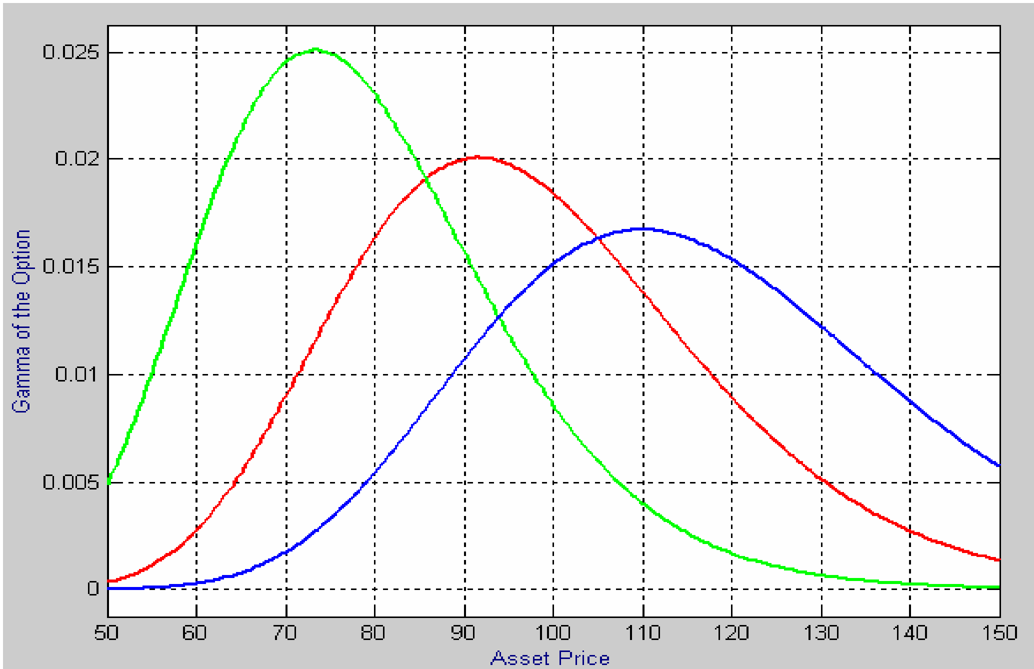
Ändringen i optionens pris $\Delta\Pi$ för en Δ-neutral portfölj get av:

$$\Delta\Pi = \Theta \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S)^2$$

I figuren nedan ser vi Γ för tre olika lösenpriser 100 (grön), 120 (svart) och 80 kr. Priset på underliggande är 100 kr.



Γ som funktion av tid till förfall.



Γ som funktion av avistapris, för lösenpriser (från vänster) 80, 100 och 120 kr.

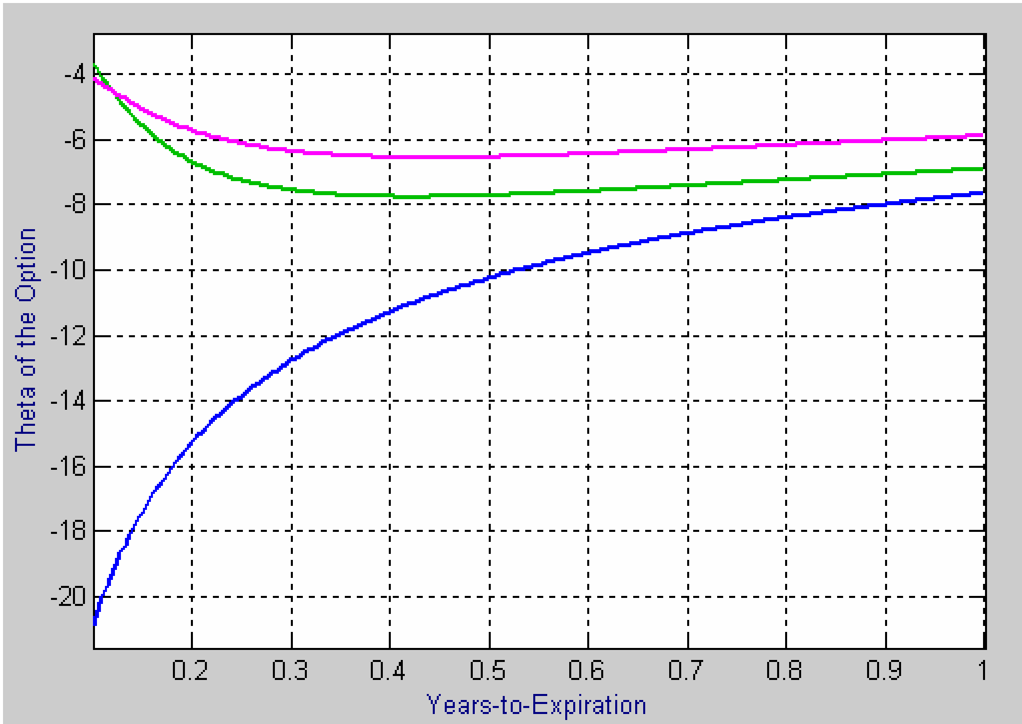
Theta

För europeiska optioner ges Theta (Θ) av:

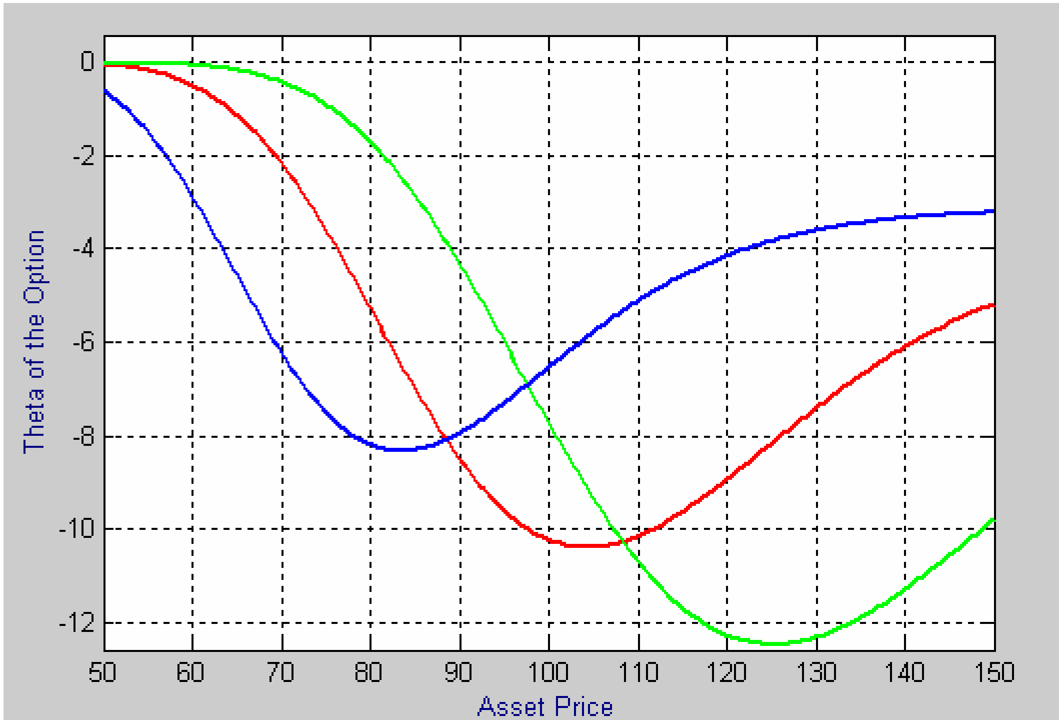
$$\Theta_k = -\frac{S \cdot e^{d_1^2/2} \cdot \sigma \cdot e^{-q(T-t)}}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (T-t)}} + q \cdot S \cdot N(d_1) \cdot e^{-q(T-t)} - r \cdot X \cdot N(d_2) \cdot e^{-r(T-t)}$$

$$\Theta_s = -\frac{S \cdot e^{d_1^2/2} \cdot \sigma \cdot e^{-q(T-t)}}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (T-t)}} - q \cdot S \cdot N(-d_1) \cdot e^{-q(T-t)} + r \cdot X \cdot N(-d_2) \cdot e^{-r(T-t)}$$

I figuren nedan ser vi hur värdet på Theta ändras då tre olika köpoptioner närmar sig lösendagen. Motsvarande kurva för säljoptionen skiljer sig mycket lite på grund av att den första termen i uttrycken ovan dominerar utseendet av Theta.



Theta som funktion av antalet dagar till lösen för lösenpriser uppifrån 120, 80 resp, 100 kr.



Θ som funktion av avistapriset för lösenpris (från vänster) 80, 100 och 120 kr.

Vega

För europeiska optioner ges uttrycket av Vega (ν) ges:

$$\nu = S\sqrt{\frac{T-t}{2\cdot\pi}}\cdot e^{d_1^2}\cdot e^{-q\cdot(T-t)}$$

för både europeiska köp- och säljoptioner.

<u>Rho</u>

För europeiska optioner ges uttrycken av (ρ) av:

$$\rho_k = (T-t) \cdot X \cdot e^{-r\cdot(T-t)} N(d_2)$$

$$\rho_s = -(T-t) \cdot X \cdot e^{-r\cdot(T-t)} N(-d_2)$$

för europeiska köp- respektive säljoptioner.

Put-Call paritet

För att marknaden skall vara **arbitragefri**, d.v.s. korrekt prissatt finns det ett samband mellan priset på en köp- och en säljoption. För europeiska optioner kan man skriva detta samband, kallat put-call-paritet:

$$P_k + X \cdot e^{-rT} = P_s + S$$

En amerikansk säljoption kan vara mer värd än en motsvarande europeisk (se binomialmodellen) så för amerikanska optioner gäller i stället en olikhet:

$$P_k + X \cdot e^{-rT} \geq P_s + S$$

Black-76

Om underliggande är en termin eller ett index i stället för en aktie gäller Blacks modell. Denna får direkt ut Black-Scholes model om vi sätter terminens värde *F* till

$$F = e^{-rT} \cdot S$$

och låter *X* vara lösenpriset (index för OMX om OMX-option), får vi direkt

$$P_k = e^{-rT} \cdot (F \cdot N(d_1) - X \cdot N(d_2))$$
$$P_s = e^{-rT} \cdot (X \cdot N(-d_2) - F \cdot N(-d_1))$$

där

$$d_2 = \frac{\ln(F/X) - (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

För optioner med en termin som underliggande ges hedgeparametrarna av följande uttryck:

Delta ges av

$\Delta = e^{-r(T-t)}N(d_1)$ för en europeisk köpoption och

$\Delta = e^{-r(T-t)}\left[N(d_1) - 1\right]$ för en europeisk säljoption.

Theta (Θ) ges av:

$$\Theta_k = -\frac{S \cdot e^{d_1^2/2} \cdot \sigma \cdot e^{-r(T-t)}}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (T-t)}} + r \cdot S \cdot N(d_1) \cdot e^{-r(T-t)} - r \cdot X \cdot N(d_2) \cdot e^{-r(T-t)}$$

$$\Theta_s = -\frac{S \cdot e^{d_1^2/2} \cdot \sigma \cdot e^{-r(T-t)}}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (T-t)}} - r \cdot S \cdot N(-d_1) \cdot e^{-r(T-t)} + r \cdot X \cdot N(-d_2) \cdot e^{-r(T-t)}$$

Vega (ν) ges av:

$$\nu = S\sqrt{\frac{T-t}{2 \cdot \pi}} \cdot e^{d_1^2} \cdot e^{-r \cdot (T-t)}$$

för både europeiska köp- och säljoptioner.

Rho (ρ)ges av:

$$\rho_k = -(T-t) \cdot S \cdot e^{-r \cdot (T-t)} N(d_1)$$

$$\rho_s = (T-t) \cdot S \cdot e^{-r \cdot (T-t)} N(-d_1)$$

för europeiska köp- respektive säljoptioner.

Andra analytiska modeller

Det finns en uppsättning analytiska approximationer och vi skall nämna några av dessa. För en mera detaljerad beskrivning hänvisas till Haug.

- Bjerksund
- Black-76 (American)
- Barone-Adesi
- Geske
- Extended Geske-Johnson

Bjerksund - Stensland

Bjerksunds model är en approximation på sluten form som kan användas för amerikanska optioner på aktier, terminer, futures och valuta, där underliggande betalar ut en konstant yield/ränta. Modellen är härledd genom antaganden på restriktioner på ett antal möjliga lösenstrategier och ger ett lägsta värde för optionens värde. Strategin är att lösa optionen första gången priset på underliggande når ett under randvillkor. Numeriska undersökningar visar att denna metod är något noggrannare för långlivade optioner än exempelvis Barone-Adesi (se nedan).

Black-76 American

Denna metod är analog med, Bjerksund modell med aktiepriset S ersatt av terminspriset F.

Barone-Adesi

Barone-Adesi approximationen är en kvadratisk approximation, för att prissätta amerikanska köp- och säljoptioner. Eftersom amerikan köpoptioner har samma värde som europeiska används där den vanliga Black-Scholes formel. Modellen är snabb och noggrann för de flesta praktiska indata.

Roll, Geske and Whaley

Roll, Geske och Whaley har utvecklat en metod för att värdera en amerikansk köpoption på en underliggande med en utdelning D_i, vid tiden t_i.

$$
\begin{aligned}
C_D = \left(S_0 - D_1 e^{-rt_1}\right)N(b_1) + \left(S_0 - D_1 e^{-rt_1}\right)M\left(a_1, -b_1; -\sqrt{t_1 / T}\right) \\
- Xe^{-rT} M\left(a_2, -b_2; -\sqrt{t_1 / T}\right) - (X - D_1)e^{-rt_1} N(b_2),
\end{aligned}
$$

där

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\log\left[\left(S_0 - D_1 e^{-rt_1}\right)/ X\right] + \left(r + \sigma^2 / 2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\
a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T}, \\
b_1 &= \frac{\log\left[\left(S_0 - D_1 e^{-rt_1}\right)/ S^*\right] + \left(r + \sigma^2 / 2\right)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}}, \\
b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{t_1},
\end{aligned}
$$

och där variabeln S^* är lösningen till

$$
c\left(S^*\right) = S^* + D_1 - X,
$$

där $c\left(S^*\right)$ är Black-Scholes priset när underliggandepriset är S^* och tiden till förfall $T - t_1$.

Utökad Geske Johnson

Roll-Geske metoden ovan prissätter amerikanska köpoptioner. På liknande sätt kan vi approximera priset på amerikanska säljoptioner. Problemet är att det kan vara fördelaktigt att lösa optionen i förtid.

$$
c = VM\left(a_1, b_1; \sqrt{T / T^*}\right) - Ae^{-rT^*} M\left(a_2, b_2; \sqrt{T / T^*}\right) - Xe^{-rT} N(a_2),
$$

där

$$a_1 = \frac{\log\left(V / V^*\right) + \left(r + \sigma_V^2 / 2\right)T}{\sigma_V \sqrt{T}},$$

$$b_1 = \frac{\log\left(V / A\right) + \left(r + \sigma_V^2 / 2\right)T^*}{\sigma_V \sqrt{T^*}},$$

$$a_2 = a_1 - \sigma_V \sqrt{T}\ ,$$

$$b_2 = b_1 - \sigma_V \sqrt{T^*}\ ,$$

och V^* det fasta värdet vid tiden T, som får aktiepriser att vara lika med X. Detta är värdet på V som löser ekvationen

$$X = VN\left(d_1\right) - Ae^{-rT^*} N\left(d_2\right),$$

där

$$d_1 = \frac{\log\left(V / A\right) + \left(r + \sigma_V^2 / 2\right)T^*}{\sigma_V \sqrt{T^*}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T^*}.$$

<u>Delta-hedgning</u>

Vi skall nu i detalj studera hur vi hedgar med hjälp av delta. Detta görs enklast med ett exempel: Antag att vi säljer en europeisk köpoption på 100 000 aktier i ACME för 2 Mkr. Vi antar att:

S	= 365 kr,
X	= 370 kr,
σ	= 20%,
r	= 7% och
T – t	= 0.25 år.

Black-Scholes ger då att P = 15 264 kr d.v.s. värdet är 1 526 400 kr, så vi gör en vinst på 473 600 kr. Detta är ju bra! men vi är utsatta för en risk.
Antag först att vi har en naken position, d.v.s. vi äger inte de underliggande aktierna i ACME.

Studera två fall:

1. Aktiens värde på lösendagen < 370. Vi blir inte lösta så vi gör en vinst på 2 Mkr.
2. Aktiens värde på lösendagen är 395 kr så vi blir lösta. Vi tvingas då köpa 100 000 aktier för 395 kr/st och sälja dem för 370. Kostnaden för detta är 2.5 Mkr. vilket ger en förlust på 500 000 kr.

Antag i stället att vi har en täckt position, d.v.s. vi köper de underliggande aktierna i ACME för 365 kr/st.

Studera två nu:

1. Aktiens värde på lösendagen är 360. Vi blir inte lösta men gör en förlust på aktien motsvarande 500 000 så totala vinsten blir 1.5 Mkr. Om aktien går under 345 kr gör vi en total förlust.
2. Aktiens värde på lösendagen är 380 kr så vi blir lösta. Vi säljer aktierna för 370 kr/st. Vinsten blir total sett 2.5 Mkr.

Vi skall nu se hur vi kan skydda oss med derivat i en situation som denna. Antag att vi utfärdar en option och köper x stycken underliggande till priset S vid tiden t. Om $F(t, S)$ betecknar värdet på optionen så är värdet av vår portfölj:

$$V = -F(t, S) + x \cdot S$$

Delta-hedgning innebär att $\frac{dV}{dS} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\partial F}{\partial S} = \Delta$. Vi kan alltså med en option hedga Δ aktier. Observera att vi måste balansera om portföljen (förhållandet mellan antal aktier och optioner) för att alltid vara neutrala.

Delta-Gamma-hedgning

Om vi skall vara okänsliga i Δ måste vi också ha $\Gamma = 0$. Eftersom $\Gamma = 0$ för aktier måste vi använda ytterligare derivat.

Given en portfölj Π med en aktie S och två derivat, F och G. Med andra ord välj X_F och X_G så att hela portföljen är Δ- och Γ-neutral:

$$V = \Pi + X_F \cdot F + X_G \cdot G$$

Vi får alltså

$$\begin{cases} \Delta_\Pi + X_F \cdot \Delta_F + X_G \cdot \Delta_G = 0 \\ \Gamma_\Pi + X_F \cdot \Gamma_F + X_G \cdot \Gamma_G = 0 \end{cases}$$

Vilket ger

$$\begin{cases} X_F = -\dfrac{\Gamma_\Pi}{\Gamma_F} \\ X_G = \dfrac{\Delta_F}{\Gamma_F} \cdot \Gamma_\Pi - \Delta_\Pi \end{cases}$$

Exempel

> Du vill hedga 1000 aktier som nu har en kurs på 35 kr. På marknaden finner du att optioner finns med lösenpriser 30 och 37 kr. Den riskfria marknadsräntan är 4.5 % och det är 102 dagar till dess att optionerna förfaller. Volatiliteten på den underliggande aktien är 37.5 %.

Utför man då beräkningarna ovan, men en köpoption med lösenpris 30 och en säljoption men lösenpris 37 kr får man som resultat att man skall köpa 551 säljoptioner och sälja 843 köpoptioner (övning!!!).

I figuren nedan kan vi se hur väl vi har hedgat våra 1000 aktier. Kurvan visar hur vår totala portfölj, innehållande aktier och optioner, ändras om aktiepriset varierar mellan 0 och 70 kr. Som du ser är man bra hedgad i ett relativt omfattande område, mellan 28 och 42 kr.

NÅGOT OM EXOTISKA OPTIONER

Exotiska optioner kan konstrueras på väldigt många sätt. Men för att få en liten inblick hur dessa kan konstrueras ska vi nämna några. Som tidigare nämnts är dessa (åtminstone inte i Sverige) börshandlade, utan handlas som OTC-instrument. Några av de vanligaste är:

- Cash-or-nothing options
- Knock-out and knock-in options
- Barrier Options
- Lookback Options
- Asian Options
- Chooser Options
- Options on two different assets
- Options on Options
- Currency Options

Cash-or-nothing Optioner

Det finns två så kallade digitala optioner; **cash or nothing options** och **asset or nothing options**. Dessa optioner, har som de flesta andra ett lösenpris och en löptid. Men på lösendagen behöver inte innehavaren välja om han/hon skall lösa eller inte, utan följande sker:

- Om den underliggande varans värde överstiger optionens lösenpris erhåller innehavaren varan av utfärdaren.
- Om den underliggande varan inte når upp till optionens lösenpris erhåller inget och optionen förfaller värdelös.

Knock-out och Knock-in Optioner

Det finns två generella klasser av s k barriäroptioner; in-options och out-options. Med en in-option betalar köparen för en premie och får en option som börjar gälla först då den underliggande vara når upp till ett viss värde, barriärvardet. Om underliggande vara inte når upp till detta värde förfaller optionen värdelös även om optionen då har ett positivt värde.

En out-option, är en barriär option som förfaller om underliggande vara når barriären. Det är möjligt att kombinera en down-and-out-call option med en down-and-in-call option för att på så sätt få ett ganska intressant resultat. Om barriären och lösenpriset är detsamma för båda optionerna förfaller vår down-and-out medan vår down-and-in aktiveras. På så sätt skapar dessa båda tillsammans en vanlig europeisk köpoption. Därför blir summan av dessa lika med Black-Scholes formel.

<u>Down-and-out put option</u>

Här kan ses hur en av dessa typer värderas

$$P = Xe^{-rT}\left\{N(d_4) - N(d_2) - a\left[N(d_7) - N(d_5)\right]\right\} -$$
$$S_0\left\{N(d_3) - N(d_1) - b\left[N(d_8) - N(d_6)\right]\right\}$$

där

$$a = \left(\frac{S_b}{S_0} \right)^{-1+2r/\sigma^2}, \qquad b = \left(\frac{S_b}{S_0} \right)^{1+2r/\sigma^2}$$

och

$$d_1 = \frac{\log(S_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = \frac{\log(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_3 = \frac{\log(S_0 / S_b) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_4 = \frac{\log(S_0 / S_b) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_5 = \frac{\log(S_0 / S_b) - (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_6 = \frac{\log(S_0 / S_b) - (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_7 = \frac{\log(S_0 X / S_b^2) - (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_8 = \frac{\log(S_0 X / S_b^2) - (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

Lookback Optioner

En flytande lookback köpoption ger innehavaren av optionen rätten att köpa underliggande vara för det lägsta observerade priset under optionens livstid. På samma sätt ger innehavaren av en lookback säljoption rätten att sälja underliggande vara till det högsta observerade priset under optionens livstid. I en fix strike lookback call är lösenpriset fixerat och skillnaden mellan denna och det högsta observerade priset betalas ut då optionen förfaller. Även andra typer av lookback optioner existerar, se Haug.

Asiatiska Optioner

Asiatiska optioner är speciellt populära på valuta- och commoditymarknaden. En medelväedesoption är mindre volatil än underliggande själv. Därmed blir priset lägre för exempelvis en average-rate option jämfört med en jämförbar standardoption. Med optioner baserade på ett medelvärden gör det dessutom svåra att prismanupulera priset på den underliggande varan precis före optionens förfall eftersom detta har lite betydelse på optionens värde. Därför är asiatiska optioner speciellt populära på penning- och valutamarknaden.

Chooser Optioner

En enkel chooser option ger innehavaren rätten att välja om optionen skall övergå till en köp eller en säljoption efter en viss tid. Både köp och säljoptionen har samma tid till förfall och samma lösenpris. En complex chooser option, introducerad av Rubenstein (1991) ger innehavaren rätten att välja om optionen skall övergå till en köp eller en säljoption efter en viss tid, men med olika lösenpris och tid till förfall.

Optioner på Optioner

En model för att prissätta optioner på optioner publicerades först av Geske (1977). Senare utökades den och diskuterades av (1979), Hodges och Selby (1987), och Rubenstein (1991).

KOSTNAD FÖR ATT BLANKA AKTIER

I Black-Scholes arbitragfria värld värderas en option genom en replikerande portfölj innehållande en aktie och ett riskfritt räntebärande papper, dör aktien följer:

$$\frac{dS}{S} = r \cdot dt + \sigma \cdot dW$$

Men, i verkligheten är det inte möjligt att få tillbaka den riskfria räntan på en kort aktieposition eftersom att ingå i en kort position innebär en kostnad motsvarande all låna aktien. Därför bör processen ovan vara:

$$\frac{dS}{S} = \left(r - r_{SBC}\right) \cdot dt + \sigma \cdot dW$$

där rSBC är räntekostnaden för att låna aktien. Väntevärdet för en köpoption på lösendagen, given av Black-Scholes härledning borde därför modifieras till

$$E\left[\Pi(T)\right] = E\left[\max\left(S(T) - X, 0\right)\right] = S(t) \cdot N(d_1) e^{(r - r_{SBC})(T-t)} - X \cdot N(d_2)$$

Väntevärdet av optionen är

$$\Pi = e^{-r_f (T-t)} E\left[\Pi(T)\right] = e^{-r_{SBC}(T-t)} S(t) \cdot N\left(d_1\right) - e^{-r(T-t)} X \cdot N\left(d_2\right)$$

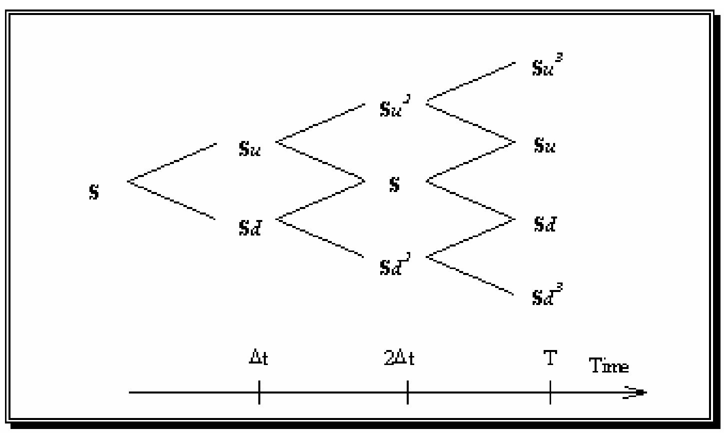
där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r_f - r_{SBC} + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

NUMERISKA PRISMODELLER

Binomialmodeller

Det finns ett stort antal olika binomialmodeller, men tankesättet för dessa är väldigt lika. Vi börjar därför med den vanligaste och enklaste av dem, Cox-Ross-Rubensteins modell. I binomialmodellen antar vi att vi delar in tiden i ett antal diskreta tidpunkter. Vid varje sådan tidpunkt kan en aktie gå upp en faktor u, med en viss sannolikhet P_u eller gå ner en annan faktor d med sannolikhet P_d. $P_u + P_d = 1$ så att sannolikheten bevaras. Storleken på upp- och nedgången bestäms av volatiliteten σ på den underliggande aktien. I gränsen med oändligt fin uppdelning, kan man visa att Binomialmodellen övergår i Black-Scholes modell. Man kan till och med härleda Black-Scholes från Binomialmodellen.
I figuren nedan ser vi ett sådant binomialträd där aktien från början (vid tiden $t = 0$) har ett pris på S kr. Vi multiplicerar sedan detta med u och d för att få noderna med möjliga aktiepriser vid nästa tidpunkt o s v.



Ett binomialträd.

där u och d ges av:

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{dt}}$$
$$d = e^{-\sigma \cdot \sqrt{dt}}$$

där dt är storleken på tidsdiskretiseringen i modellen och σ volatiliteten.

Vi låter nu P_u och P_d betecknar sannolikheterna för uppgång respektive nedgång och *S0* aktiepriset vid tiden $t = 0$. Villkoret att vi inte tillåter arbitragemöjligheter leder då till:

$$a \cdot S0 = P_u \cdot uS0 + P_d \cdot dS0$$

där $a = e^{r \cdot dt}$ och r är den riskfria räntan för omedelbar kapitalisering. Ofta skriver man a som $1 + R$, där då R betecknar den riskfria räntan mellan $T = 0$ och $T = 1$. Uttrycket ovan säger alltså att den förväntade avkastningen på aktien är lika med den avkastning vi skulle få på ett räntebärande papper. Därmed erhåller vi de s.k. riskneutrala sannolikheterna via:

$$\begin{cases} P_u + P_d = 1 \\ P_u \cdot u + P_d \cdot d = a \end{cases}$$

Då fås att sannolikheten för en uppgång respektive nedgång är:

$$P_u = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1}{u-d} \cdot \left[e^{r \cdot dt} - d\right] \qquad P_d = 1 - P_u$$

Vidare måste

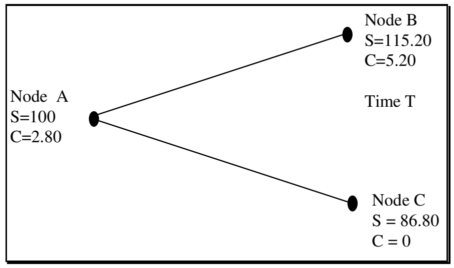
$$d < a < u$$

<u>Exempel – En amerikansk köpoption:</u>

Nuvarande aktiepris	S = 100 kr
Volatiliteten av aktiepriset	σ = 20 %
Den kontinuerliga riskfria räntan	r = 5 %
Optionens lösenpris	K = 110 kr
Löptiden	T = 180 dagar

Gör en iteration med Δt =180/365 ≅ 0.5 år. Från formlerna ovan får vi:

u = 1.152
d = 0.868
a = 1.025
p = 0.553



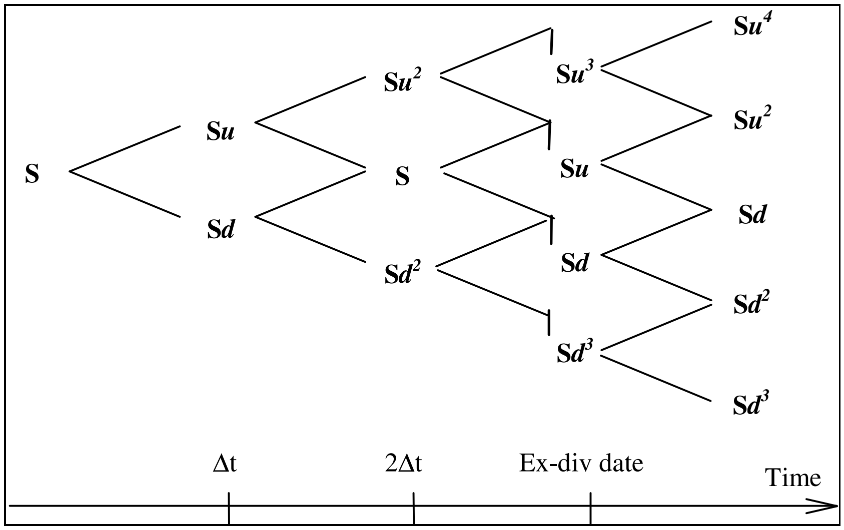
Vid tiden T, då option löper ut (i noderna B and C, är aktiepriset 115.20 respektive 86.80 kr. Optionens priser i dessa noder beräknas med hjälp av *max [S - K, 0]*. I nod A, fås då optionspriset med hjälp av:

$$C = \max(S_A - K, e^{-r\Delta t}(pC_B + (1-p)C_C))$$

Rekombinerande träd

Förutom binomialmodeller av typen ovan finns även s k rekombinerande träd. Det utmärkande med dessa är att de inte bryts sönder utav utdelningar. Man använder sig av samma parametrar som i träden ovan för själva uppbyggnaden. Övriga skillnader beskrivs nedan,

Först subtraherar man aktiepriset med nuvärdet av alla utdelningar under löptiden. Det nya priset blir därmed $S^* = S - PVD$ (före utdelningarna) och $S^* = S$ (efter utdelningarna), där D är en framtida utdelning och PVD står för nuvärdet av denna. Därefter bygger man trädet m.a.p. aktiepriset, $S = S^* + PVD$. Före första utdelningen motsvarar alltså priserna i noderna det reducerade aktiepriset. Efter detta flyttas trädet parallellt, motsvarande utdelningen. Efter nästa utdelning sker ett nytt skift o s v.



Principen visas i figuren ovan. Antag vi har en utdelning vid tiden *t_div*. Vid tiden *Δt* före utdelningen ges nodpriserna av:

$$S^*u^2 + De^{-r(t\_div-\Delta t)}$$
$$S^* + De^{-r(t\_div-\Delta t)}$$
$$S^*d^2 + De^{-r(t\_div-\Delta t)}$$

I noden efter ges de av:

$$S^*u^3 = Su^3$$
$$S^*u = Su$$
$$S^*d = Sd$$
$$S^*d^2 = Sd^2$$
$$S^*d^3 = Sd^3$$

Det faktum att hela trädet flyttas parallellt innebär att alla noder rekombinerar efter en utdelning. På detta sätt brister inte själva trädstrukturen.

Implicita Binomial- och Trinomialträd

På senare tid har det vuxit fram nya modeler som har blivit allt mer populära, implicita trädmodeller. Huvudidén är att använda den information som finns för likvida optioner med olika lösenpriser och löptider. Idén om implicita träd gavs först 1994 av Dupire, Derman och Kani, samt Rubenstain, 1994 och många andra. I modellerna diskretiserar man processen för aktiepriset där volatiliteten är en funktion av både priset på underliggande aktie och tiden

$$dS = \mu(T)Sdt + \sigma(S,T) \cdot SdW$$

vilket skiljer sig från den geometriska Brownska rörelsen som används i Black-Scholes värld:

$$dS = \mu Sdt + \sigma SdW$$

Där är volatiliteten konstant under hela optionens livstid. I den implicita modellen beräknas volatiliteten numeriskt från det ”smile” som de likvida optionerna har. Med ”smile” menas den kurva om man plottar den implicita volatiliteten mot lösenpriset. Optioner långt från pari, d v s lösenpriser långt från aktiens pris har högre volatilitet. Detta ger upphov till ett ”smile”. Därmed kalibreras samtliga optioner så att dessa blir arbitragefria med avseende på observerade optionspriser. För vidare diskussion, se Haug.

Replikerande portfölj

Om vi betecknar värdet på en köpoption om aktien går upp med $\Phi(u)$ och värdet om aktien går ner med $\Phi(d)$, antalet obligationer med räntan R med x och antalet aktier med y har vi:

$$\begin{cases} (1+R) \cdot x + uS0 \cdot y = \Phi(u) \\ (1+R) \cdot x + dS0 \cdot y = \Phi(d) \end{cases}$$

Denna kalkyl kan vi göra i varje nod i ett träd. Vi får då en replikerande eller balanserad portfölj, (i varje nod) som består av:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+R} \dfrac{u \cdot \Phi(d) - d \cdot \Phi(u)}{u-d} \\ y = \dfrac{1}{S0} \dfrac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d} \end{cases}$$

Exempel på arbitrage

Gäller inte villkoren ovan kan vi göra arbitrage. (Tänk på att köpa billigt och sälja dyrt.) Antag nämligen att vi har en aktie som kostar 100 kr. Vi köper en option på denna med lösenpris 110 kr. Vidare antar vi att $u = 1.2$ och $d = 0.8$, $P_u = P_d = 0.5$ samt $r = 0$.

Vi får då följande värden i vårt enperiodiska binomialträd:

$$S0 = 100, \qquad uS0 = 120, \qquad dS0 = 80$$

Värdet av en köpoption med lösenpriser 110 kronor blir då i de båda noderna

$\Phi(u) = max(uS0 - X, 0) = 10$ och
$\Phi(d) = max(dS0 - X, 0) = 0$

Optionens värde vid T = 0 är då (0.5 * 10 + 0.5 * 0) 5 kr.

1.) Antag först att någon handlar optionen för 8 kr. Då säljer vi en option för 8 kr, investerar 5 kr i en portfölj och låna 20 kr samt köper ¼ aktie för 25 kr. Då kan vi stoppa 3 kr i fickan.

    Om nu aktien går upp gör vi följande: Sälj aktien för ¼ * 120 = 30 kr, betala lånet, 20 kr och betala köparen av optionen 10 kr. Resultat: Vi har kvar våra 3 kr vi stoppade i fickan.
    Om aktien i stället går ner säljer vi aktien för ¼ * 80 = 20 kr och betala igen lånet. Även nu har vi kvar våra 3 kr.

2.) Hade någon handlar optionen för 3 kronor kan vi på motsvarande sätt köpa den. Samtidigt säljer vi ¼ aktie för 25 kr, sätter in 20 av dessa på banken och stoppar 2 kr i fickan.

    Om nu aktien går upp sker följande: Vi få 10 kr för optionen Vi tar ut pengarna från banken och köper tillbaka aktien för 30 kr och vi har kvar våra 2 kr.
    Om aktien i stället går ner tar vi ut våra 20 kronor och köper tillbaka aktien. Även nu har vi kvar våra 2 kr.

Delta-hedgning

Vi skall nu i detalj studera hur vi hedgar med hjälp av delta. Detta görs enklast med ett exempel:

Antag att vi säljer en europeisk köpoption på 100 000 aktier i ACME för 2 Mkr. Vi antar att:

$S = 365$ *kr,*
$X = 370$ *kr,*
$\sigma = 20\%,$
$r = 7\%$ *och*
$T - t = 0.25$ *år.*

Black-Scholes ger då att P = 15 264 kr d.v.s. värdet är 1 526 400 kr, så vi gör en vinst på 473 600 kr. Detta är ju bra! men vi är utsatta för en risk.
Antag först att vi har en naken position, d.v.s. vi äger inte de underliggande aktierna i ACME.

Studera två fall:

1. Aktiens värde på lösendagen < 370. Vi blir inte lösta så vi gör en vinst på 2 Mkr.
2. Aktiens värde på lösendagen är 395 kr så vi blir lösta. Vi tvingas då köpa 100 000 aktier för 395 kr/st och sälja dem för 370. Kostnaden för detta är 2.5 Mkr. vilket ger en förlust på 500 000 kr.

Antag i stället att vi har en täckt position, d.v.s. vi köper de underliggande aktierna i ACME för 365 kr/st.

Studera nu:

1. Aktiens värde på lösendagen är 360. Vi blir inte lösta men gör en förlust på aktien motsvarande 500 000 så totala vinsten blir 1.5 Mkr. Om aktien går under 345 kr gör vi en total förlust.
2. Aktiens värde på lösendagen är 380 kr så vi blir lösta. Vi säljer aktierna för 370 kr/st. Vinsten blir total sett 2.5 Mkr.

Vi skall nu se hur vi kan skydda oss med derivat i en situation som denna. Antag att vi utfärdar en option och köper x stycken underliggande till priset S vid tiden t. Om $F(t, S)$ betecknar värdet på optionen så är värdet av vår portfölj:

$$V = -F(t, S) + x \cdot S$$

Delta-hedgning innebär att $\dfrac{dV}{dS} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\partial F}{\partial S} = \Delta$. Vi kan alltså med en option hedga Δ aktier. Observera att vi måste balansera om portföljen (förhållandet mellan antal aktier och optioner) för att alltid vara neutrala.

Delta-Gamma-hedgning

Om vi skall vara okänsliga i Δ måste vi också ha $\Gamma = 0$. Eftersom $\Gamma = 0$ för aktier måste vi använda ytterligare derivat.

Given en portfölj Π med en aktie S och två derivat, F och G. Med andra ord välj X_F och X_G så att hela portföljen är Δ- och Γ-neutral:

$$V = \Pi + X_F \cdot F + X_G \cdot G$$

Vi får alltså

$$\begin{cases} \Delta_\Pi + X_F \cdot \Delta_F + X_G \cdot \Delta_G = 0 \\ \Gamma_\Pi + X_F \cdot \Gamma_F + X_G \cdot \Gamma_G = 0 \end{cases}$$

Vilket ger

$$\begin{cases} X_F = -\dfrac{\Gamma_\Pi}{\Gamma_F} \\ X_G = \dfrac{\Delta_F}{\Gamma_F} \cdot \Gamma_\Pi - \Delta_\Pi \end{cases}$$

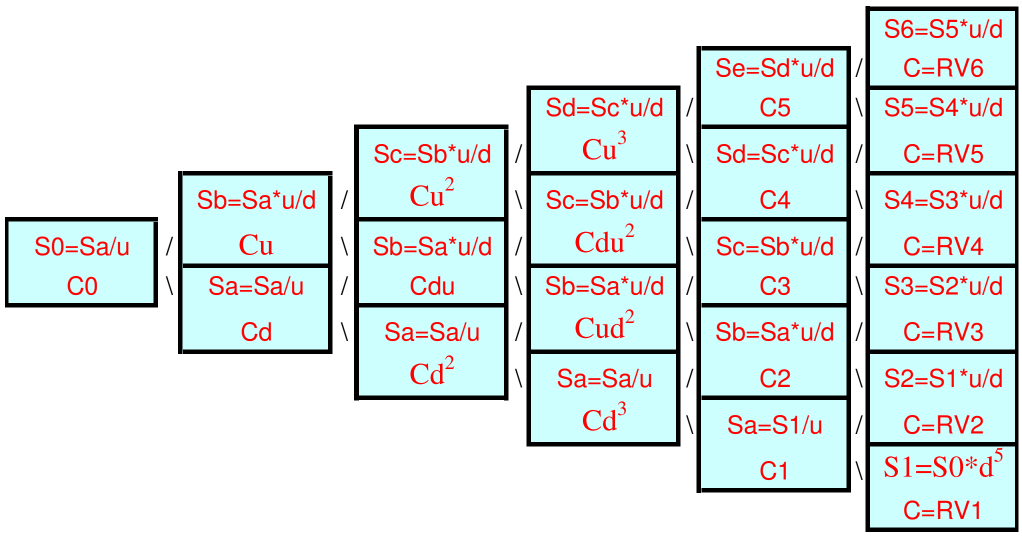
Exempel:

> Du vill hedga 1000 aktier som nu har en kurs på 35 kr. På marknaden finner du att optioner finns med lösenpriser 30 och 37 kr. Den riskfria marknadsräntan är 4.5 % och det är 102 dagar till dess att optionerna förfaller. Volatiliteten på den underliggande aktien är 37.5 %.

Utför man då beräkningarna ovan, men en köpoption med lösenpris 30 och en säljoption men lösenpris 37 kr får man som resultat att man skall köpa 551 säljoptioner och sälja 843 köpoptioner (övning!!!).

I figuren nedan kan vi se hur väl vi har hedgat våra 1000 aktier. Kurvan visar hur vår totala portfölj, innehållande aktier och optioner, ändras om aktiepriset varierar mellan 0 och 70 kr. Som du ser är man bra hedgad i ett relativt omfattande område, mellan 28 och 42 kr.

Binomialmodellen: numerisk algoritm



Starta med att dela in tiden i *N* lika stora intervall (ovan *N = 5*) och gör på följande vis:

1. Börja i slutet av trädet (d.v.s. vid tiden = *T*). Den nedersta noden har där värdet: $S = S0*d^{N}$. Sätt randvillkoret i denna nod, exempelvis: $C = max(0, X - S)$ (randvillkor beroende av kontraktstyp, se nedan).

2. Följ noderna uppåt för samma värde på *N* (d.v.s. samma tid). Beräkna varje nytt ”*S*” som det under multiplicerat med *u/d* och randvillkoret *C* som ovan.

3. För tiden = *T – dt* (d.v.s. för *N – 1*, noderna närmast till vänster om de tilldelade). Börja nerifrån och beräkna alla ”S” som i figuren. Beräkna därefter alla ”*C*” Om europeisk fås:

   $C1 = a \cdot (p \cdot Sb - u \cdot Sa)$,
   $C2 = a \cdot (p \cdot Sc - u \cdot Sa)$
   ....
   etc.
   och om amerikansk

   $C1 = MAX\left(a \cdot (p \cdot Sb - u \cdot Sa), X - S\right)$,
   $C2 = MAX\left(a \cdot (p \cdot Sc - u \cdot Sa), X - S\right)$
   ....

etc.
Se förklaring i avsnittet om Randvillkor nedan.

4. Analogt med 2. Bygg klart trädet.

5. Vi har nu:

 Priset = *C0*
 $\Delta = (Cu - Cd)/(Su - Sd)$
 $\Gamma = ((Cuu - Cud)/(Suu - Sud) - (Cud - Cdd)/(Sud - Sdd))/(0.5*(Suu - Sdd))$
 $\Theta = (Cud - C0)/(2*dt*365)$

Vill man beräkna Vega och Rho med Binomialmodellen måste man bygga två olika träd med olika värden på volatiliteten respektive den riskfria räntan. Därefter kan man beräkna Vega som $[C0(\sigma 1) - C0(\sigma 2)]/(\sigma 1 - \sigma 2)$ och Rho som $[C0(\rho 1) - C0(\rho 2)]/(\rho 1 - \rho 2)$.

<u>Randvillkor</u>

Randvillkoren (värdet på lösendagen) för optionerna ges av:

$RV = \max(S - X, 0)$ Köpt köpoption.
$RV = \min(0, X - S)$ Utfärdad köpoption.
$RV = \max(0, S - X)$ Köpt säljoption.
$RV = \min(S - X, 0)$ Utfärdad säljoption.

När en säljoption är av amerikansk typ måste vi i varje nod beräkna realvärdet. I vissa noder är detta högre än optionens teoretiska värde. Då gäller naturligt vis att värdet är det högre av dem, d.v.s. realvärdet. Orsaken är att vi när vi vill kan lösa en amerikansk option. I fallet då realvärdet är större än det teoretiska värdet är det mest optimala att lösa optionen. En amerikansk köpoption är däremot aldrig optimal att lösa i förtid vid ett planerat köp, då realvärdet alltid är lägre än det teoretiska värdet. Om man äger en köpoption och planerar att köpa aktien, är det aldrig optimalt att lösa denna i förtid. I stället kan man tjäna ränta under tiden. Du måste ju ändå betala lösenpriset. Naturligtvis kan du kanske köpa aktierna billigare på marknaden, men då är ju optionerna värdelösa. Lägsta priset på en säljoption är:

$$P_{s,\min} = X \cdot e^{-r \cdot T} - S$$

och lägsta priset på en köpoption är:

$$P_{k,\min} = S - X \cdot e^{-r \cdot T}$$

Exempel 1. Europeisk köpoption

I exemplet nedan studerar vi en europeisk köpoption med aktiepris 50 kr, lösenpris 50 kr (d.v.s. en parioption) med volatiliteten 30%, riskfria räntan 5 % och tid till lösen 5 månader (152 dagar). Vi delar in trädet i 5 tidsintervall så att varje steg är en månad (dt=0.08329 år). Därefter räknar vi ut *u, d, p* och *q = 1- p* samt diskonteringsfaktorn disk, kallad *a* i formlerna ovan. Sedan byggs trädet och priset beräknas tillsammans med grekerna.

Stock =	50	Kr	dt	0,08329						
Strike =	50	Kr	u	1,09044						
Vola. =	30	%	d	0,91706						77,0856
Intrr =	5	%	p	0,50244				70,692	/	27,0856
DT =	152	days	q	0,49756		64,829	/	20,9	\	64,8294
N =	5			59,4527	/	15,244	\	59,453	/	14,8294
disk =	0,99584	54,522	/	10,5779	\	54,522	/	9,6605	\	54,5219
50	/	7,0469	\	50	/	5,9547	\	50	/	4,52187
4,5427	\	45,853	/	3,54035	\	45,853	/	2,2625	\	45,8532
Delta	0,57619	2,0521	\	42,0503	/	1,1321	\	42,05	/	0
Gamma	0,04257			0,56642	\	38,563	/	0	\	38,5627
Theta	-0,01649					0	\	35,364	/	0
								0	\	32,4315
										0

Exempel 2. Europeisk säljoption

I detta exempel studerar vi motsvarande europeisk säljoption med aktiepris 50 kr, lösenpris 50 kr (d.v.s. en parioption) med volatiliteten 30%, riskfria räntan 5 % och tid till lösen 5 månader (152 dagar).

Stock =	50	Kr	dt	0,08329					
Strike =	50	Kr	u	1,09044					
Vola. =	30	%	d	0,91706					77,0856
Intrr =	5	%	p	0,50244				70,692 /	0
DT =	152	days	q	0,49756			64,829 /	0 \	64,8294
N =	5					59,4527 /	0 \	59,453 /	0
disk =	0,99584				54,522 /	0,50447 \	54,522 /	0 \	54,5219
	50 /				1,699 \	50 /	1,0181 \	50 /	0
	3,51237 \				45,853 /	2,91958 \	45,853 /	2,0547 \	45,8532
Delta	-0,42381				5,3729 \	42,0503 /	4,8642 \	42,05 /	4,14684
Gamma	0,04257					7,8954 \	38,563 /	7,742 \	38,5627
Theta	-0,00975						11,023 \	35,364 /	11,4373
								14,428 \	32,4315
									17,5685

Exempel 3. Amerikansk köpoption

I detta exempel studerar vi motsvarande amerikanska köpoption med aktiepris 50 kr, lösenpris 50 kr (d.v.s. en parioption) med volatiliteten 30%, riskfria räntan 5 % och tid till lösen 5 månader (152 dagar). Vi ser att värdena är de samma som för den europeiska.

Stock =	50	Kr	dt	0,08329					
Strike =	50	Kr	u	1,09044					
Vola. =	30	%	d	0,91706					77,0856
Intrr =	5	%	p	0,50244				70,692 /	27,0856
DT =	152	days	q	0,49756			64,829 /	20,9 \	64,8294
N =	5					59,4527 /	15,244 \	59,453 /	14,8294
disk =	0,99584				54,522 /	10,5779 \	54,522 /	9,6605 \	54,5219
	50 /				7,0469 \	50 /	5,9547 \	50 /	4,52187
	4,5427 \				45,853 /	3,54035 \	45,853 /	2,2625 \	45,8532
Delta	0,57619				2,0521 \	42,0503 /	1,1321 \	42,05 /	0
Gamma	0,04257					0,56642 \	38,563 /	0 \	38,5627
Theta	-0,01649						0 \	35,364 /	0
								0 \	32,4315
									0

Exempel 4. Amerikansk säljoption

I detta exempel studerar vi motsvarande amerikanska säljoption med aktiepris 50 kr, lösenpris 50 kr (d.v.s. en parioption) med volatiliteten 30%, riskfria räntan 5 % och tid till lösen 5 månader (152 dagar). Observera att värdena skiljer sig från den europeiska. En amerikans är alltid värd mer än en europeisk eftersom vi kan lösa in den när vi vill.

Stock =	50	Kr	dt	0,08329			
Strike =	50	Kr	u	1,09044			
Vola. =	30	%	d	0,91706			77,0856
Intrr =	5	%	p	0,50244		70,692 /	0
DT =	152	days	q	0,49756	64,829 /	0 \	64,8294
N =	5			59,4527 /	0 \	59,453 /	0
disk =	0,99584	54,522 /		0,50447 \	54,522 /	0 \	54,5219
	50 /	1,7243 \		50 /	1,0181 \	50 /	0
	3,60076 \	45,853 /		2,9706 \	45,853 /	2,0547 \	45,8532
Delta	-0,43853	5,5258 \		42,0503 /	4,9671 \	42,05 /	4,14684
Gamma	0,04493			8,1524 \	38,563 /	7,9497 \	38,5627
Theta	-0,01036				11,437 \	35,364 /	11,4373
						14,636 \	32,4315
							17,5685

Andra binomialmodeller

Skillnaden mellan olika binomialmodeller ligger i hur man bestämmer faktorerna *u* och *d* samt de sannolikheter man tilldelar upp och nedgångar.

Cox-Ross-Rubensteins modell

Detta är den ovan beskrivna modellen, vilken är den vanligast förekommande

$$\begin{cases} u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} \\ d = 1/u = e^{-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

$$p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

Exakt Cox-Ross-Rubenstein

Detta är en variant på modellen ovan. Den ger ungefär samma resultat. Då man inte ökar noggrannheten nämnvärt utan bara gör något fler beräkningar rekommenderar jag den vanliga CCR före denna. Men, eftersom den förekommer i litteraturen ger jag även denna.

$$\begin{cases} u = \dfrac{a^2 + b^2 + 1 + \sqrt{\left(a^2 + b^2 + 1\right)^2 - 4a^2}}{2a} \\ d = 1/u \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = e^{r \cdot \Delta t} \\ b^2 = a^2 \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot \Delta t} - 1\right) \end{cases}$$

$$p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

<u>Jarrow-Rudds modell</u>

Även denna är som man förstå, en variant, utökning av CRR. Den har ett liknande beteende som de båda ovan

$$\begin{cases} u = e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

$$p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

<u>TIANs modell</u>

Denna modell erhålls om man även tar hänsyn till andra ordningens moment. Därför ger denna något bättre noggrannhet.

$$\begin{cases} u = \dfrac{M \cdot V}{2}\left[V + 1 + \sqrt{V^2 + 2V - 3}\right] \\ d = \dfrac{M \cdot V}{2}\left[V + 1 - \sqrt{V^2 + 2V - 3}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = e^{r \cdot \Delta t} \\ V = e^{\sigma^2 \cdot \Delta t} \end{cases}$$

$$p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

Tigoris modell

I denna modellen studerar man logaritmen av priset i stället för priset självt. På så sätt får man addera termer i stället för att multiplicera med u och d. Därför adderar vi med $u = dx$ och subtrahera med $d = -dx$.

$$\begin{cases} dx = \sqrt{\sigma^2 \Delta t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \cdot (\Delta t)^2} \\ p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\frac{dx}{\Delta t} \end{cases}$$

Leisen Rremiers modell

Denna modell har en betydande fördel. Denna konvergerar kvadratiskt i stället för linjärt i tidssteget. Dessutom har denna inte samma oscillationer som modellerna ovan. Därför kan man även Richardsonextrapolera för att ytterligare förbättra noggrannheten.

$$a = e^{r \cdot \Delta t}$$

$$d1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \cdot (T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$p = B(d2, N)$$

$$\overline{p} = B(d2 + \sigma \cdot \sqrt{T-t}, N)$$

Där B är inversen av binomialfördelningen och N antal förfiningar. Vi använder Peizer-Pratt metod [$j + ½ = n - (j + ½)$, $n = 2j + 1$]:

$$p = B(z,n) = \frac{1}{2} \mp \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \exp\left\{ -\left(\frac{z}{n + 1/3} \right)^2 \cdot \left(n + \frac{1}{6} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Vi har då

$$\begin{cases} u = a \cdot \dfrac{\overline{p}}{p} \\ d = a \cdot \dfrac{1-\overline{p}}{1-p} \end{cases}$$

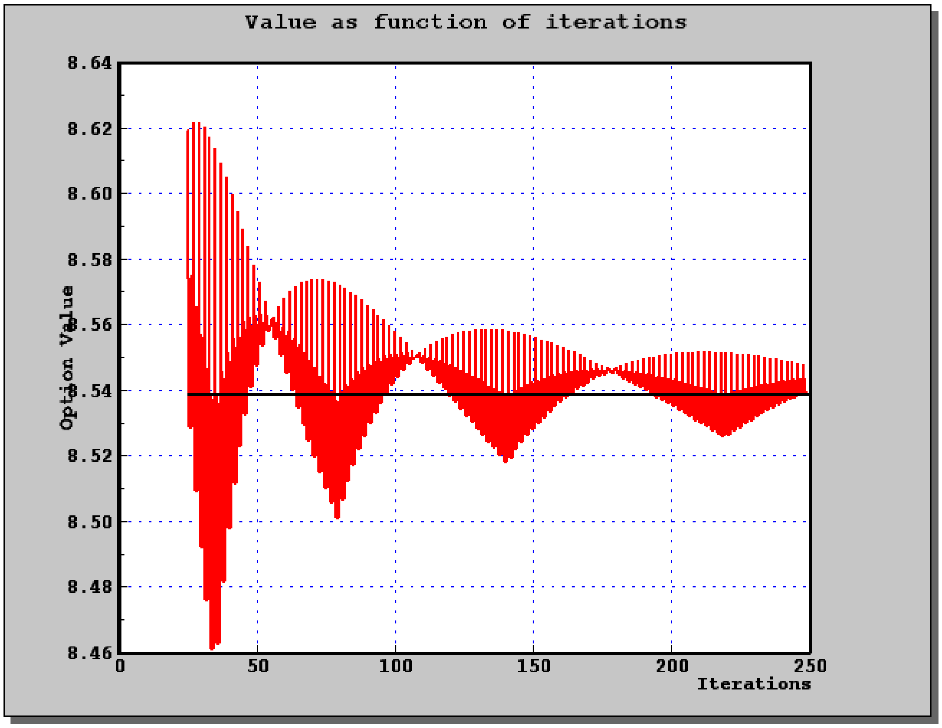
Denna model (med inversen ovan) fungerar bara för träd med udda antal steg. Denna metod är mindre känd än de övriga, men överlägsen dem alla. Experiment visar att man kanske inte bör använda Richardsonextrapolation för amerikanska säljoptioner. Orsaken är att trädet modifieras p g a villkoret för förtida lösen utnyttjas.

Det går att minska oscillationerna även i de andra modellerna, dock får man inte samma fina konvergens som med Leisen-Reimers modell. Oscillationerna kan minska om man i de näst sista noderna i trädet byter de optionsvärden som ligger närmast lösenpriset med det värdet man för vid samma tid med Black-Scholes analytiska formel.

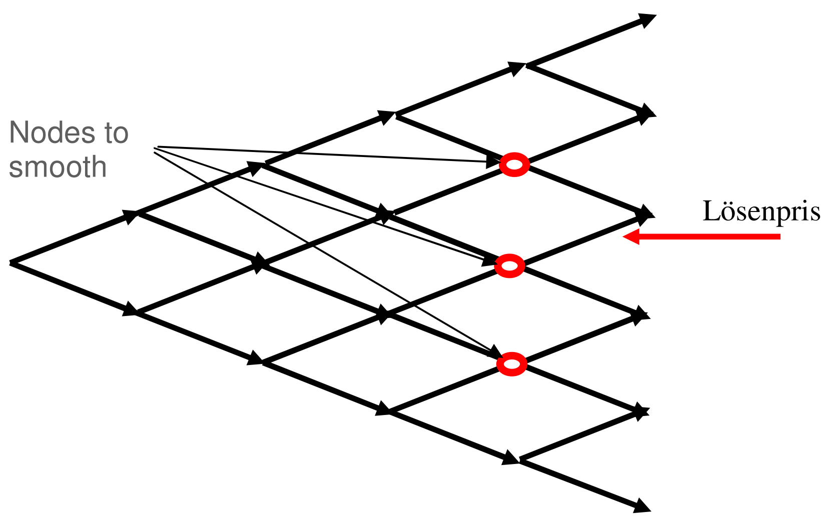
För att visa hur överlägsen Leisen-Rimer-modellen är jämfört med Cox-Ross-Rubenstein's ska vi studera följande exempel:

Input (Amerikans köpoption):
- Underliggande pris: 100
- Lösenpris: 110
- Löptid 0.5
- Ränta 6 %
- Volatilitet: 40 %
- Antal tidssteg [25, 250]

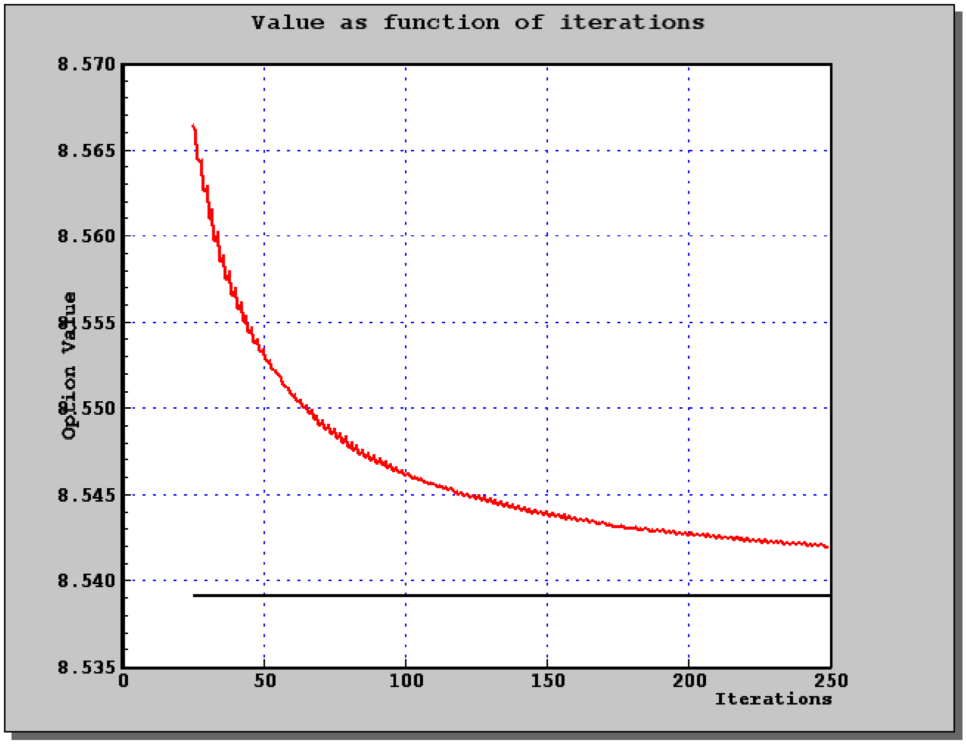
Med en vanlig CRR får vi följande resultat:



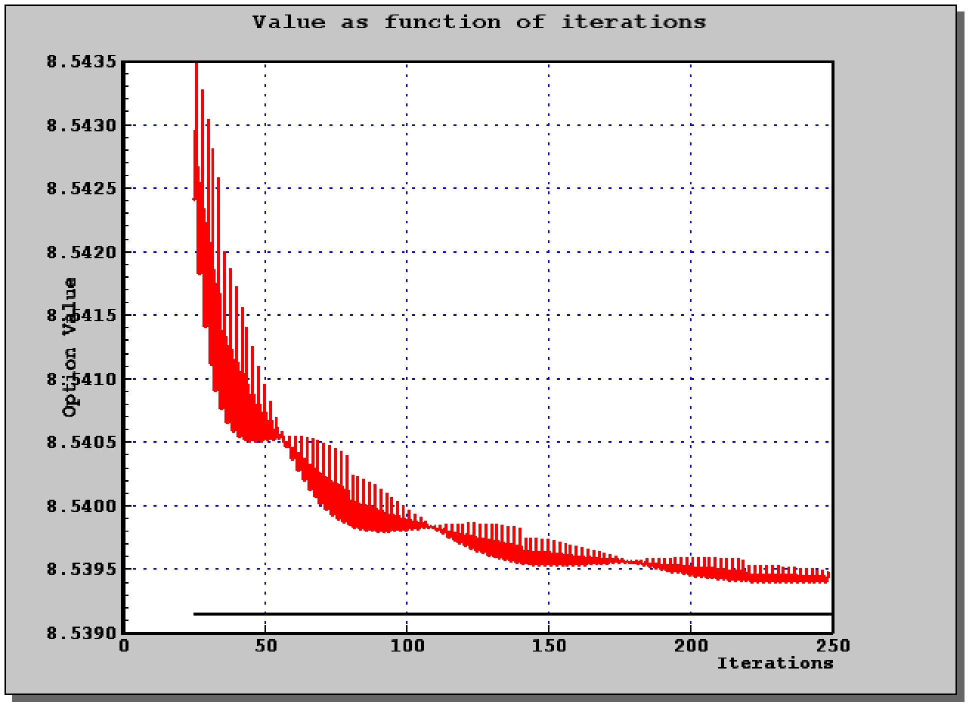
Ett ofta förekommande matematiskt knep för att eliminera oscillationerna och öka noggrannheten är att göra en så kallad Black-Scholes-Smoothing. Detta sker genom att man approximera tre noder närmast lösenpriset i näst sista tidssteget med Black-Scholes.



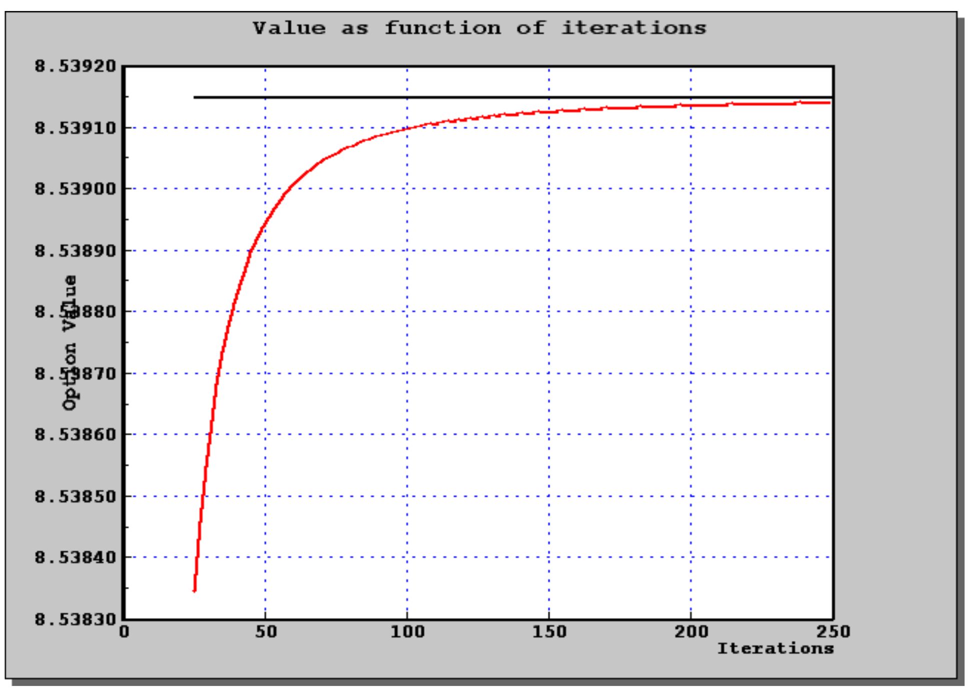
I noderna ovan approximera man optionsvärdet med Black-Scholes formel. Därmed får man följande konvergens:



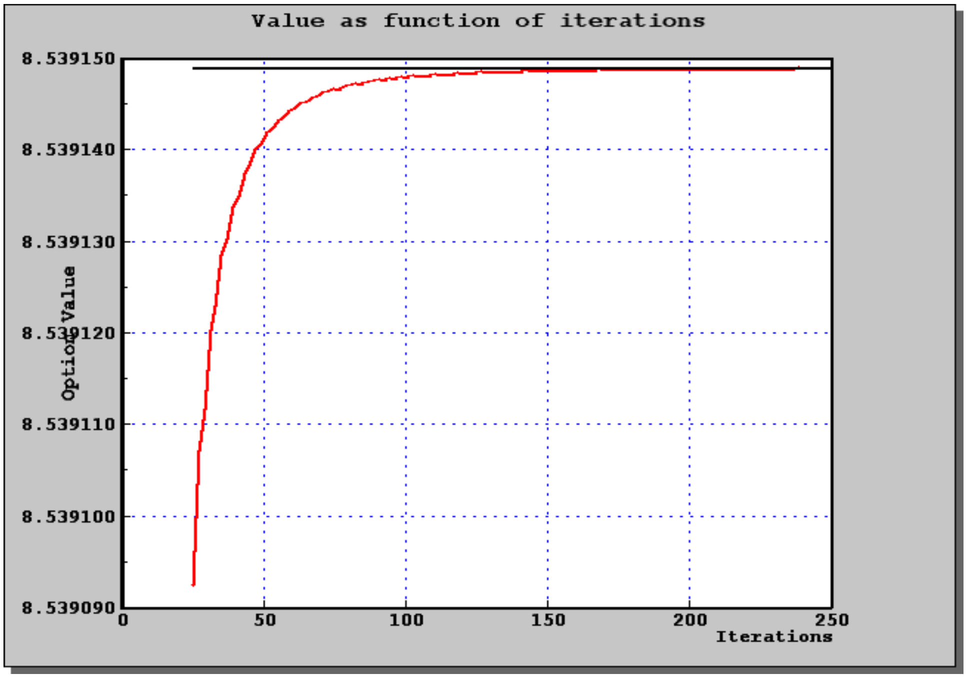
På grund av den snyggare konvergensen (inga oscillationer) kan man öka noggrannheten ytterligare genom att Richardsonextrapolera. Då erhålls:



Motsvarande för Liemer-Reisen (ingen smoothing) med och utan Richardsonextrapolation:



respektive



Value as function of iterations
8.539150
8.539140
8.539130
8.539120
8.539110
8.539100
8.539090
Option Value
0
50
100
150
200
250
Iterations

STRATEGIER

Genom att kombinera olika optioner kan man bilda (oändligt) många olika strategier. Valet av strategi gör man på den marknadstro man har. Vi skall här gå igenom de viktigaste. Med hjälp av optionsstrategier kan man:

- Till en läge kostnad etablera positioner.
- Få högre avkastning på en given marknadstro.
- Få en lägre risk vid fel marknadstro.
- Lättare följa upp positionen vid en felaktig marknadstro.

Då man handlar med optioner gäller det att ha en klar strategi redan från start. Därefter måste man kontinuerligt följa marknaden för att följa upp sin strategi och realisera den vinst man kan. Det är vanligt bland nybörjare och amatörer, att i början sitta för länge på sina optioner. Antag exempelvis att vi köpt en köpoption på Ericsson. Om då aktien går upp är det oftare bäst att realisera vinsten genom att sälja optionen. Därefter kan man ta en ny position och köpa till ett högre lösenpris, och en senare lösenmånad (om man tror på fortsatt uppgång). På så sätt låser man in den vinst man radan gjort, men kan fortsätta att tjäna pengar på sin marknadstro.

Vi kommer att använda oss av följande beteckningar för att lättare klassificera de olika strategierna:

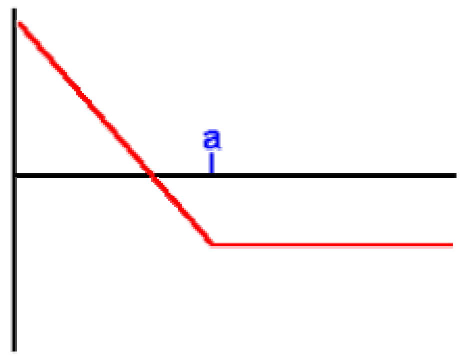
Siffror –1, 0, 1	Lutning på resultatkurvan,
*	om det ingår ett innehav av aktien i strategin och
+, -	lutning på resultatkurvan har om denna inte är styckevis konstant.

Vi ska studera fyra olika typer av marknader, uppåtgående, (bullish) nedåtgående, (bearish) neutral och volatil. Orsaken är att olika strategier används vid olika marknadssituationer.

Många har kanske undrar varför man kallar en uppåtgående marknad för bullish och en nedåtgående för bearish. Dessa uttryck kommer från Merryl Lynch där någon liknade dessa vid en tjur och en björn då dessa slåss. En tjur slåss med hornen underifrån och uppåt, medan en björn slår uppifrån och ner.

SJUNKANDE MARKNAD (baisse) / BEARISH

<u>Köpt säljoption / Bought put / Long put -- [-1 0]</u>



Marknadstro
Investeraren tror på en signifikant nedgång på kort sikt.

Konstruktion
Köp en säljoption med lösenpris a. Ju större nedgång, desto lägre lösenpris kan användas då dessa optioner är billigare. Stämmer strategin ger optioner med lägre lösenprins (och pris) högre procentuell avkastning.

Maximal vinst
Nästan obegränsad om avistapriset blir riktigt lågt.

Break-even
Lösenpris för optionen - premien.

Förlustrisk
Begränsad till premien, om vid utgång avistapriset är större än a.

Säkerhetskrav
Inget.

Kommentar
Om avistapriset inte ändras sjunker värdet med tiden eftersom tidsvärdet minskar.

Varför
1. Få avkastning i en nedåtgående marknad.
2. Skydda en kursvinst i den underliggande varan.
3. Minska risken med ett innehav.

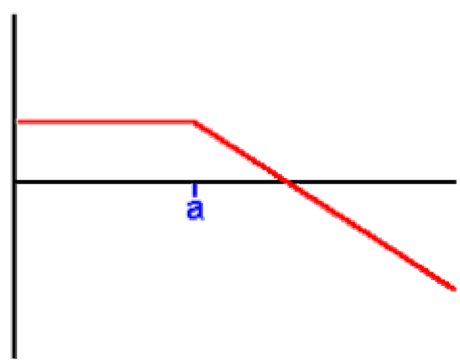
Uppföljning
Vid uppgång:

- Bilda prisspread, positiv eller negativ
- Skifta till ett högre lösenpris. På så sätt låser man den vinsten man redan har.
- Köp terminen. Man tar då en risk, men man kan köpa aktien billigt. Kräver bevakning.

Vid nedgång:

- Bilda en prisspread på högre nivå.
- Bilda en ratiospread.
- Bilda en sned syntet.

<u>Såld köpoption / Written call / Short call -- [0 –1]</u>



Marknadstro
Investeraren tror på att marknaden inte kommer att gå upp, men det är osäkert hur stor nedgången blir.

Konstruktion
Sälj en köpoption med lösenpris a. Om investeraren är övertygad om sin strategi säljer han/hon parioptioner och vid lite osäkerhet säljs minusoptioner, dvs med lösenpris högre än nuvarande avistapris.

Maximal vinst
Begränsad till premien, om avistapriset vid utgång är lägre än lösenpriset.

Break-even
Lösenpris för optionen - premien.

Förlustrisk
Obegränsad om avistapriset går upp kraftigt.

Säkerhetskrav
Krävs alltid

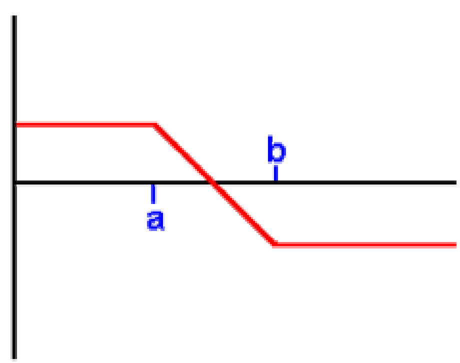
Kommentar
Om avistapriset inte ändras sjunker värdet med tiden eftersom tidsvärdet minskar.

Varför
1. Få avkastning i en stillastående eller fallande marknad.
2. Öka avkastningen i en svagt stigande marknad.
3. Få kompensation för ett befarat kursfall.
4. Fixera en tillfredsställande säljkurs om man äger avistan.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Bilda prisspread, positiv eller negativ.
- Bilda en tidsspread.

Vid nedgång:
- Rulla till ett högre lösenpris – utfärda eventuellt även en säljoption.
- Köp aktien eller terminen.
- Rulla till ett högre lösenpris nästa månad.

<u>Negativ prisspread / Bear spread / Bais-spread -- [0 –1 0]</u>



Marknadstro
Investeraren är tämligen säker på att marknaden inte kommer att gå upp, men osäker på hur stor nedgången blir. Därför vill han minimera risken för en eventuell uppgång. Detta

är en konservativ strategi när man mer tror på en nedgång än en uppgång. (Begränsad negativ).

Konstruktion
Utfärda en köpoption med lösenpriset a och köp en annan köpoption med ett högre lösenpris b så att man nettointäkt.
eller
Utfärda en säljoption med lösenpriset a och köp en annan säljoption med lösenpris b så att man netto får en utgift.

Maximal vinst
Begränsad i båda fallen:
Köpoptioner: Nettokostnaden.
Säljoptioner: Skillnaden mellan lösenprisen minus premien.
Maximal vinst fås då underliggande ligger under nedre lösenpriset, a.

Break-even
Lösenpris för den innehavda optionen - premien.

Förlustrisk
Begränsad i båda fallen:
Köpoptioner: Skillnaden mellan lösenpriserna minus premien.
Säljoptioner: Nettointäkten.
Maximal förlust fås då underliggande ligger över övre lösenpriset, b.

Säkerhetskrav
Möjligt att kvitta säkerhetskravet.

Kommentar
Tidsvärdet spelar liten roll p.g.a. att positionen är balanserad. Som vi ser i figuren är den maximala förlusten begränsad, så även vinsten. Den maximala förlusten minskar på bekostnad av maximala vinsten. Om en negativ prisspread lyckas och man tror på vidare nedgång kan man låta den rulla positionerna på motsvarande sätt som för en positiv prisspread. Då förlänger man uppgången av parioptionen. Vid uppgång kan man sälja de innehavda. Man kan också utfärda fler säljoptioner. Denna position kräver mindre rörelse i avistan än köpt säljoption och har lägre breakeven. Vanligtvis har en sådan strategi en maximal vinst på mellan 75 och 150% på satsat kapital.

Varför
1. Ger högre sannolikhet till vinst än köpt säljoption.
2. Kräver mindre rörelse i underliggande aktie än köpt säljoption
3. Man kan köpa fler kontrakt säljoptioner än naket köp av säljoptioner.

Uppföljning
Vid nedgång

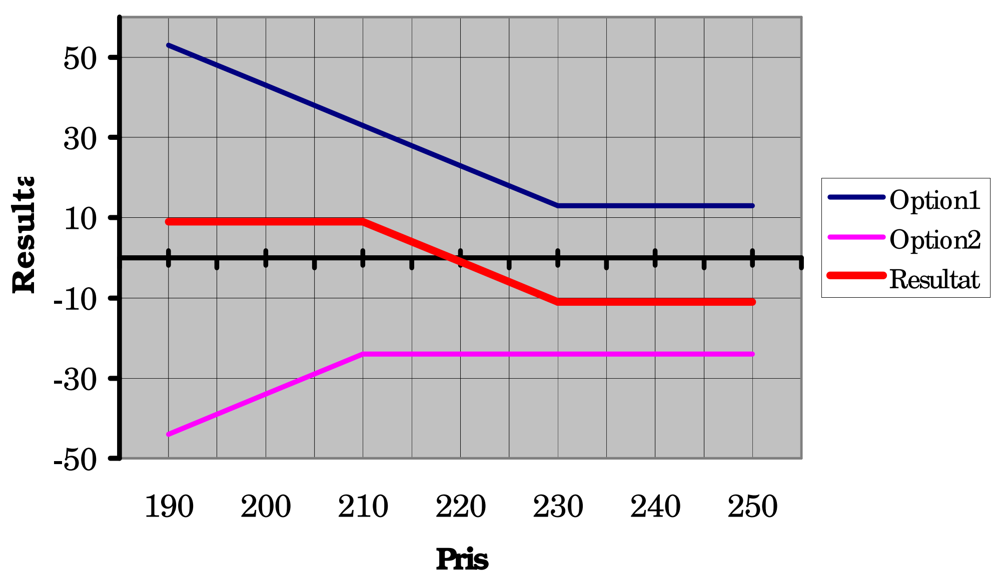
- Rulla prisspreaden till ett lägre lösenpris

Vid uppgång

- Utfärda fler säljoptioner och bilda en ratiospread eller stege.
- Utfärda köpoption för att kompensera den initiala kostnaden och bilda en trebening.

<u>Exempel: Med säljoptioner</u>
Avistapris: 219 kr
Köp en säljoption med ett lösenpris på 210 kr till en kostnad av 13 kr.
Utfärda samtidigt en säljoption med lösenpris 230 kr med en inkomst på 24 kr.
Vår nettokostnad blir från start då 11 kr.

Avistakurs	Option1	Option2	Resultat
190	53	-44	9
200	43	-34	9
210	33	-24	9
220	23	-24	-1
230	13	-24	-11
240	13	-24	-11
250	13	-24	-11



På grund av den låga nettokostnaden krävs bara en liten kursrörelse för vinst. Redan en aktiekurs som understiger 219 kronor går med vinst. Hade man enbart köpt säljoptioner med lösen 230 hade breakeven legat på 206 kr. Den maximala vinsten på 9 kronor erhålls om kursen ligger på eller under 210 kronor. Detta motsvarar 82 % under perioden, avsevärt mer per årsbasis. Om positionen tas i samband med ett innehav av underliggande, är negativ prisspread en strategi för att avlägga en del av risken i en kursnedgång i dessa.

Diagonal spread / Tidsspread -- [+ -]

Marknadstro
Investeraren tror på en svag marknad till en början, men med en stark nedgång längre fram.

Konstruktion
Utfärda en säljoption med kort datum och köp en minusoption (säljoption) med långt datum.

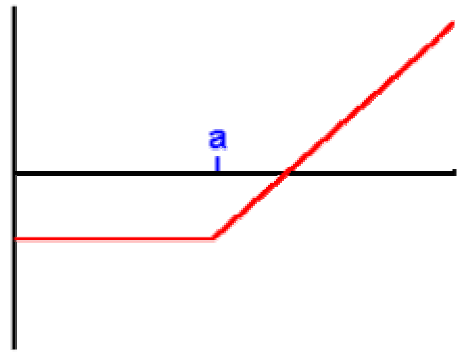
Maximal vinst
Stor, om den köpta optionen finns kvar då den utfärdade har expirerat. Om positionen stängs då den utfärdade optionen förfaller, fås maximal vinst om denna då är i pari.

Förlustrisk
Begränsad till skillnaden i lösenpris +/- initial förtjänst/kostnad när man går in i positionen.

Säkerhetskrav
Ja, men begränsad p.g.a. kvittning.

Kommentar
Det finns en risk att den utfärdade optionen exciseras.

Put Hedge / Protective Put (Hold stock by put) = Syntetisk köpoption -- [0 1 *]



Marknadstro
Investeraren har aktier och är orolig för att marknaden skall falla. Därför köper han/hon säljoptioner för att skydda sitt innehav för en eventuell nedgång och på så sätt låsa in sin vinst. Samtidigt behålls aktierna så att man kan vinna på en fortsatt uppgång. (Starkt negativ tro.)

Konstruktion
Köp säljoptioner med lösenpris a. Antalet bestäms av antalet innehavda aktier och på hur mycket nedgång man befarar.

Maximal vinst
Obegränsad. Vinst på aktien minus premien för optionerna.

Break-even
Avistakursen - premien

Förlustrisk
Begränsad. Optionerna skyddar aktierna vid en nedgång.
Maximal förlust; Aktiekurs – lösenpris + premien.

Säkerhetskrav
Inget

Kommentar
Man kan här använda sig av delta för att beräkna antalet optioner för att vara delta-neutral. Köper man parioptioner är delta = 0.5 och man skall då köpa dubbelt så många optioner som man har aktier för att vara neutral. Vid förändring kan man utfärda köpoptioner med högre lösenpris.

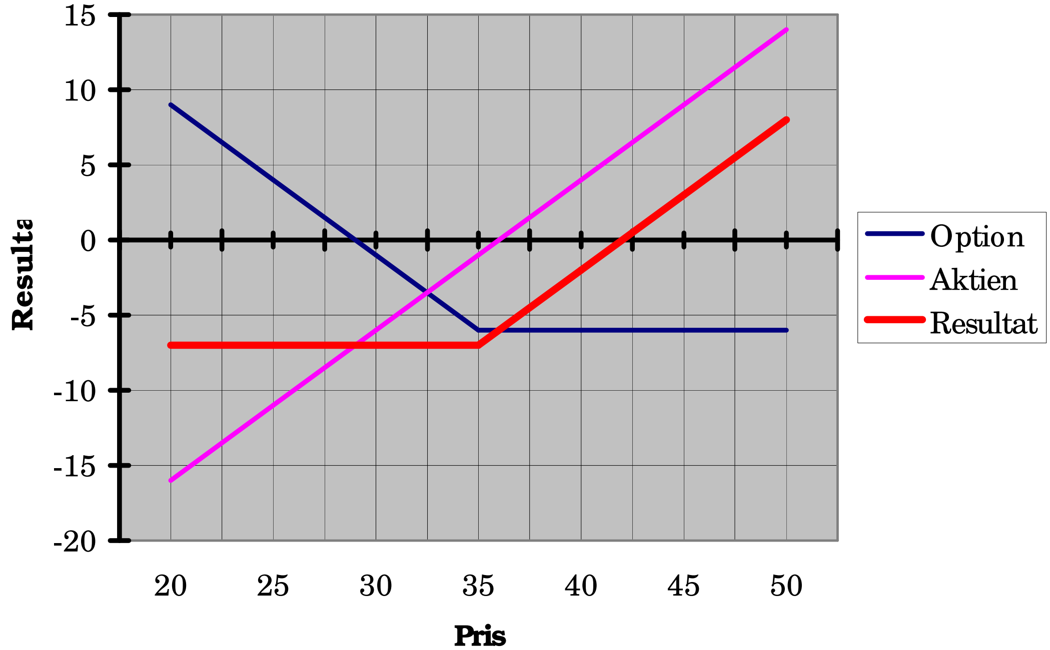
Varför
Skydda, hedga sina aktier, d.v.s. låser in den vinst man har och man minskar risken med att äga aktien.

Uppföljning
Vid vinst:
- Utfärda köpoption på högre nivå för att kompensera kostnaden.
- Utfärda köpoption och flytta säljoptionen till ett högre lösenpris för att på så sätt låsa in vinsten.

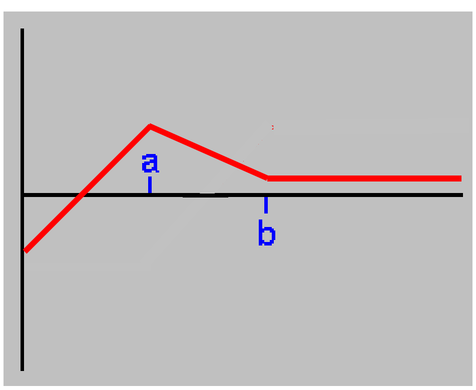
Vid förlust:
- Utfärda köpoption för att kompensera kostnaden = Fence (positiv prisspread). Om du tror på en vändning säljer du säljoptionen och köper fler aktier på den nya lägre nivån.

<u>Exempel:</u>
Avistapris: 36 kr.
Köp en säljoption med lösenpris på 35 kr med en optionspremie på 6 kr.

Avistakurs	Option	Aktien	Resultat
20	9	-16	-7
25	4	-11	-7
30	-1	-6	-7
35	-6	-1	-7
40	-6	4	-2
45	-6	9	3
50	-6	14	8



Ratiospread med säljoptioner -- [1 –1 0]



Marknadstro
En ratiospread med säljoptioner gör man när man vill få avkastning på en måttlig nedgång.

Konstruktion
Köp säljoptioner med ett högre lösenpris b och utfärda fler säljoptioner med ett lägre lösenpris a.

Maximal vinst
Begränsad. Skillnaden mellan lösenpriserna plus/minus nettointäkt/nettokostnad för optionerna. Maximal vinst fås vid det lägre lösenpriset.

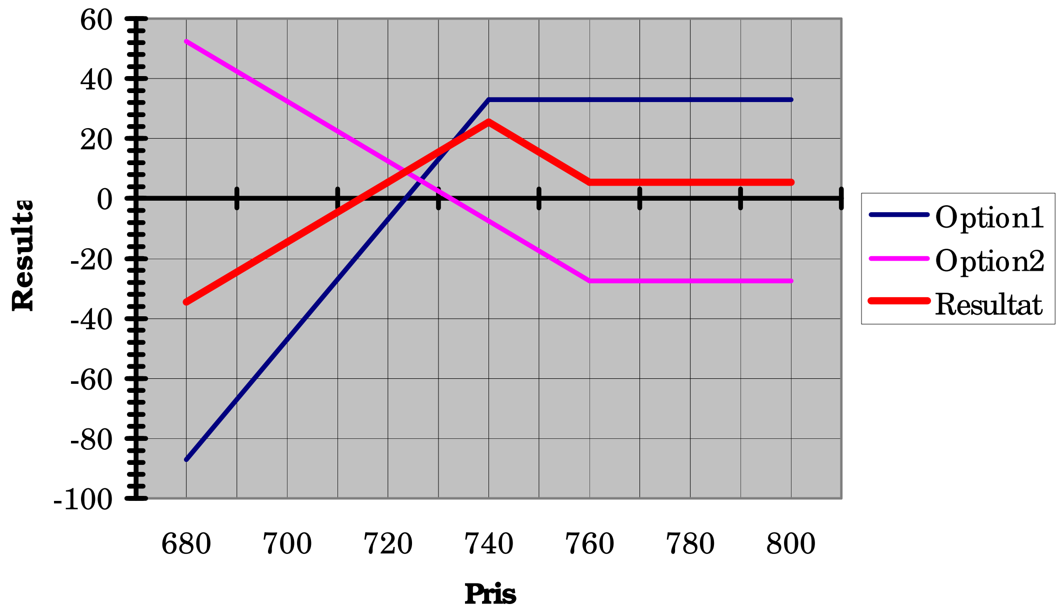
Förlustrisk
Obegränsad. Strategin ger förlust vid kraftiga nedgångar i underliggande.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

Kommentar
Strategin kräver noggrann bevakning.

Exempel:
Avistapris: 761 kr.
Utfärda två säljoptioner med lösenpris 740 kr med en total premie på 33 kr.
Köp en säljoption med lösenpris på 760 kr. Utgift: 27.50 kr. Nettointäkt rån start: 5.50 kr.

Avistakurs	Option1	Option2	Resultat
680	-87	52,5	-34,5
700	-47	32,5	-14,5
720	-7	12,5	5,5
740	33	-7,5	25,5
760	33	-27,5	5,5
780	33	-27,5	5,5
800	33	-27,5	5,5



Vi ser att vi gör en vinst om underliggande går ner något, ligger stilla eller går upp. Men vi riskerar att förlora mycket om underliggande rasar.

Negativt Backspread -- [-1 1 0]

Backspread är det gemensamma namnet då man har fler innehavda optioner än ställda. Köper man ett ben till får man så kallade stegar och trappor.

Marknadstro
Investeraren tror på en nedgång av aktien, men vill ha ett mycket gott skydd vid en stigande marknad.

Konstruktion
Utfärda säljoptioner med ett högre lösenpris och köp dubbelt så många med högre lösenpris och samma slutmånad.

Maximal vinst
Obegränsad.

Förlustrisk
Begränsad till skillnaden mellan lösenpriserna + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter.

Breakeven
Det lägre lösenpriset + skillnaden mellan lösenpriserna + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter.

Säkerhetskrav
Mycket begränsat.

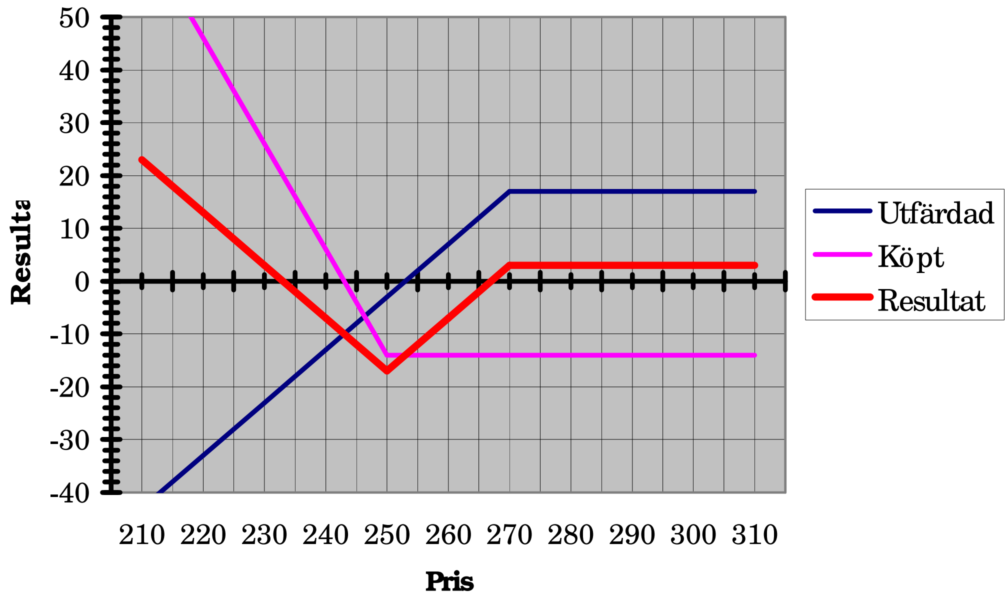
Varför
1. Ger lägre förlust vid uppgång jämfört med att köpa säljoptioner.
2. Ger lägre förlust vid uppgång jämfört med en trebening.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Utfärda till ett lägre lösenpris och köp tillbaka den utfärdade säljoptionen.
- Köp aktien på termin.

Vid nedgång:
- Utfärda säljoptioner på ett lägre lösenpris och köpoptioner på ett högre.
- Utfärda säljoptioner på ett lägre lösenpris med längre löptid.

Exempel:
Avistapris: 270 kr.
Utförda en säljoption med lösenpris på 270 kr. Vi får en inkomst på 17 kr.
Köp två säljoptioner med lösenpris på 250 kr för 7 kr/styck. Nettointäkten blir då 3 kr.

Avistakurs	Utfärdad	Köpt	Resultat
210	-43	66	23
220	-33	46	13
230	-23	26	3
240	-13	6	-7
250	-3	-14	-17
260	7	-14	-7
270	17	-14	3
280	17	-14	3
290	17	-14	3
300	17	-14	3
310	17	-14	3



Negativ Trebening -- [-1 0 –1 0]

Marknadstro
Investeraren tror på en stark nedgång av aktien, men vill samtidigt ha ett mycket bra skydd vid en nedgång.

Konstruktion
Utfärda köpoptioner med ett lägre lösenpris, köp köpoptioner med ett högre och använd intäkten till att köpa säljoptioner.

Maximal vinst
Obegränsad.

Förlustrisk
Begränsad. Maximal förlust: Skillnaden mellan lösenpriserna på köpoptionerna plus en eventuell nettokostnad eller minus en eventuell nettointäkt.

Breakeven
Uppåt: Säljoptionens lösenpris - eventuell kostnad.
Nedåt: Det lägre lösenpriset på köpoptionen + eventuell intäkt.

Säkerhetskrav
Begränsat.

Varför

1. Positionen ger en lägre kostnad än att köpa säljoptionen och därmed lägre breakeven.
2. Positionen ger ingen förlust vid begränsad nedgång som backspreaden ovan.

Uppföljning

Vid vinst:

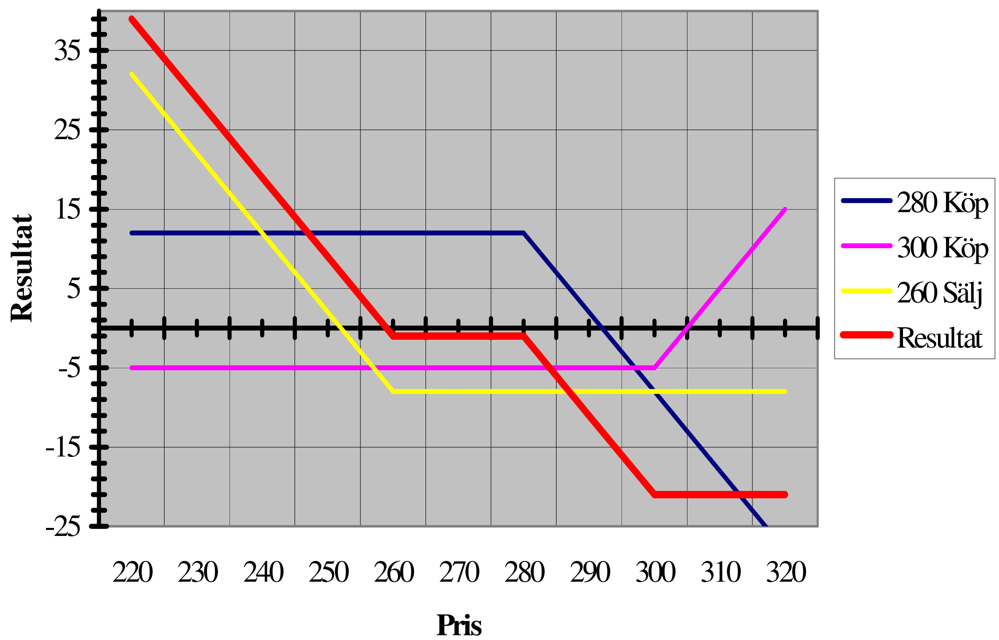
- Utfärda säljoption på ett lägre nivå och använd intäkten till att stänga den negativa prisspreaden.
- Rulla den innehavda säljoptionen till ett lägre lösenpris och använd intäkten till att stänga den negativa prisspreaden.

Vid förlust:

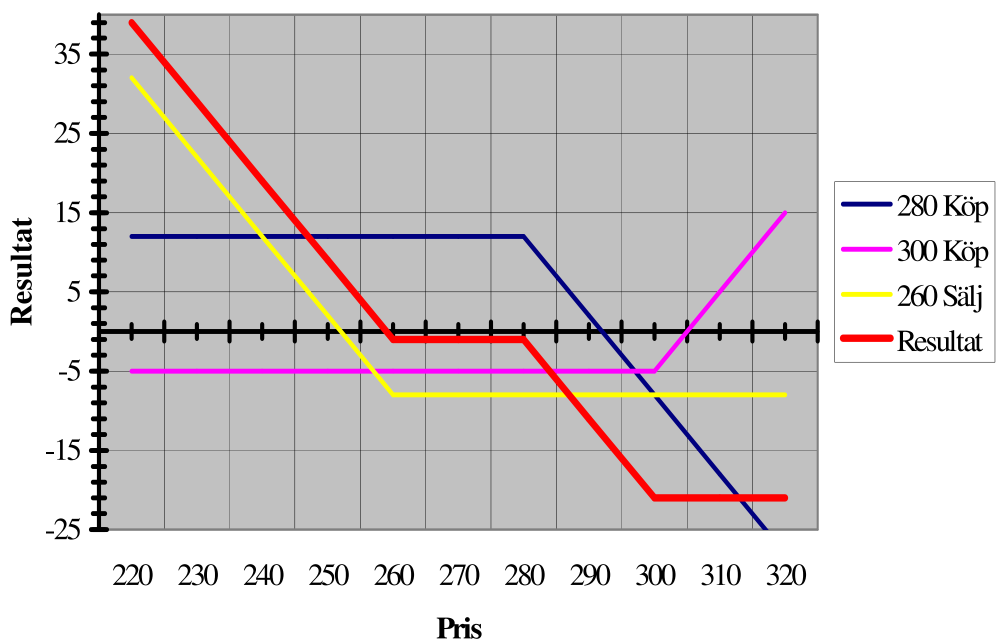
- Sälj den innehavda köpoptionen och rulla den utfärdade till ett högre lösenpris.
- Sälj den innehavda säljoptionen och bilda en prisspread på en lägre nivå.

<u>Exempel:</u>
Avistapris: 290 kr.
Utfärda en köpoption med lösenpris på 280 kr och vi får en inkomst på 12 kr.
Köp en köpoption med lösenpris på 300 kr till priset av 5,00 kr och en säljoption med lösenpris på 260 kr till priset av 8,00 kr. Nettokostnaden blir -1,00 kr.

Avistakurs	280 Köp	300 Köp	260 Sälj	Resultat
220	12	-5	32	39
230	12	-5	22	29
240	12	-5	12	19
250	12	-5	2	9
260	12	-5	-8	-1
270	12	-5	-8	-1
280	12	-5	-8	-1
290	2	-5	-8	-11
300	-8	-5	-8	-21
310	-18	5	-8	-21
320	-28	15	-8	-21



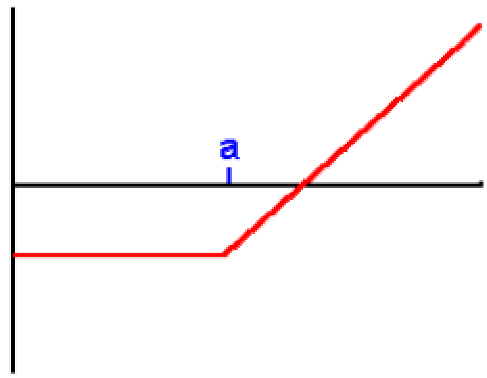
35
25
15
5
-5
-15
-25
Resultat
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
Pris
280 Köp
300 Köp
260 Sälj
Resultat



35
25
15
5
-5
-15
-25
Resultat
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
Pris
280 Köp
300 Köp
260 Sälj
Resultat

STIGANDE MARKNAD (hausse) / BULLISH

Köpt Köpoption / Bought Call / Long Call -- [0 1]



Marknadstro
Köparen tror på en betydande uppgång på kort sikt (Mycket positiv, Very bullish).

Konstruktion
Köp en köpoption med lösenpris a.

Maximal vinst
Obegränsad.

Break-even
Lösenpris + premien.

Förlustrisk
Kan förlora premien.

Säkerhetskrav
Inget.

Kommentar
Om kursen ligger stilla faller värdet av positionen p.g.a. fallande tidsvärde.

Varför

1. Uppnå en hävstångseffekt.
2. Mindre risk jämfört med att köpa underliggande vara.
3. Undvika binda kapital.
4. Försäkra sig om framtida aktieköp.
5. Sälja aktier och göra vinst samtidigt tjäna på fortsatt kursuppgång.

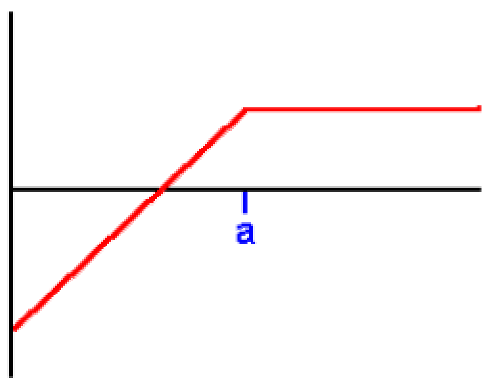
Uppföljning
Vid uppgång:

- Bilda prisspread, positiv eller negativ
- Skifta till ett högre lösenpris. På så sätt låser man den vinsten man redan har.
- Sälj terminen. Man tar då en risk, men man kan köpa aktien billigt. Kräver bevakning.

Vid nedgång:

- Bilda en prisspread på lägre nivå.
- Bilda en ratiospread.
- Bilda en sned syntet.

Utfärdad Säljoption / Written (sold) Put / Short Put -- [1 0]



Marknadstro
Utfärdaren är säker på att marknaden inte kommer att gå ner, men osäker på hur stor uppgången blir. (Positiv, Bullish).

Konstruktion
Sälj en säljoption med lösenpriset a. Tror man på en stor uppgång utfärdar man plusoptioner då dessa är dyrare. Plus-optionerna (put) har ett lösenpris lägre än nuvarande pris på underliggande.

Maximal vinst
Premien.

Break-even
Lösenpris – premien.

Förlustrisk
Värdet av underliggande – premien, dvs mycket stor vid kraftig nedgång eller konkurs.

Säkerhetskrav
Alltid.

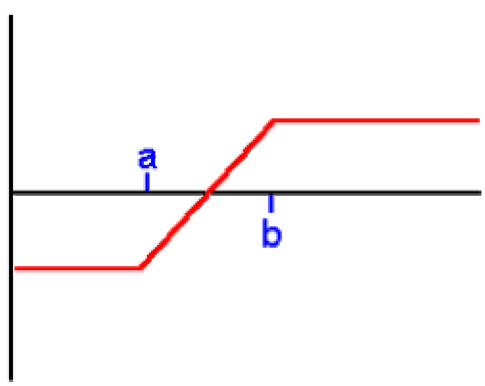
Kommentar
Om kursen ligger stilla hjälper detta positionen p.g.a. fallande tidsvärde.

Varför
1. Få avkastning i en stillastående eller svagt stigande marknad.
2. Planera aktieköp.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Bilda prisspread, positiv eller negativ
- Bilda en tidsspread.

Vid nedgång:
- Rulla till ett lägre lösenpris – utfärda eventuellt även en köpoption
- Blanka (sälj utan att äga) aktien eller sälj terminen.
- Rulla till ett lägre lösenpris nästa månad.

Positiv prisspread / Bull spread -- [0 1 0]



Marknadstro
Investeraren är tämligen säker på att marknaden inte kommer att gå ner, men osäker på hur stor uppgången blir. Därför vill han minimera risken för en eventuell nedgång. Detta är en konservativ strategi när man mer tror på en uppgång än en nedgång. (Begränsad positiv).

Konstruktion
Köp en köpoption (ofta parioption, at-the-money option) med lösenpriset a och utfärda en köpoption med ett högre lösenpris b (minusoption out-of-the-money option, denna har alltså ett negativt värde från start) så att man netto får en kostnad (net initial debit).
eller
Köp en säljoption med lösenpriset a och utfärda en säljoption med lösenpris b så att man netto får en intäkt (net initial credit).

Maximal vinst
Begränsad i båda fallen:
Köpoptioner: Skillnaden mellan lösenprisen minus premien (nettokostnaden).
Säljoptioner: Nettointäkten.
Maximal vinst fås då underliggande ligger över det övre lösenpriset, b. Den maximala vinsten varierar mellan 75 och 150% på satsat kapital.

Break-even
Lösenpris för den innehavda optionen + premien.

Förlustrisk
Begränsad i båda fallen:
Köpoptioner: Nettokostnaden.
Säljoptioner: Skillnaden mellan lösenprisen minus premien.
Maximal förlust fås då underliggande ligger under nedre lösenpriset, a.

Säkerhetskrav
Möjligt att kvitta säkerhetskravet (off-set).

Kommentar
Tidsvärdet spelar liten roll p.g.a. att positionen är balanserad. Som vi ser i figuren är den maximala förlusten begränsad, så även vinsten. Den maximala förlusten minskar på bekostnad av maximala vinsten. Samtidigt kan den totala vinsten bli större än med enbart en köpoption tack vare att vi erhåller en premie för den utfärdade köpoptionen. Om en positiv prisspread lyckas och man tror på vidare uppgång kan man låta den rulla genom att köpa tillbaka säljoptionen och köpa en ny med högre pris och på så sätt få ut mer. Då förlänger man uppgången av parioptionen. Vid nedgång kan man sälja de innehavda. Tänk på att det alltid gäller: <u>Köpa billigt och sälja dyrt</u>.

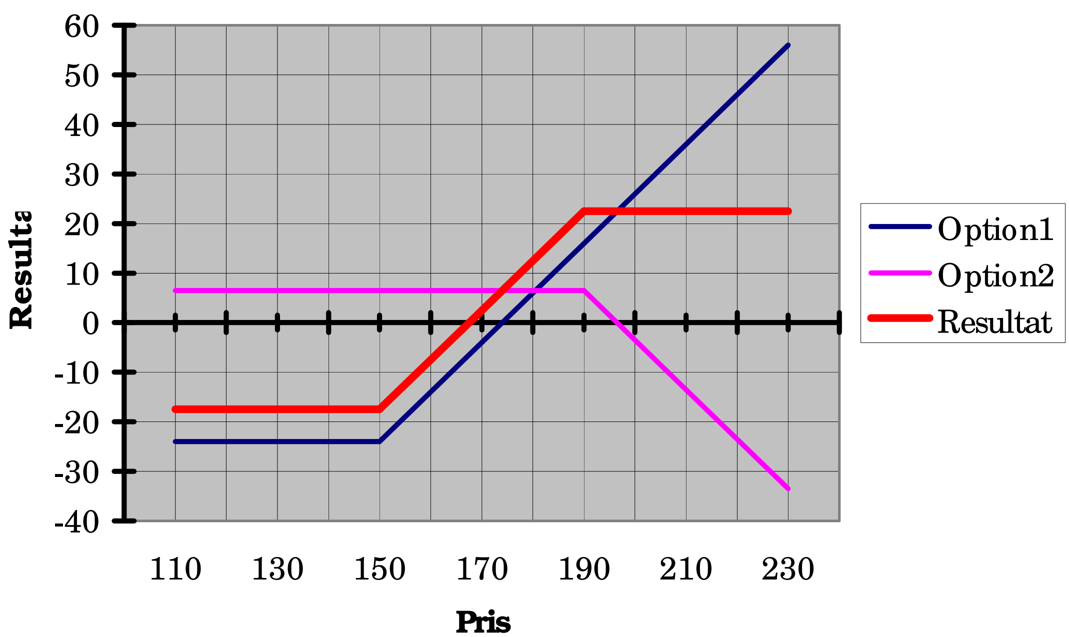
Varför
1. Få maximal avkastning på sin marknadstro.
2. Högre sannolikhet för vinst jämfört med att bara köpa köpoptionen, se figuren nedan.
3. Man kan köpa fler köpoptioner om man samtidigt utfärdar på en högre nivå.
4. Lättare att följa upp än en innehavd köpoption.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Rulla prisspreaden till ett högre lösenpris

Vid nedgång:
- Utfärda fler köpoptioner och bilda en ratiospread eller stege.
- Utfärda säljoptioner för att kompensera den initiala kostnaden.

Exempel:
Avistapris = 157
Optionspremie1 = 150 ==> utgift = –24 kr
Optionspremie2 = 190 ==> inkomst = 6.50 kr ==> Netto = -17.50 kr

Avistakurs	Köpoption	Säljoption	Resultat
110	-24	6,5	-17,5
130	-24	6,5	-17,5
150	-24	6,5	-17,5
170	-4	6,5	2,5
190	16	6,5	22,5
210	36	-13,5	22,5
230	56	-33,5	22,5



<u>Fence -- [0 1 0 *]</u>

Marknadstro
Investeraren är tämligen säker på att marknaden inte kommer att gå ner, men osäker på hur stor uppgången blir. Därför vill han minimera risken för en eventuell nedgång.

Konstruktion
Utfärda en köpoption köp en säljoption vid innehav av aktien.

Maximal vinst
Köpoptiones lösenprisen - aktiekursen + eventuell intäkt eller – eventuell kostnad.

Break-even
Aktiekurs + eventuell kostnad eller – eventuell intäkt.

Förlustrisk
Begränsad:
Aktiekurs - säljoptionens lösenpris + eventuell kostnad eller – eventuell intäkt.

Säkerhetskrav
Möjligt att kvitta säkerhetskravet.

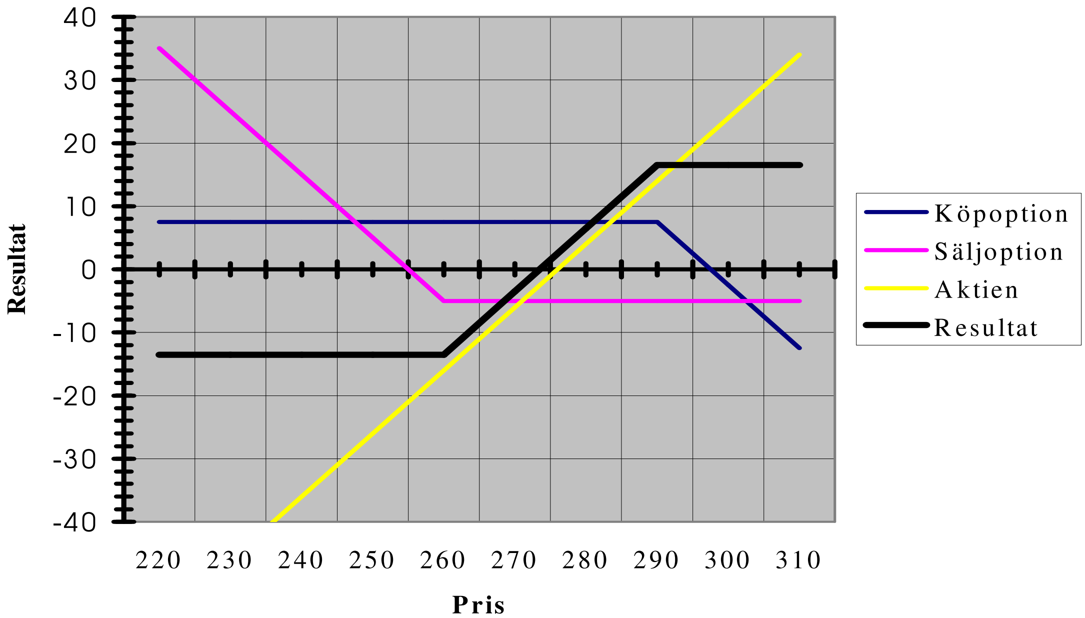
Varför
1. Minska risken med att inneha aktien.
2. Låsa in vinsten i aktien.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Sälj säljoptionen och flytta köpoptionen till ett högre lösenpris.
- Flytta köpoptionen till ett högre lösenpris i nästa lösenmånad.

Vid nedgång:
- Flytta den utfärdade köpoptionen till ett lägre lösenpris.
- Om du tror på en vändning så kan du sälja säljoptionen med vinst och köpa fler aktier till det nya lägre priset.

<u>Exempel:</u>
Avistapris: 276 kr
Utfärdad köpoption med lösenpris 290 kr. Denna ger en inkomst på 7,50 kr
Köpt säljoption med lösenpris 260 kr. Vår utgift för denna är 5.00 kr.
Detta ger oss totalt en netto intäkt på 2.50 kr.

Avistakurs	Köpoption	Säljoption	Aktien	Resultat
220	7,50	35,00	-56	-13,50
230	7,50	25,00	-46	-13,50
240	7,50	15,00	-36	-13,50
250	7,50	5,00	-26	-13,50
260	7,50	-5.00	-16	-13,50
270	7,50	-5.00	-6	-3,50
280	7,50	-5.00	4	6,50
290	7,50	-5.00	14	16,50
300	-2,50	-5.00	24	16,50
310	-12.50	-5.00	34	16,50
320	-22,50	-5.00	44	16,50



Diagonal spread / Tidsspread -- [- +]

Marknadstro
Investeraren tror på en svag marknad till en början, men med en stark uppgång längre fram.

Konstruktion
Utfärda en köpoption (ofta en parioption) med kort datum (lämpligast om denna har en månad eller mindre till förfall) och köp en minusoption (köpoption) med långt datum.

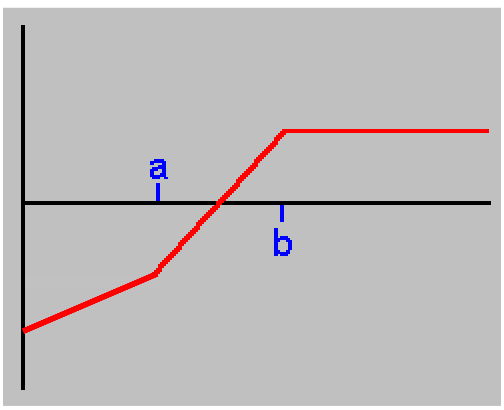
Maximal vinst
Obegränsad om den köpta optionen kvarstår då den korta har förfallit.

Förlustrisk
Begränsad till skillnaden i lösenpris +/- initial kostnad/förtjänst när man går in i positionen.

Säkerhetskrav
Ja, men med möjligt att kvittning (off-set).

Kommentar
Det finns en risk att den utfärdade optionen utnyttjas. Denna strategi har större förlustrisk vid kursstegringar men mindre vid kursfall jämfört med den snarlika strategin, neutral prisspread. Nettokostnaden är låg jämfört med den neutrala spreaden.

Ratiospread med underliggande aktier -- [1 2 0]



Marknadstro
Investeraren tror på en begränsad uppgång av aktien.

Konstruktion
Köp köpoptioner med ett lägre lösenpris a och utfärda dubbelt så många köpoptioner med högre lösenpris b och samma slutmånad. Till detta skall man inneha aktien.

Maximal vinst
Begränsad. Maximal vinst fås då underliggande ligger över övre lösenpriset,.
De utfärdade köpoptionernas lösenpris – aktiekursen + skillnaden mellan lösenpriserna + eventuella intäkter eller – eventuella kostnader.

Förlustrisk
Begränsad till nettokostnaden.
Aktiekursen + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter.

Breakeven
Aktiekursen + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter.

Säkerhetskrav
Mycket begränsat säkerhetskravet då man innehar aktien.

Varför
1. Ökad avkastning om aktien når målkursen.
2. Avkastning på stillastående marknad.

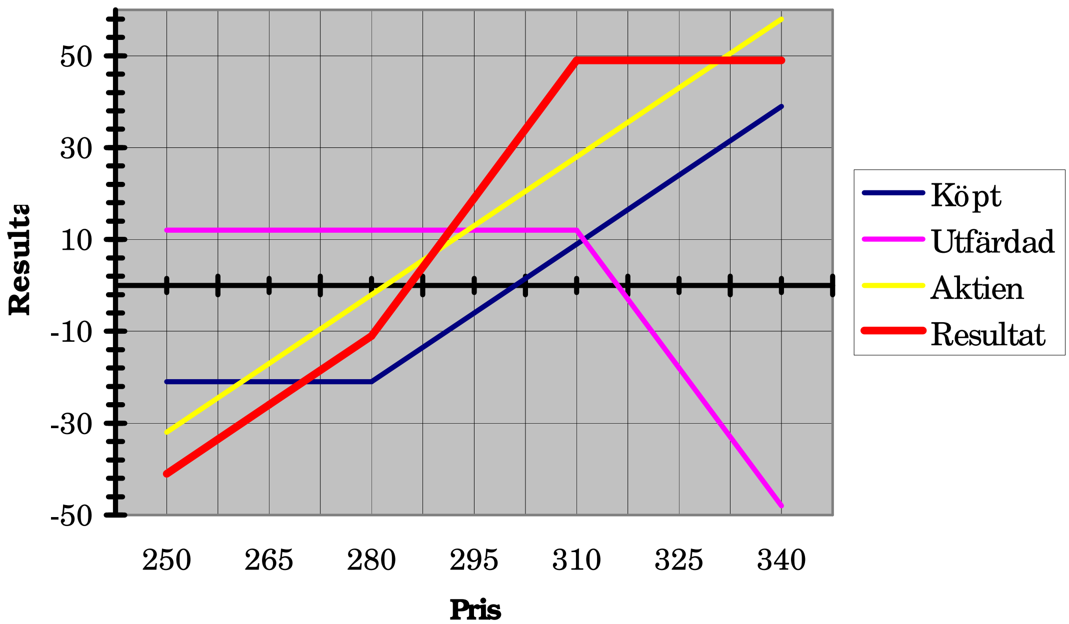
Kommentar
Detta är en strategi för den som med ett mycket begränsat risktagande vill öka avkastningen på sina aktier vid en stillastående eller svagt stigande marknad. I ett stort intervall får man större avkastning med denna strategi är enbart innehavet av aktierna.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Flytta en av de utfärdade köpoptionen till ett högre lösenpris.
- Flytta köpoptionen till ett högre lösenpris i nästa lösenmånad.
- Köp fler aktier eller terminer

Vid nedgång:
- Sälj den innehavda köpoptionen.
- Sälj aktien.

<u>Exempel:</u>
Avistapris: 282 kr.
Köpt köpoption med ett lösenpris på 310 kr. Denna ger en inkomst på 12 kr.
Utfärda två köpoptioner med lösenpris på 280 kr. Dessa ger oss en utgift på 21 kr.
Nettoresultat från start är då –9 kr.

Avistakurs	Köpt	Utfärdad	Aktien	Resultat
250	-21	12	-32	-41
265	-21	12	-17	-26
280	-21	12	-2	-11
295	-6	12	13	19
310	9	12	28	49
325	24	-18	43	49
340	39	-48	58	49



Positivt Backspread -- [0 –1 1]

Backspread är det gemensamma namnet då man har fler innehavda optioner än ställda. Köper man ett ben till får man så kallade stegar och trappor.

Marknadstro
Investeraren tror på en uppgång av aktien, men vill ha ett mycket gott skydd vid en fallande marknad.

Konstruktion
Utfärda köpoptioner med ett lägre lösenpris och köp dubbelt så många med högre lösenpris och samma slutmånad

Maximal vinst
Obegränsad.

Förlustrisk
Begränsad till skillnaden mellan lösenpriserna + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter

Breakeven
Det övre lösenpriset + skillnaden mellan lösenpriserna + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter

Säkerhetskrav
Mycket begränsat.

Varför

1. Ger lägre förlust vid nedgång jämfört med att köpa köpoptioner.
2. Ger lägre förlust vid nedgång jämfört med en trebening.

Uppföljning

Vid uppgång:

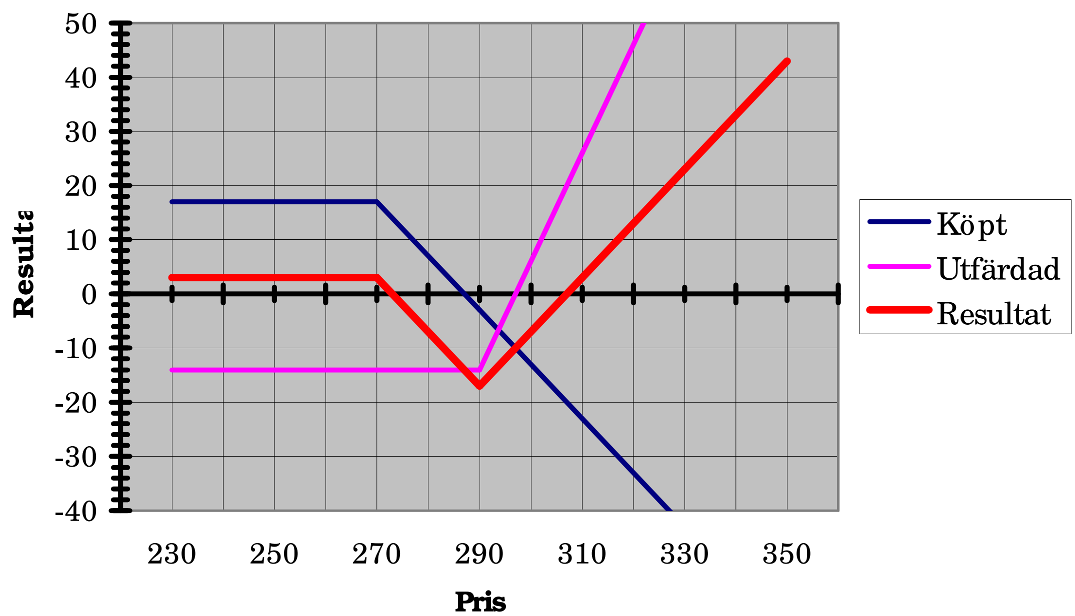
- Utfärda till ett högre lösenpris och köp tillbaka den utfärdade köpoptionen.
- Sälj aktien på termin.

Vid nedgång:

- Utfärda köpoptioner på ett högre lösenpris och säljoptioner på ett lägre.
- Utfärda köpoptioner på ett högre lösenpris med längre löptid.

Exempel:
Avistapris: 270 kr.
Utfärdad köpoption med lösenpris på 270 kr. Gen en inkomst: 17 kr.
Köp 2 köpoptioner med lösenpris på 290kr. Utgift: 14 kr. Netto intäkt: 3 kr.

Avistakurs	Utfärdad	Köpt	Resultat
240	17	-14	3
260	17	-14	3
270	17	-14	3
290	-3	-14	-17
300	-13	6	-7
320	-33	46	13
340	-53	86	33



Köpt syntetisk termin -- [1]

Marknadstro
Investeraren tror på en stark uppgång av aktien, men vill ha flexiblare position än att köpa terminen.

Konstruktion
Utfärda Säljoptioner och köp en köpoption med samma lösenpris.

Maximal vinst
Obegränsad.

Förlustrisk
Obegränsad: Lösenpriset + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter.

Breakeven
Lösenpriset + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

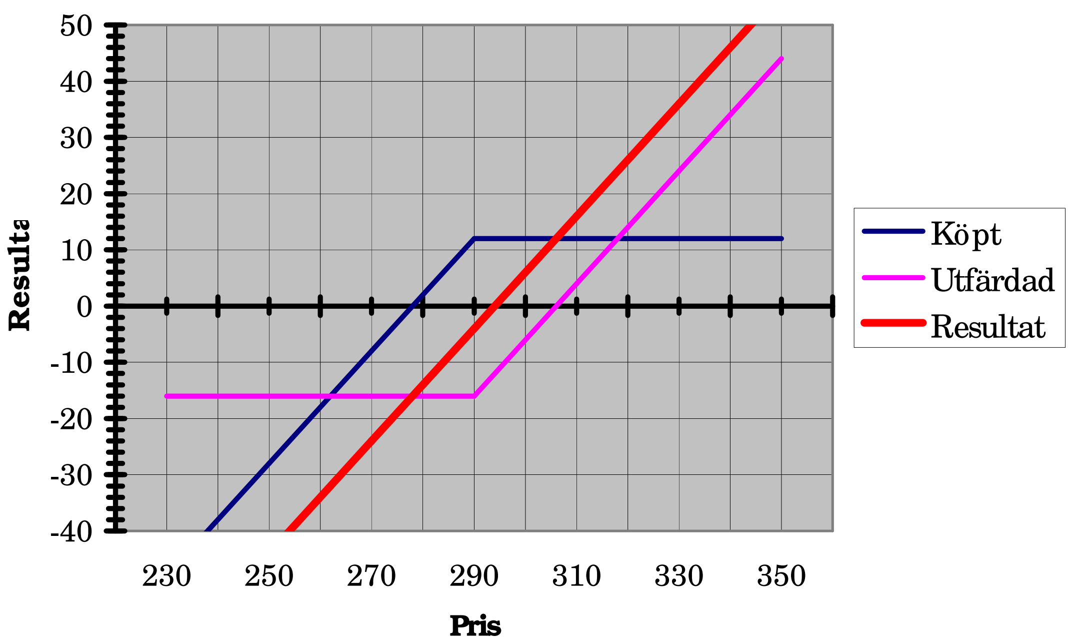
Varför
1. Man skapa samma position som att köpa aktien, men binder mycket mindre kapital.
2. Kräver mindre rörelse än en köpt köpoption.
3. Högre avkastningspotential än en köpt köpoption.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Utfärda en köpoption till ett högre lösenpris och använd intäkten till att köpa tillbaka den utfärdade säljoptionen.
- Lås in vinsten genom att sälja terminen.
- Rulla köpoptionen till ett högre lösenpris och köp tillbaka den utfärdade säljoptionen.

Vid nedgång:
- Rulla den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris och sälj eventuellt den innehavda köpoptionen.
- Rulla den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris i nästa lösenmånad.
- Sälj den innehavda köpoptioner och bilda en prisspread på lägre nivå.

Exempel:
Avistapris: 290 kr.
Utfärda en säljoption på pari, d.v.s. med lösenpris på 290 kr. Vi erhåller för denna 12 kr.
Köp en köpoption, även denna på pari. Utgift: 16 kr. Detta ger oss en nettokostnad på 4 kr.

Avistakurs	Utfärdad	Köpt	Resultat
230	-48	-16	-64
250	-28	-16	-44
270	-8	-16	-24
290	12	-16	-4
310	12	4	16
330	12	24	36
350	12	44	56



Köpt sned syntetisk termin -- [1 0 1]

Marknadstro
Investeraren tror på en stark uppgång av aktien, men vill ha flexiblare position än att köpa terminen.

Konstruktion
Utfärda säljoptioner till ett lägre lösenpris och köp en köpoption med ett högre lösenpris.

Maximal vinst
Obegränsad.

Förlustrisk
Obegränsad: säljoptionens lösenpris + eventuella kostnader eller - eventuella intäkter.

Breakeven
Köpoptionens lösenpris + eventuella kostnader.
Säljoptionens lösenpris - eventuella intäkter.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

Varför
1. Lägre risk än en syntetisk termin.
2. Större potential än en positiv trappa.

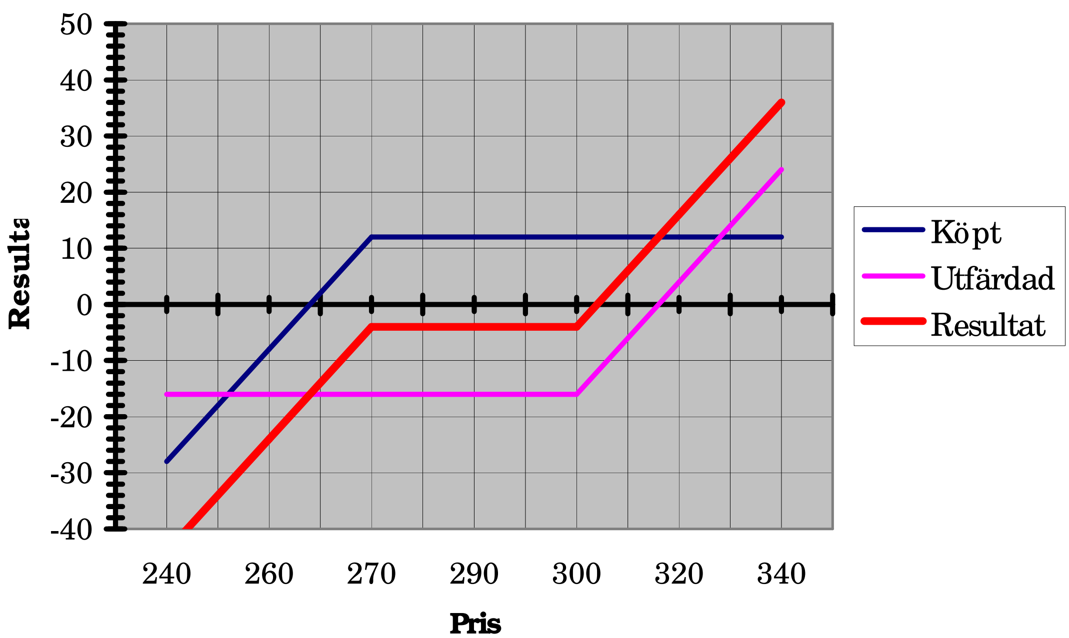
Uppföljning
Vid uppgång:
- Utfärda en köpoption till ett högre lösenpris och använd intäkten till att köpa tillbaka den utfärdade säljoptionen.
- Lås in vinsten genom att sälja terminen.
- Rulla köpoptionen till ett högre lösenpris och köp tillbaka den utfärdade säljoptionen.

Vid nedgång:
- Rulla den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris och sälj eventuellt den innehavda köpoptionen.
- Rulla den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris i nästa lösenmånad.
- Sälj den innehavda köpoptioner och bilda en prisspread på lägre nivå.

Exempel:

Denna påminner om den vanliga syntetiska terminen, men nu handlar vi inte parioptioner.
Avistapris: 290 kr
Utfärda en säljoption med lösenpris på 270 kr. Vi erhåller för denna 12 kr.
Köp en köpoption med lösenpris 300 kr. Utgift: 16 kr. Totalt får vi en nettokostnad på 4 kr.

Avistakurs	Utfärdad	Köpt	Resultat
240	-28	-16	-44
260	-8	-16	-24
270	12	-16	-4
290	12	-16	-4
300	12	-16	-4
320	12	4	16
340	12	24	36



Positiv trappa -- [0 1 0 1 0]

Marknadstro
Investeraren tror på en uppgång av aktien, men vill ha bra skydd för nedgång.

Konstruktion
Etablera två positiva prisspreadar, en i köpoptioner och en i säljoptioner.

Maximal vinst
Begränsad Skillnaden i lösenpris på köpoptionerna – en eventuell nettokostnad eller + en eventuell nettointäkt.

Förlustrisk
Begränsad: Skillnaden i lösenpris på säljoptionerna + en eventuell nettokostnad eller - en eventuell nettointäkt.

Breakeven
Det lägre lösenpriset på köpoptionen + en eventuell nettokostnad eller - en eventuell nettointäkt.

Säkerhetskrav
Begränsat.

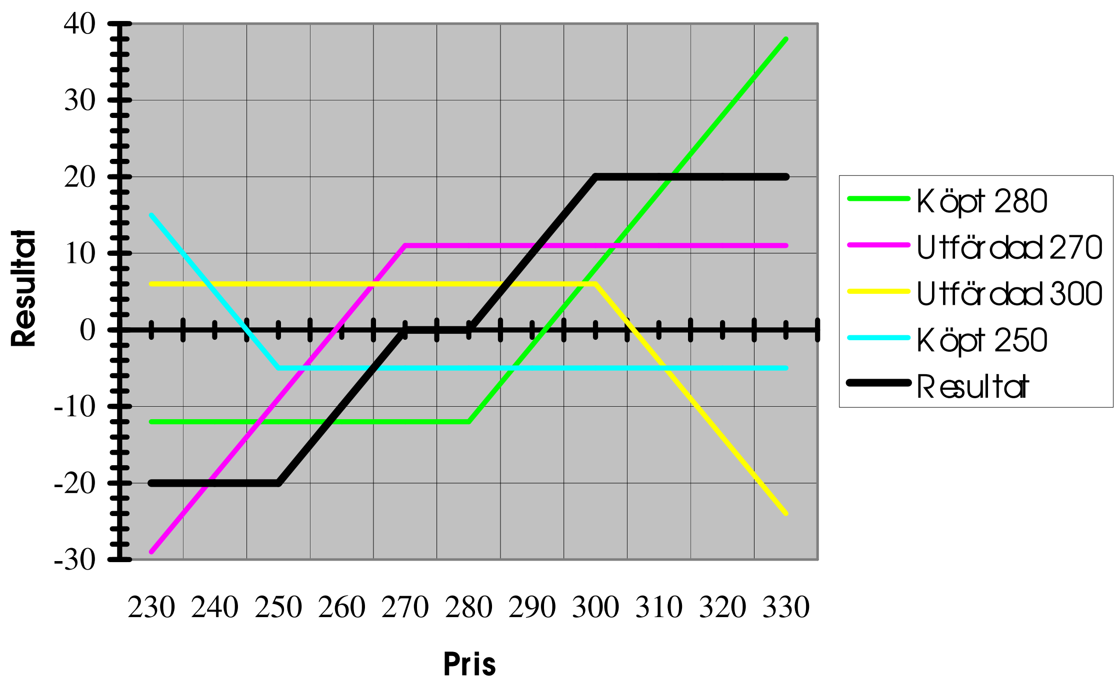
Varför
1. Lägre risk än en syntetisk termin och sned syntetisk termin.
2. Lägre kostnad än en positiv prisspread.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Rulla prisspreaden till ett högre lösenpris.
- Sälj den innehavda säljoptionen och flytta den utfärdade köpoptionen till ett högre lösenpris.

Vid nedgång:
- Utfärda fler köpoptioner och bilda en ratiospread eller en stege.
- Sälj den innehavda köpoptioner och rulla den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris i nästa lösenmånad.

Exempel:
Avistapris: 290 kr.
Köp en köpoption med lösenpris 280 kr. Vi får en utgift på 12 kr.
Utfärda en säljoption med lösenpris på 270 kr. Denna ger en inkomst på 11 kr.
Utfärda en köpoption med lösenpris 300 kr. Denna ger oss en inkomst på 6 kr.
Köp en säljoption med lösenpris på 250 kr. Utgift 5 kr. Vår nettokostnad blir 0 kr.

Avistakurs	Köpt 280	Utfärdad 270	Utfärdad 300	Köpt 250	Resultat
230	-12	-29	6	15	-20
240	-12	-19	6	5	-20
250	-12	-9	6	-5	-20
260	-12	1	6	-5	-10
270	-12	11	6	-5	0
280	-12	11	6	-5	0
290	-2	11	6	-5	10
300	8	11	6	-5	20
310	18	11	-4	-5	20
320	28	11	-14	-5	20
330	38	11	-24	-5	20
340	48	11	-34	-5	20



<u>Ratiospread med köpoptioner -- [0 1 –1]</u>

Marknadstro
En ratiospread med köpoptioner gör man när man vill få avkastning på en måttlig uppgång.

Konstruktion
Köp köpoptioner med ett lägre lösenpris och utfärda fler köpoptioner med ett högre.

Maximal vinst
Begränsad. Skillnaden mellan lösenpriserna plus/minus nettointäkt/nettokostnad för optionerna. Maximal vinst fås vid det högre lösenpriset.

Förlustrisk
Obegränsad. Strategin ger förlust vid kraftiga uppgångar i underliggande.

Breakeven
Det övre lösenpriset + skillnaden mellan lösenpriserna + totala premien.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

Varför
1. Strategin ger lägre kostnad än att köpa prisspreaden.
2. Ger ingen förlust – eller t.o.m. vinst – om aktien skulle gå ner.
3. Hög sannolikhet för vinst.

Kommentar
Strategin kräver noggrann bevakning.

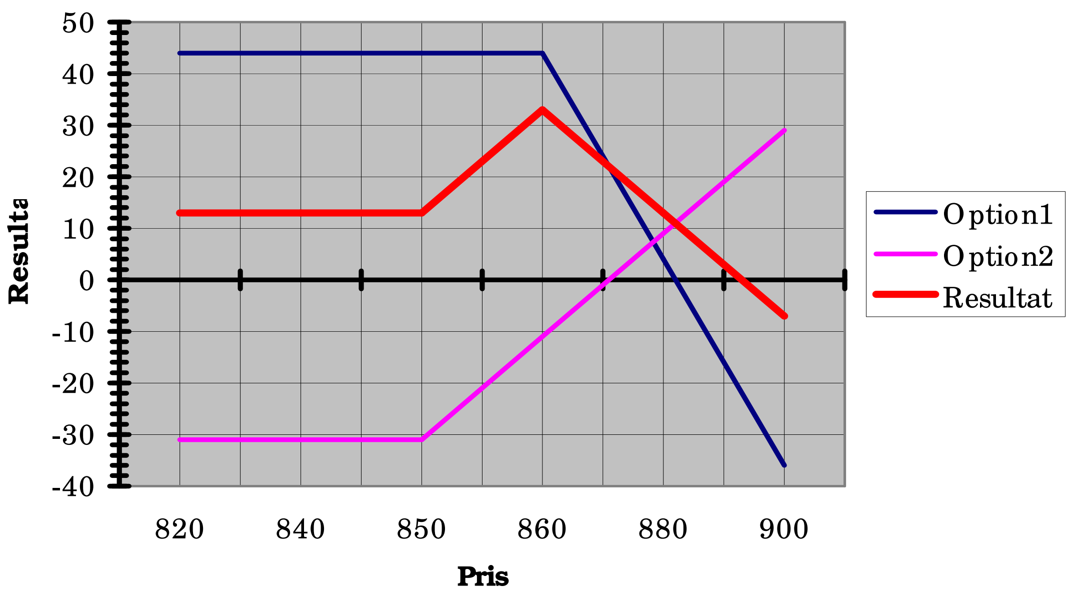
Uppföljning
Vid uppgång:
- Köp köpoption med högre lösenpris.
- Flytta en av de utfärdade köpoptionerna till ett högre lösenpris och bilda en stege.
- Köp aktien på termin om/när den går över det övre lösenpriset.

Vid nedgång:
- Sälj den innehavda köpoptionen.
- Sälj den innehavda köpoptionen och köp tillbaka en av de utfärdade köpoptionerna.

Exempel:

Avistapris: 842 kr
Utfärda 2 stycken köpoptioner med lösenpris på 860 kr. Vår premie totalt blir 44 kr.
Köp en köpoption med lösenpris 840 kr till en kostnad av 31 kr. Vi får en nettointäkt från start på 13 kr.

Avistakurs	Option1	Option2	Resultat
820	44	-31	13
840	44	-31	13
850	44	-31	13
860	44	-11	33
880	4	9	13
900	-36	29	-7



Positiv Trebening – 1 -- [1 0 1 0]

Marknadstro
Investeraren tror på en stark uppgång av aktien, men vill samtidigt ha ett bra skydd vid en nedgång..

Konstruktion
Utfärda säljoptioner med ett lägre lösenpris, köp köpoptioner utfärda köpoptioner med ett högre lösenpris.

Maximal vinst
Begränsad. Skillnaden i lösenpris på köpoptionerna – eventuell kostnad eller + eventuell vinst.

Förlustrisk
Obegränsad. Maximal förlust: Säljoptionens lösenpris plus en eventuell nettokostnad.

Breakeven
Det lägre lösenpriset på säljoptionen + eventuell kostnad.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

Varför
1. Ger ingen risk på uppsidan som ratiospreaden.
2. Ger lägre pris än prisspreaden.
3. Ger högre sannolikhet för vinst än den köpta köpoptionen.

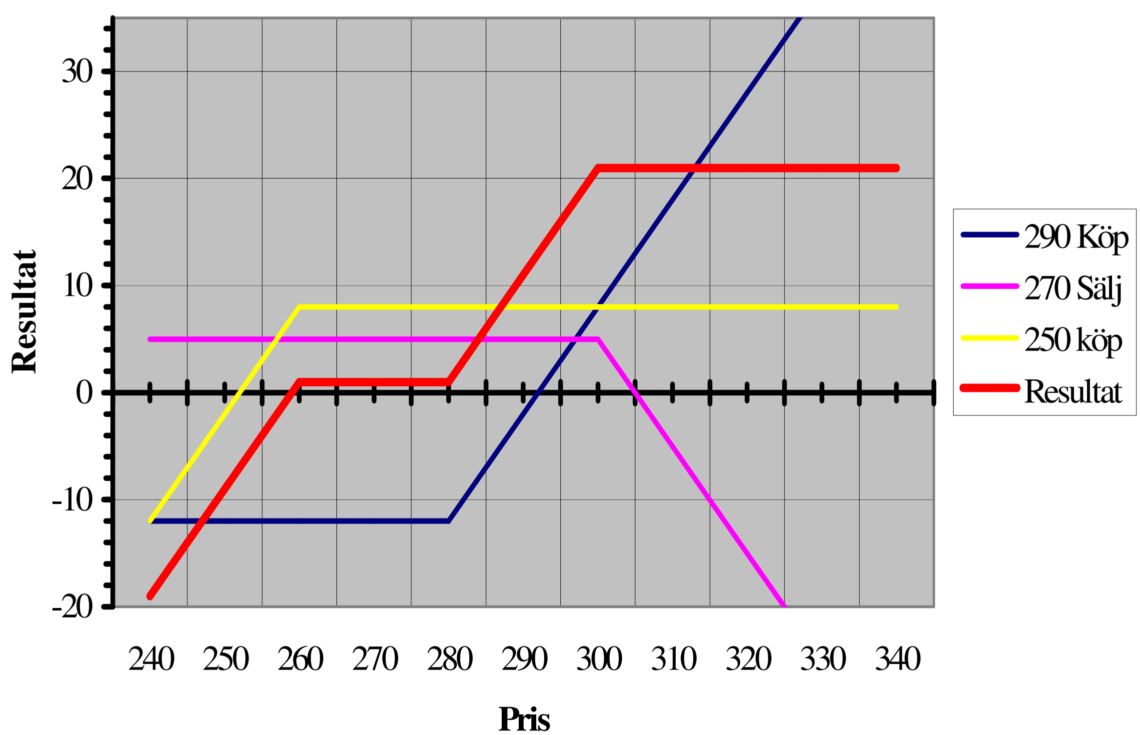
Uppföljning
Vid vinst:
- Flytta säljoptionen till ett högre lösenpris och använd intäkten till att flytta den utfärdade köpoptionen till ett högre lösenpris.
- Rulla prisspreaden till ett högre lösenpris.

Vid förlust:
- Rulla den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris och sälj eventuellt den innehavda köpoptionen.
- Flytta den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris i nästa lösenmånad.
- Utfärda fler köpoptioner och bilda en ratiospread eller stege.

Exempel:

Avistapris: 280 kr
Utfärda en köpoption på 300 kr. Denna ger en inkomst på 5 kr.
Utfärda även en säljoption med lösenpris 260 kr, med en intäkt på 8,00 kr.
Köp sedan en köpoption med lösenpris på 280 kr. Utgiften för denna är 12,00 kr. Från start har vi då en nettointäkt på 1,00 kr

Avistakurs	280 Köp	300 Köp	260 Sälj	Resultat
240	-12	5	-12	-19
250	-12	5	-2	-9
260	-12	5	8	1
270	-12	5	8	1
280	-12	5	8	1
290	-2	5	8	11
300	8	5	8	21
310	18	-5	8	21
320	28	-15	8	21
330	38	-25	8	21
340	48	-35	8	21



Positiv Trebening – 2 -- [0 1 0 1]

Marknadstro
Investeraren tror på en stark uppgång av aktien, men vill samtidigt ha ett bra skydd vid en nedgång.

Konstruktion
Utfärda säljoptioner med ett högre lösenpris, köp säljoptioner med ett lägre och använd intäkten till att köpa köpoptioner.

Maximal vinst
Obegränsad.

Förlustrisk
Begränsad. Maximal förlust: Skillnaden mellan lösenpriserna på säljoptionerna plus en eventuell nettokostnad eller minus en eventuell nettointäkt.

Breakeven
Uppåt: Köpoptionens lösenpris + eventuell kostnad.
Nedåt: Det övre lösenpriset på säljoptionen – eventuell intäkt.

Säkerhetskrav
Begränsat.

Varför
1. Positionen ger en lägre kostnad än att köpa köpoptionen och därmed lägre breakeven.
2. Positionen ger ingen förlust vid begränsad uppgång som backspreaden ovan.

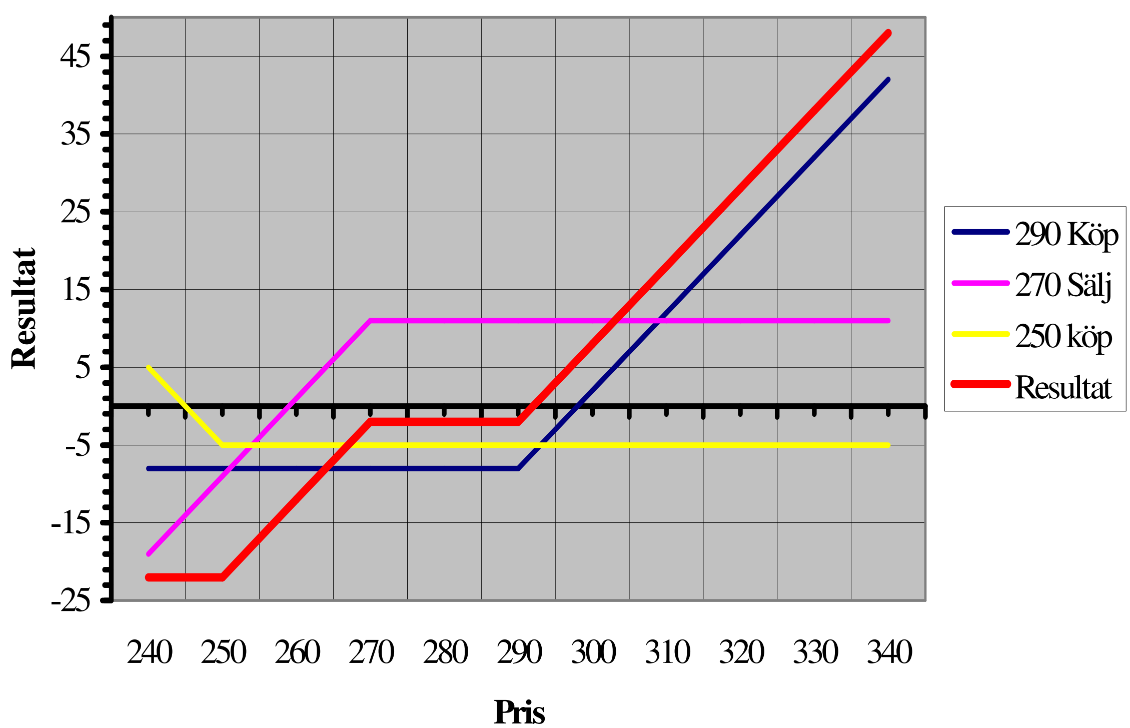
Uppföljning
Vid vinst:
- Utfärda köpoption på ett högre pris och använd intäkten till att stänga den positiva prisspreaden.
- Rulla den innehavda köpoptionen till ett högre lösenpris och använd intäkten till att stänga den positiva prisspreaden.

Vid förlust:
- Sälj den innehavda säljoptionen och rulla den utfärdade till ett lägre lösenpris.
- Sälj den innehavda köpoptionen och bilda en prisspread på en lägre nivå.

Exempel:

Avistapris: 290 kr.
Utfärda en säljoption med lösenpris på 270 kr. Denna ger oss en inkomst på 11 kr.
Köp därefter en säljoption med lösenpris på 250 kr, utgift 5,00 kr,
Och en köpoption med lösenpris på 290 kr med en utgift på 8,00 kr. Från start har vi då en nettokostnad på 2,00 kr.

Avistakurs	290 Köp	270 Sälj	250 Sälj	Resultat
240	-8	-19	5	-22
250	-8	-9	-5	-22
260	-8	1	-5	-12
270	-8	11	-5	-2
280	-8	11	-5	-2
290	-8	11	-5	-2
300	2	11	-5	8
310	12	11	-5	18
320	22	11	-5	28
330	32	11	-5	38
340	42	11	-5	48



<u>Positiv Trebening med innehav -- [1 0 1 0 *]</u>

Marknadstro
Investeraren tror på en begränsad uppgång av aktien, men vill samtidigt ha ett bra skydd vid en nedgång..

Konstruktion
Köp aktien, utfärda köpoptioner, köp säljoptioner och utfärda säljoptioner på en lägre nivå.

Maximal vinst
Begränsad. Köpoptionens lösenpris – aktiekurs – eventuell kostnad eller + eventuell intäkt..

Förlustrisk
Obegränsad. Maximal förlust: Aktiekursen – skillnaden mellan lösenpriserna på säljoptionerna plus en eventuell nettokostnad eller minus en eventuell nettointäkt.

Breakeven
Uppåt: Aktiekursen + eventuell kostnad.
Nedåt: Aktiekursen – eventuell intäkt.

Säkerhetskrav
Mycket begränsat säkerhetskravet då man innehar aktien.

Kommentar
Om man startar med en Covered Call, skyddar sig med en köpt säljoption och sedan vill tjäna extra genom att utfärda en säljoption på en låg nivå för att tjäna extra hamnar man i följande situation.

Varför
1. Minska risken med att köpa aktien.
2. Vid pressade kurser men osäker på om botten är nådd.

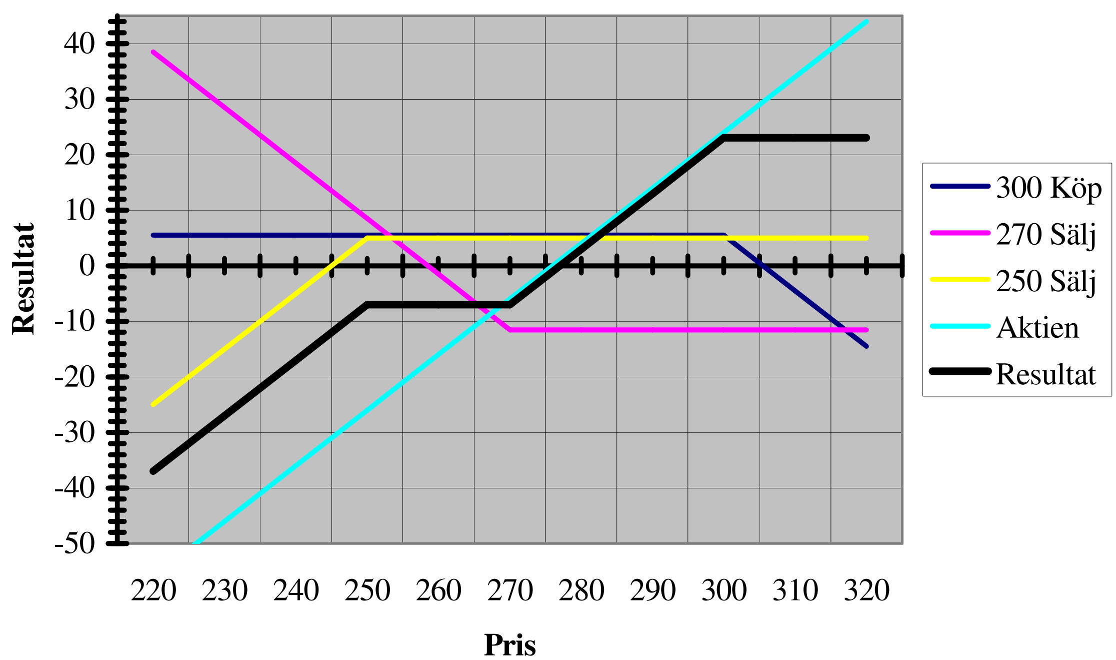
Uppföljning
Vid vinst:
- Sälj säljoptionen och flytta köpoptionen till ett högre pris.
- Flytta köpoptionen till ett högre lösenpris i nästa lösenmånad

Vid förlust:
- Sälj de utfärdade optionerna till ett lägre lösenpris.
- Flytta den utfärdade säljoptionen till ett lägre lösenpris i nästa lösenmånad
- Om du tror på en vändning; sälj säljoptionen och köp fler aktier på den nya lägre nivån.

Exempel:

Avistapris: 276 kr.
Utfärda en köpoption med lösenpris på 300 kr. Vi får en inkomst på 5.50 kr.
Köp sedan en säljoption med lösenpris på 270 kr, vilket ger en utgift på 11,50 kr.
Utfärda samtidigt en säljoption med lösenpris på 250 kr. Inkomst: 5.00 kr. Vår nettokostnad uppgår då till 1,00 kr

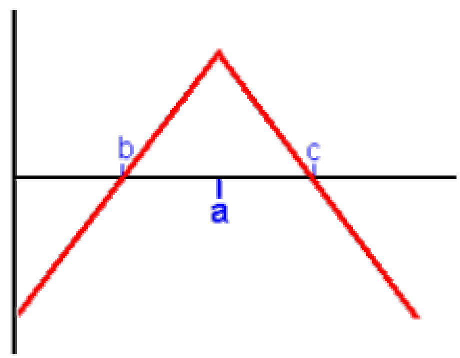
Avistakurs	300 Köp	270 Sälj	250 Sälj	Aktien	Resultat
220	5,5	38,5	-25	-56	-37
230	5,5	28,5	-15	-46	-27
240	5,5	18,5	-5	-36	-17
250	5,5	8,5	5	-26	-7
260	5,5	-1,5	5	-16	-7
270	5,5	-11,5	5	-6	-7
280	5,5	-11,5	5	4	3
290	5,5	-11,5	5	14	13
300	5,5	-11,5	5	24	23
310	-4,5	-11,5	5	34	23
320	-14,5	-11,5	5	44	23



NEUTRAL MARKNAD

Vi ska här diskutera vanliga strategier på en neutral marknad.

Utfärdad Strut / Sold Straddle -- [1 –1]



Marknadstro
Investeraren tror på marknad med liten volatilitet, d.v.s. med små prisförändringar.

Konstruktion
Sälj en säljoption och en köpoption med samma lösenpris a och samma slutmånad,
eller
köp aktien och utfärda dubbelt så många köpoptioner.

Maximal vinst
Begränsad till premien om avistapriset vid lösendagen är lika med lösenpriset,
eller
Optionernas lösenpris – aktiekursen + totala premien.

Break-even
Punkten b, lösenpriset – hela premien och c lösenpriset + hela premien.

Förlustrisk
Obegränsad om marknaden går upp eller ner mycket.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

Kommentar
Om avistapriset inte ändras sjunker värdet med tiden eftersom tidsvärdet minskar. Detta är till fördel för investeraren. Är man osäker kan man utfärda en vagga i stället. Då förlusten kan bli obegränsad kräver denna strategi noggrann bevakning. En utfärdad strut i kombination av ett innehav i underliggande aktie ökar avkastningen i ett mycket brett intervall. Riskexponeringen nedåt ökar dock eftersom både aktien och struten tappar i värde.

Varför
Få avkastning i en stillastående marknad.

Uppföljning
Vid uppgång (utan innehav):
- Köp köpoptioner med lägre lösenpris som skydd.
- Köp terminen om aktien stiger till nivån för breakeven uppåt.

Vid nedgång (utan innehav):
- Köp säljoptioner med lägre lösenpris som skydd.
- Sälj terminen om aktien faller till nivån för breakeven nedåt.

Vid stillastående (utan innehav):
- Om aktien ligger stilla så att du kan köpa köpoptionen med högre lösenpris och säljoptionen med lägre lösenpris och nettointäkten fortfarande är större än skillnaderna i lösenpris har du låst in en vinst.
- Om du kan köpa köp- och säljoptionen med samma lösenpris i nästa lösenmånad har du låst in en vinst.

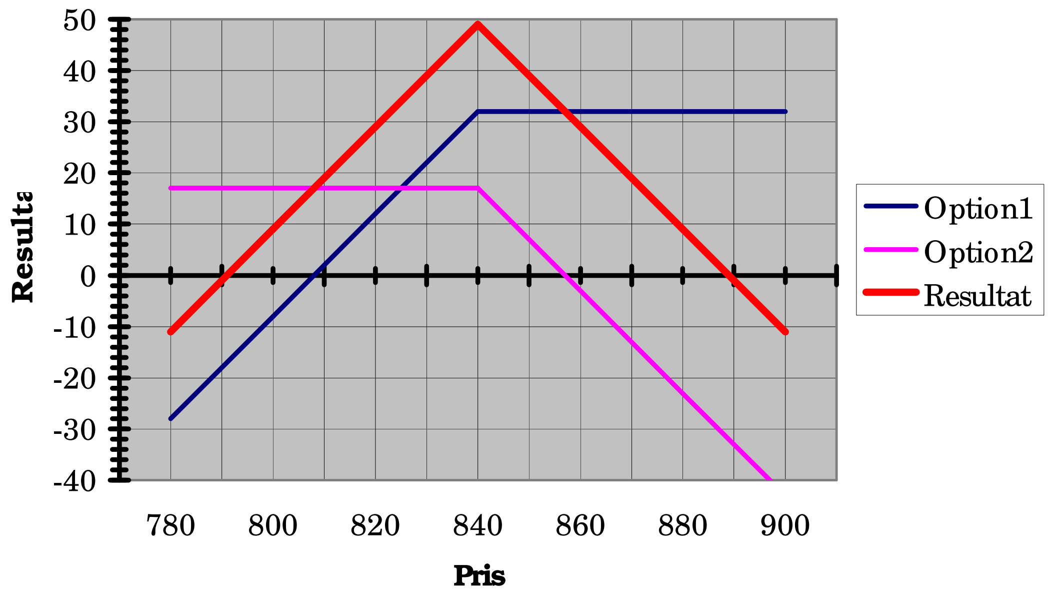
Vid vinst (med innehav):
- Köp lika många köpoptionen till ett högre lösenpris.
- Köp lika många köpoptionen till samma lösenpris i nästa lösenmånad.

Vid förlust (med innehav):
- Vid uppgång: Köp fler aktier eller terminer.
- Vid uppgång: Köp köpoption med högre lösenpris.
- Vid nedgång: Flytta de utfärdade köpoptionerna till ett lägre lösenpris.
- Vid nedgång: Använd tidigare intäkt till att köpa säljoptioner.

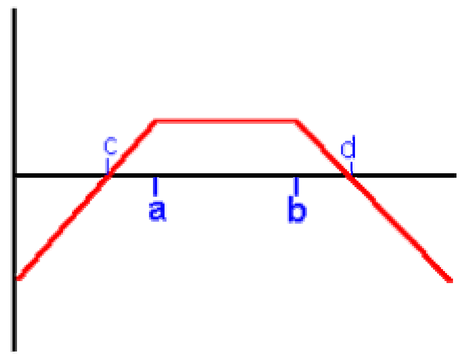
Exempel:

Avistapris: 842 kr.
Utfärda en köpoption med lösenpris 840 kr och premie 32 kr samt en säljoption med lösenpris 840 kr och premie 17 kr. Vid start har vi då en nettoinkomst på 49 kr.

Avistakurs	Option1	Option2	Resultat
780	-28	17	-11
800	-8	17	9
820	12	17	29
840	32	17	49
860	32	-3	29
880	32	-23	9
900	32	-43	-11



Utfärdad Vagga / Sold Strangle -- [1 0 –1]



Marknadstro
Investeraren tror på marknad med relativt liten volatilitet, d.v.s. små prisförändringar i ett ganska brett band.

Konstruktion
Sälj en säljoption med lösenpris a och en köpoption med lösenpris b.

Maximal vinst
Begränsad till premien för de båda optionerna.

Break-even
Punkten c, när det lägre lösenpriset – hela premien nås och d då det högre lösenpriset + hela premien nås.

Förlustrisk
Obegränsad om marknaden går upp eller ner väldigt mycket.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

Kommentar
Om avistapriset inte ändras sjunker värdet med tiden eftersom tidsvärdet minskar. Detta är till fördel för investeraren. Är man osäker kan man utfärda en fjäril (butterfly) i stället.

Varför
Få avkastning i en stillastående och lätt rörlig marknad.

Uppföljning
Vid uppgång:

- Köp köpoptioner med lägre lösenpris som skydd.
- Köp terminen om aktien stiger till nivån för breakeven uppåt.

Vid nedgång:

- Köp säljoptioner med lägre lösenpris som skydd.
- Sälj terminen om aktien faller till nivån för breakeven nedåt.

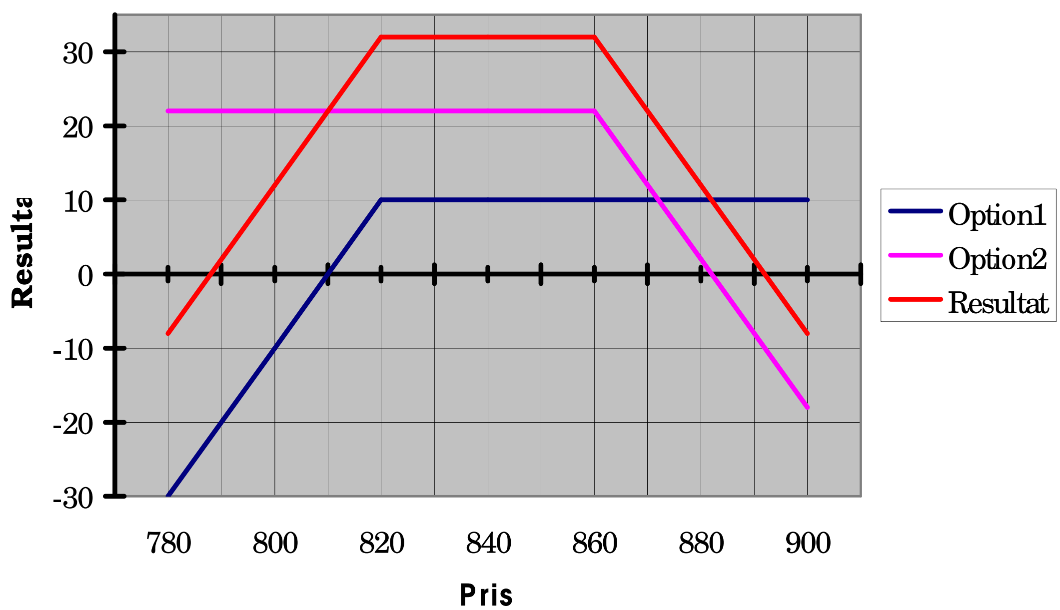
Vid stillastående:

- Om aktien ligger stilla så att du kan köpa köpoptionen med högre lösenpris och säljoptionen med lägre lösenpris och nettointäkten fortfarande är större än skillnaderna i lösenpris har du låst in en vinst.
- Om du kan köpa köp- och säljoptionen med samma lösenpris i nästa lösenmånad har du låst in en vinst.

<u>Exempel:</u>

Avistapris: 842 kr
Utfärda en köpoption med lösenpris 860 kr och premie 22 kr samt en säljoption med lösenpris 820 kr och premie 10 kr. Vid start har vi då en nettoinkomst på 32 kr.

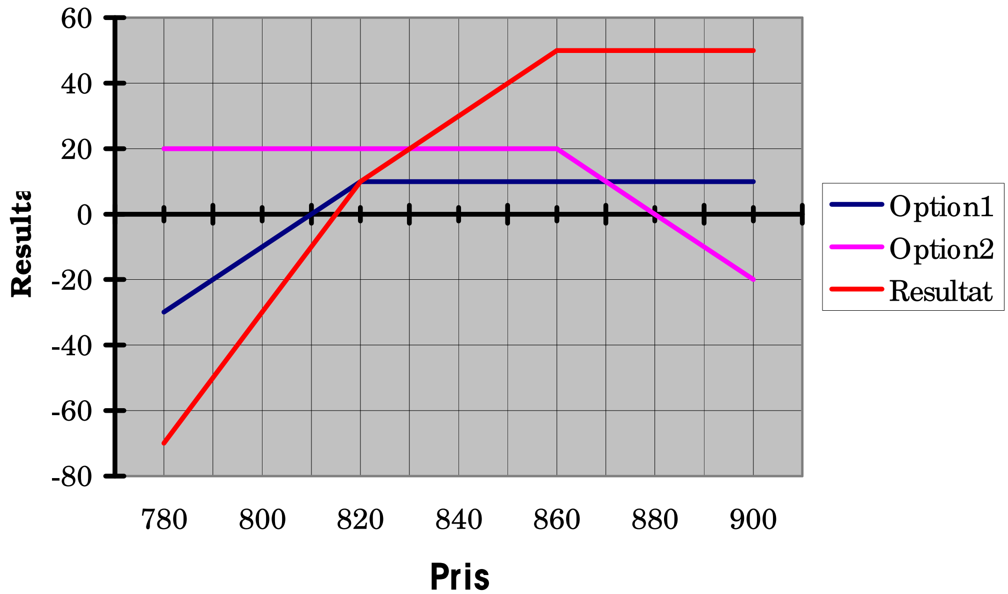
Avistakurs	Option1	Option2	Resultat
780	-30	22	-8
800	-10	22	12
820	10	22	32
840	10	22	32
860	10	22	32
880	10	2	12
900	10	-18	-8



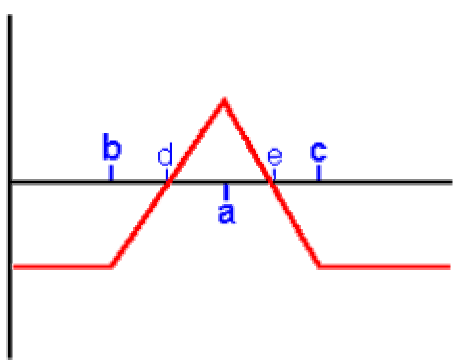
<u>Exempel</u> Utfärdad vagga plus aktie:

Avistapris: 840 kr.
Utfärda en köpoption med lösenpris 860 kr och premie 20 kr samt en säljoption med lösenpris 820 kr och premie 10 kr. Vid start har vi då en nettoinkomst på 30 kr.

Avistakurs	Option1	Option2	Resultat
780	-30	20	-70
800	-10	20	-30
820	10	20	10
840	10	20	30
860	10	20	50
880	10	0	50
900	10	-20	50



Köpt Fjäril / Long Butterfly -- [0 1 –1 0]



Marknadstro
Investeraren tror på marknad med liten volatilitet, d.v.s. små prisförändringar samtidigt som han/hon vill begränsa förlusten.

Konstruktion
Köp en köpoption med lågt lösenpris b.
Sälj två köpoptioner med medelhögt lösenpris a.
Köp en köpoption med högt lösenpris c

Maximal vinst
Begränsad till skillnaden mellan det låga och medelhöga lösenpriset minus premien.

Break-even
Punkterna d och e.

Förlustrisk
Begränsad till initialkostnaden.

Säkerhetskrav
Kan kvittas

Kommentar
Det kan bli svårt att anskaffa och sälja snabbt

Varför
Få avkastning i en stillastående och lätt rörlig marknad samtidigt som man minimera risken.

<u>Neutral tidsspread / Calendar spread / Horizontal spread -- [+ -]</u>

Marknadstro
Investeraren tror på en svag marknad till en början, men med en stark uppgång längre fram.

Konstruktion
Utfärda en köpoption med kort datum och köp en annan köpoption med samma lösenpris med långt datum. Om investeraren tror på det omvända kan han/hon göra motsatt strategi med säljoptioner.

Maximal vinst
Stor, om den köpta optionen finns kvar då den utfärdade har expirerat. Om positionen stängs då den utfärdade optionen förfaller, fås maximal vinst om denna då är i pari.

Förlustrisk
Begränsad till skillnaden i lösenpris + premien.

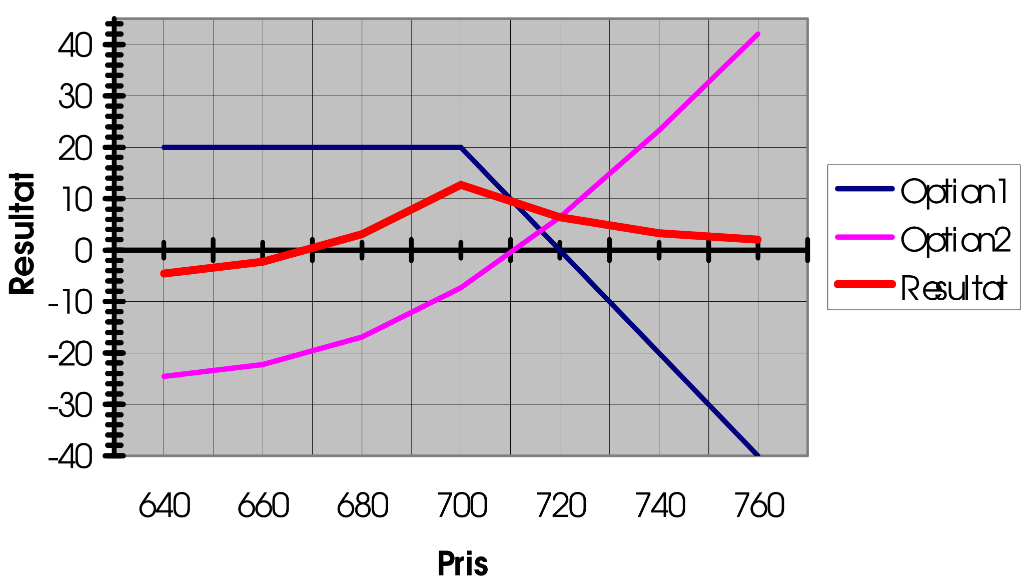
Säkerhetskrav
Ja, men begränsad p.g.a. kvittning.

Kommentar
Det finns en risk att den utfärdade optionen exciseras. Ofta används parioptioner. Denna strategi har större förlustrisk jämfört med en diagonal tidsspread vid sjunkande avistakurs, men mindre vid stigande. Strategin görs lämpligast då den kortare optionen har en månad eller mindre kvar till slutdagen.

<u>Exempel:</u>
Vi utfärdar februari-optioner med lösen 700 för 20 kr/st. och köper mars-optioner med lösen 700 för 25,50 kr/st. Detta leder till en nettokostnad på 5,5 kr.

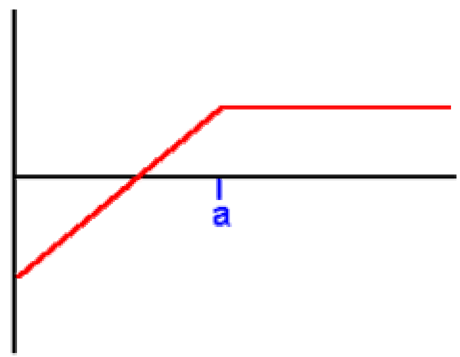
Avistapris: 703 kr.
Lösenpris på köpoptionen är 20 kr och på säljoptionen 25,50 kr.

Avistakurs	Option1	Option2	Resultat
640	20	-24,6	-4,6
660	20	-22,25	-2,25
680	20	-16,9	3,1
700	20	-7,3	12,7
720	0	6,4	6,4
740	-20	23,3	3,3
760	-40	42	2



De lite mystiska värdena för Option2 beror på följande: Strategin avslutas vanligtvis då den kortare optionen förfaller. Då säljer man tillbaka mars-optionerna. När strategin görs vet man inte vilket pris underliggande har då februari-optionerna förfaller. Därför måste man beräkna teoretiska värden för mars-optionen. Det är dessa värden som presenteras.

Covered Call = Syntetisk utfärdad säljoption -- [1 0 *]



Marknadstro
Investeraren har aktier och tror att marknaden kommer att stiga eller vara konstant på kort sikt. Därför utfärdar han/hon köpoptioner mot underliggande vara. Neutralt till svagt negativ.

Konstruktion
Utfärda köp optioner med lösenpris a. Antalet bestäms av antalet innehavda aktier och på hur mycket uppgång man tror på.

Maximal vinst
Begränsad. Genom att sälja köpoptioner avsäger sig investeraren sig av vins på eventuell uppgång. Maximal vinst är lösenpris – marknadspriset på avistan + premien.

Break-even
Anskaffningsvärdet minus premien.

Förlustrisk
Stor, nästan lika stor som enbart innehavet av aktierna, endast minskad med erhållen premie för optionerna, d.v.s. aktiekursen – premien.

Säkerhetskrav
Krävs alltid.

Kommentar
Flytta lösenpriset om underliggande värde stiger och/eller rulla till nästa lösenmånad. Utfärdade plusoptioner ger bäst skydd mot kursfall och parioptioner (med mest tidsvärde) lämpar sig bäst för den med mycket neutral marknadstro. Utfärdade minusoptioner lämpar sig bäst om man är osäker på marknaden och inte vill riskera att omedelbart bli löst på den underliggande avistan.

Varför
1. Kompensera för kursfall.
2. Extra avkastning i stillastående marknad.
3. Planera aktieförsäljning.

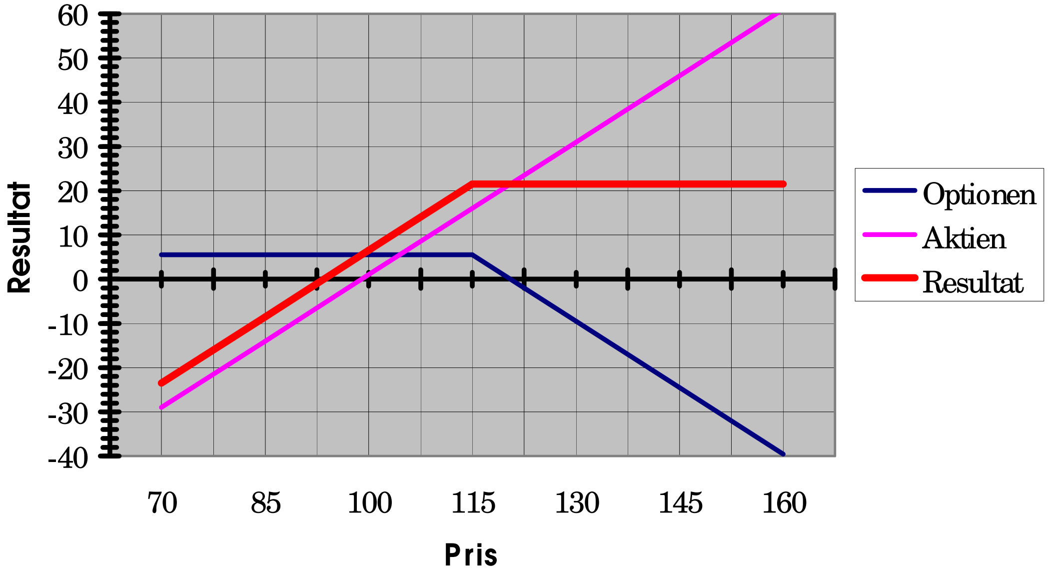
Uppföljning
Vid vinst:
- Flytta köpoptionen till ett högre lösenpris.
- Flytta köpoptionen till ett högre lösenpris i nästa lösenmånad.
- Köp fler aktier eller terminer.

Vid förlust:
- Flytta köpoptionen till ett lägre lösenpris. Detta begränsar vinsten ännu mer, men ger vinst vid en nedgång.
- Flytta köpoptionen till ett lägre lösenpris i nästa lösenmånad.
- Köp säljoption för den tidigare intäkten.

VARNING! Som förvaltare kan detta vara farligt då man kan bli löst, men inte får sälja innehavet.

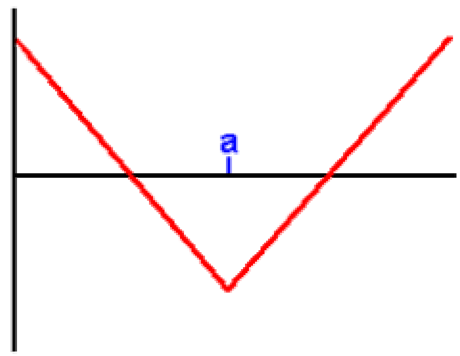
<u>Exempel:</u>
Avistapris: 99 kr.
Lösenpris på den utfärdade säljoptionen: 115 kr och optionspremien = 5,50 kr

Avistakurs	Option	Aktien	Resultat
70	5,5	-29	-23,5
85	5,5	-14	-8,5
100	5,5	1	6,5
115	5,5	16	21,5
130	-9,5	31	21,5
145	-24,5	46	21,5
160	-39,5	61	21,5


60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Resultat
70
85
100
115
130
145
160
Pris
Optionen
Aktien
Resultat

VOLATIL MARKNAD

Köp Strut / Long Straddle -- [-1 1]



Marknadstro
Investeraren tror på marknad med hög volatilitet, d.v.s. med stora prisförändringar.

Konstruktion
Köp en säljoption och en köpoption med samma lösenpris a,
eller
Köp aktien och dubbelt så många säljoptioner.

Maximal vinst
Obegränsad om marknaden går upp eller ner mycket.

Maximal förlust
Premien,
eller
premien – (lösenpris – aktiekurs) eller + (aktiekurs – lösenpris).

Break-even
Lösenpriset – hela premien och lösenpriset + hela premien.

Förlustrisk
Begränsad till premien om avistapriset vid lösendagen är lika med lösenpriset.

Säkerhetskrav
Inget

Kommentar
Om avistapriset inte ändras sjunker värdet med tiden eftersom tidsvärdet minskar.

Varför
Få avkastning i en mycket rörlig marknad där man inte vet riktningen. Inför ett ev. förvärv, rapport etc. En strut i pari är billigast p.g.a. den inte har något realvärde.

Uppföljning
Vid uppgång (utan innehav):
- Utfärda köpoptioner med högre lösenpris och sälj innehavd säljoption.
- Sälj terminen och innehavd säljoption

Vid nedgång (utan innehav):
- Utfärda säljoptioner med högre lösenpris och sälj innehavd köpoption.
- köp terminen och innehavd köpoption

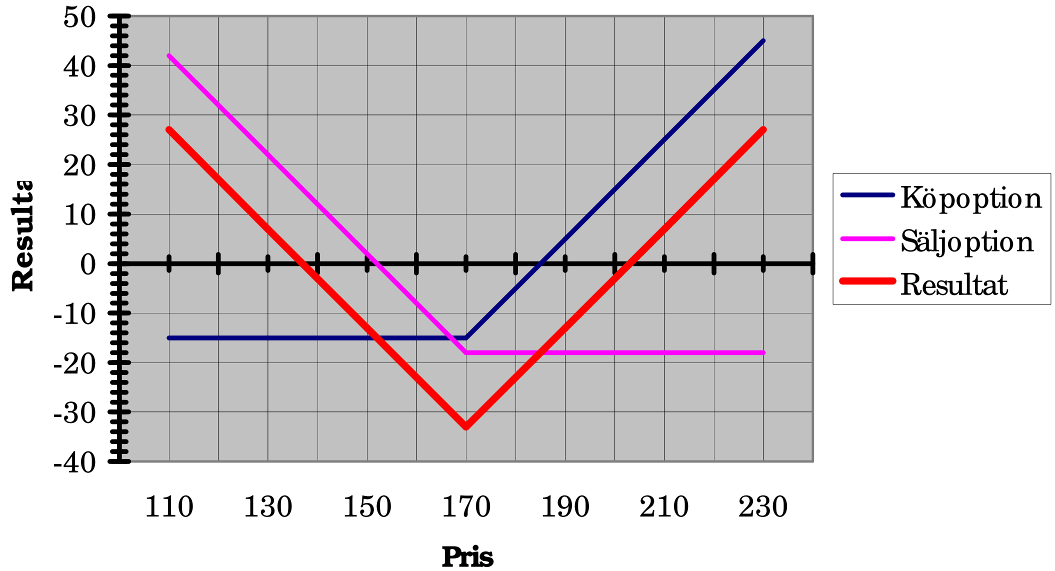
Vid stillastående (utan innehav):
- Utfärda köpoptioner med högre lösenpris och säljoptioner med lägre lösenpris.
- Utfärda köp- och säljoptioner med lägre löptid.

Vid vinst (med innehav):
- Vid nedgång: sälj 10 (hälften av) säljoptioner och köp fler aktier på den nya lägre nivån.
- Vid uppgång: utfärda köpoption på högre lösenpris, sälj de 20 innehavda säljoptionerna och köp 10 nya på ett högre lösenpris

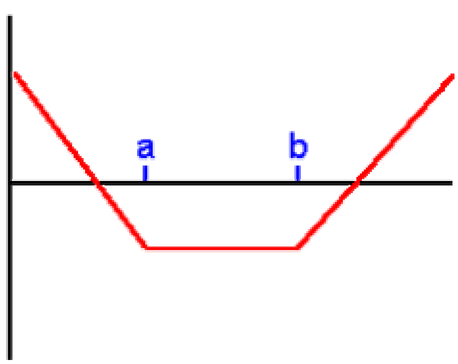
Vid förlust (med innehav):
- Utfärda 20 kontrakt säljoptioner på ett lägre lösenpris, samt 10 kontrakt köpoptioner till ett högre än ingångskursen för aktien.
- Utfärda 20 kontrakt säljoptioner med samma lösenpris i nästa lösenmånad.

<u>Exempel:</u>
Avistapris: 170 kr.
Köp en köpoption på pari för 15 kr och en säljoption på pari för 18 kr. Nettokostnaden uppgår då till 33 kr.

Avistakurs	Köp	Sälj	Resultat
110	-15	42	27
130	-15	22	7
150	-15	2	-13
170	-15	-18	-33
190	5	-18	-13
210	25	-18	7
230	45	-18	27



Köpt Vagga / Long Strangle -- [–1 1 0]



Marknadstro
Investeraren tror på marknad med mycket stor volatilitet, d.v.s. kraftig rörelse, osäker på riktningen.

Konstruktion
Köp en säljoption med lösenpris a och en köpoption med lösenpris b.

Maximal vinst
Obegränsad om marknaden går upp eller ner väldigt mycket.

Break-even
Punkten där det lägre lösenpriset – hela premien nås och då det högre lösenpriset + hela premien nås.

Förlustrisk
Begränsad till premien för de båda optionerna.

Säkerhetskrav
Inget

Kommentar
Om avistapriset inte ändras sjunker värdet med tiden eftersom tidsvärdet minskar. Sälj av den positionen som sjunker i pris när underliggande vara visar riktning.

Varför
1. Få avkastning på kraftig rörelse oavsett riktning.
2. Lägre kostnad än att köpa en strut, men kräver samtidigt kraftigare rörelse i underliggande för vinst.

Uppföljning
Vid uppgång:
- Utfärda köpoptioner med högre lösenpris och sälj innehavd säljoption.
- Sälj terminen och innehavd säljoption

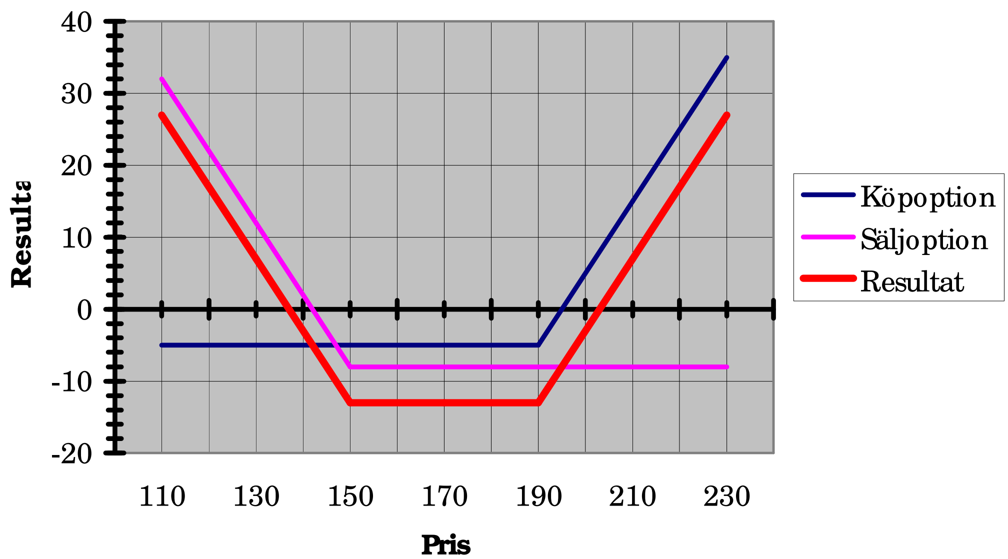
Vid nedgång:
- Utfärda säljoptioner med högre lösenpris och sälj innehavd köpoption.
- köp terminen och innehavd köpoption

Vid stillastående:
- Utfärda köpoptioner med högre lösenpris och säljoptioner med lägre lösenpris.
- Utfärda köp- och säljoptioner med lägre löptid.

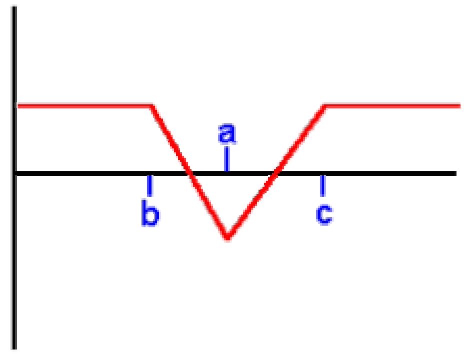
Exempel:,

Avistapris: 170 kr.
Köp en köpoption med lösenpriset 190 kr för 15 kr och en säljoption med lösenpriset 150 kr för 18 kr. Nettokostnaden uppgår då till 13 kr.

Avistakurs	Köp	Sälj	Resultat
110	-5	32	27
130	-5	12	7
150	-5	-8	-13
170	-5	-8	-13
190	-5	-8	-13
210	15	-8	7
230	35	-8	27



<u>Såld Fjäril / Short Butterfly -- [0 –1 1 0]</u>



Marknadstro
Investeraren tror på marknad med stor volatilitet.

Konstruktion
Sälj en köpoption med lågt lösenpris b.
Köp två köpoptioner med medelhögt lösenpris a.
Sälj en köpoption med högt lösenpris c

Maximal vinst
Begränsad till erhållen premie

Förlustrisk
Begränsad till skillnaden mellan det låga och medelhöga lösenpriset minus premien.

Säkerhetskrav
Kan kvittas

Kommentar
Det kan bli svårt att anskaffa och sälja snabbt

Varför
Få avkastning i en stillastående och lätt rörlig marknad samtidigt som man minimera risken.

Prisriktningsvisare:

	Call +/-	Put +/-
Värdet på underliggande ökar	+	-
Värdet på underliggande minskar	-	+
Högt lösenpris jämfört med ett lägre	-	+
Lågt lösenpris jämfört med ett högre	+	-
Lång löptid	+	+
Kort löptid	-	-
Hög volatilitet	+	+
Låg volatilitet	-	-
Hög riskfri ränta	+	-
Låg riskfri ränta	-	+
Utdelningar	-	+

Vi ser ovan att med hör riskfri ränta ökar värdet av en innehavd köpoption. När räntan stiger är det allmänt känt att börsen faller. Därför kan man undra varför köpoptionen kan öka i värde. Detta beror på följande: Om vi vill köpa en aktie i framtiden kan vi köpa en option och sedan utnyttja denna. På så sätt avsätter vi en mindre summa pengar, jämfört med att köpa aktien. Om sedan den riskfria räntan stiger får vi ju högre avkastning på den mellanskillnad mellan priset på aktien och kostnaden för vår position. Därför är vår totala position värd mer och således stiger optionen i värde.

Strategimatris

	Positiv Marknadstro	Neutral Marknadstro	Negativ marknadstro
Stigande volatilitet	Köp köpoption Positiv pris-spread Backspread Trebening Protective put	Strut Vagga Såld neutral tidsspread	Köpt säljoption Negativ prisspread Backspread Trebening
Neutral volatilitet	Köp avista/termin Köp syntetisk termin Köp sned synt. Termin	HANDLA INTE	Såld temin Såld syntetisk termin Såld sned synt. termin
Sjunkande volatilitet	Utfärda säljoptioner Positiv pris-spread Covered call Trebening Ratiospread	Såld strut Såld vagga Köpt neutral tidsspread	Utfärdad köpoption Negativ prisspread Trebening Ratiospread

INLEDNING TILL RÄNTEMARKNADEN

Vi skall här gå igenom **penningmarknaden** (the money-market) och **obligationsmarknaden** (the bond-market), samt definiera en rad begrepp och beskriva de instrument som handlas på marknaden.

Penningmarknaden består av räntebärande papper med en löptid på upp till ett år och på obligationsmarknaden handlas instrument med en löptid från ett år upp till 30 år. Det finns även de med längre löptid, men de hör till undantagen. I Storbritannien finns exempelvis ”war loans” sedan andra världskriget som aldrig löper ut. På obligationer betalas i Sverige en årlig ränta kallad **kupongränta** (coupon) och på förfallodagen (maturity, redemption) återbetalas dessutom obligationens **nominella belopp** (face-, par-, principal-, capital- eller nominal value) ut. I andra länder förekommer kuponger halvårsvis och kvartalsvis. De juridiska villkoren för en obligation beskrivs i ett dokument kallat indenture/trust deem.

Penningmarknaden består av banker och vissa fondkommissionärer som är knutna till varandra via ett mer eller mindre informellt nätverk, den så kallade **interbank-marknaden**. Dessa bankerna bestämmer varje dag den så kallade STIBOR (Stockholm Interbank Offer Rate) räntan. Detta är den svenska motsvarigheten till LIBOR, London Interbank Offer Rate. Detta är den ränta som de stora bankerna är villiga att låna ut till när de lånar av varandra.

Kunderna får priskvoteringar via bankernas kundbord. Precis som på aktiemarknaden kan vi dela in marknaden i en **avistamarknad** och en **derivatmarknad**. Avistamarknaden för penninginstrument innefattar köp och försäljningar av instrument med omedelbar leverans, normalt två bankdagar efter affärsdagen.

Det finns tre huvudtyper av instrument på penningmarknaden:

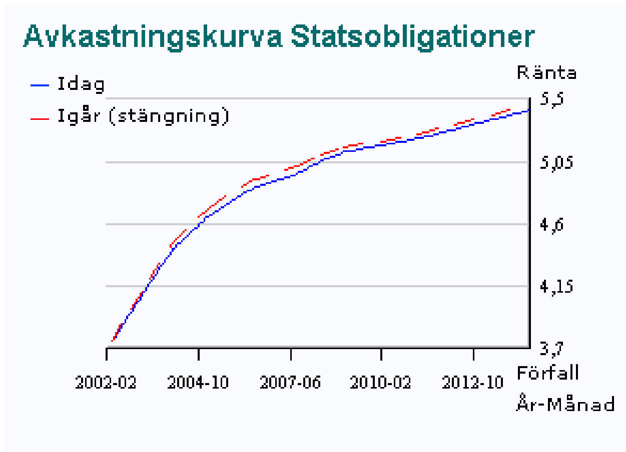
- **Depositlån**, vilket är en standardiserad form av in- och utlåning med korta löptider. Löptiderna varierar mellan en dag och upp till ett år.
- **Diskonteringspapper**: **stadsskuldsväxlar** (bills) och **certifikat**. Detta är räntebärande papper med löptider upp till ett år.
- **Repor**, vilket är en belåning av värdepapper. Dessa har en löptid från en dag upp till ett halvår.

När man värderar instrumenten gör man detta genom att beräkna den **nominella räntan** och **likvidbeloppet**. Avkastningen mäts i ränta, på penningmarknaden i **enkel årsränta** (annual compounding). För att beräkna den nominella avkastningen måste man känna till de **räntebaskonventioner** som används på marknaden. Dessa har fastställts av den

Svenska Fondhandlareföreningen. På den svenska penningmarknaden tillämpas två **likviddagar**. Detta innebär att leverans sker två bankdagar efter avslutsdagen.

I figuren nedan ser vi en typisk avkastningskurva (yield curve) för stadsobligationer (bonds). I England benämns dessa Gilts. Engelska gilts ges ut som korta, medellånga, långa, utan slutdag och baserade på ett index exempelvis styrt av inflationen.

I London prissätts ränteinstrumenten i fractions, antal sextondelar, 32:a delar och ibland ner till 64:e delar. Orsaken kommer från deras komplicerade valutan (Pund, Shilling, Pence).



Denna kurva startar vid 3.75%, som när detta skrivs är den statliga styrräntan. Med ledning av denna prissätts flera hundra andra obligationer, utgivna av bland annat kommuner och företag. Deras räntor ligger över den statliga räntekurvan ovan. Utestående belopp på den svenska penning- respektive obligationsmarknaden är 2001 cirka 400 respektive 1600 miljarder svenska kronor.

Utbudet av lån växte fram i huvudsak på grund av två orsaker:

- Statens budgetunderskott. Dessa lån emitteras av Riksgäldskontoret.
- Finansieringen av bostadsbyggandet. Dessa lån emitteras av bostadsinstitut, SBABm Spintab, Stadshypotek med flera.

I Norge, där man inte har något budgetunderskott emitteras ändå obligationer. Orsaken är, att se till att man har en likvid fungerande marknad för ränteinstrument.

Penningmarknaden har tre huvuduppgifter, att:

- Fördela sparandet. Koppla ihop långivare med låntagare.
- Sprida ränterisken mellan olika aktörer.
- Tillhandahålla betalningsmedel, d.v.s. hantera över- och underskottslikviditet.

Aktörerna på marknaden kan delas in i tre grupper:

- Emittenter: I huvudsak staten och bostadsinstituten, som behöver låna.
- Intermediärer: Åtta auktoriserade återförsäljare (banker och fondkommissionärer) för Riksgäldskontoret. Dessa agerar som Market-Makers.
- Investerare: I huvudsak försäkringsbolag och pensionsfonder.

De åtta auktoriserade återförsäljarna till Riksgäldskontoret är idag (2001):

- ABN Amro Bank NV
- Schroder Salomon Smith Barney
- Nordea AB
- Skandinaviska Enskilda Banken AB
- FöreninsSparbanken AB
- Svenska Handelsbanken AB
- Den Danske Bank Consensus A/S
- E Öhman J:or Fondkommision AB

Man delar in finansmarknaden i:

- Kommersiella banker, som lånar ut till privatpersoner och mindre företag.
- Investmentbanker (Merchant) som lånar ut till statsmakterna och större företag.
- Intermediärer (stockbroking).
- Fond- och portföljförvaltare.
- Penningmarknad och valutahandlare.
- Derivathandel och
- Commodity handlare (varor; olja, metaller, soja, majs...).

På derivatsidan handlas i Sverige fyra typer av standardiserade terminer. Dessa finns för statsobligationer, med 2, 5 och 10 års löptid, och bostadsobligationer med 2 eller 5 års löptid. Terminernas löptid är mellan 3 och 6 månader och nya terminsserier registreras med jämna mellanrum. Standardiserade terminer finns även för 6 månaders stadsskuldsväxlar. Den fjärde standardiserade terminsformen är en termin på 3-månaders STIBOR ränta.

Ett begrepp man ofta stöter på är olika så kallade Euromarkets, ex Eurodollar market. Dessa har inget med Europa att göra. Begreppet Eurodollar uppstod när Sovjetunionen under kalla krigets dagar handlade med sin olja i dollar. Dessa Eurodollar kallades då Petro dollar. Sovjetunionen ville inte riskera att dessa dollar skulle frysas i USA vid en eventuell krissituation. Därför deponerade de dessa via Norge i (E. D. N. Euro Dollar Norway) som i sin tur deponerade dessa i Bank of New York. De förlorade därmed lite i ränta, men minskade risken att få pengarna frysta. Idag innebär en Euromarket att ett lands valuta handlas i ett annat land. En vanlig instrumenttyp är Eurobonds, exempel:

- Yankee obligationer på dollar handlade utanför USA
- Bulldog obligationer på pund handlade utanför England
- Samurai obligationer på yen handlade utanför Japan

RÄNTEBERÄKNINGAR

Då vi räknar ränta på olika typer av instrument använder vi oss av olika uttryck beroende av instrumenttyp. Om man räknar avkastning på aktiemarknaden används följande samband mellan **enkel ränta**, placerat belopp och belopp på förfallodagen:

$$F = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

där

P = placerat belopp,
r = enkel årsränta,
F = placerat belopp plus ränta.

På penningmarknaden används som mått på **avkastningen**:

$$F = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{d}{360}\right)$$

där

P = placerat belopp,
r = enkel årsränta,
d = antalet dagar till förfall.
F = placerat belopp plus ränta.

På liknande sätt beräknas avkastningen med avseende på effektiv årsränta med:

$$F = P \cdot \left(1 + \frac{r_c}{100}\right)^{\frac{d}{360}}$$

där

P = placerat belopp,
r_c = effektiv årsränta,
d = löptiden i antal dagar.
F = placerat belopp plus ränta.

För statsskuldväxlar och certifikat använder man för att beräkna det **diskonterade nuvärdet** uttrycket:

$$P = \frac{N}{1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{d}{360}}$$

där

P = likvidbelopp, nuvärdet,
r = enkel årsränta, marknadsräntan,
d = återstående löptid i dagar.
N = det nominella beloppet (framtida värdet).

Det existerar fyra olika så kallade **räntebaser**. Dessa är:

- **Monney Market Base** eller Act/360 där Act är resterande faktiska dagar i månaden.
- **Bond Base** eller 30/360, där man låter alla månader bestå av 30 dagar.
- **Imperial Base** eller Act/365 där Act är resterande faktiska dagar i månaden.
- **Actual-Actual** där man även tar hänsyn till skottår och använde faktiska dagar.

DEPOSITLÅN

Depositmarknaden kan sägas vara en förlängning av **dagslånemarknaden**, en marknad för lån av pengar från en dag till nästkommande bankdag. Det ligger i bankers och företags intresse att kunna placera pengar under längre tid än en dag som skapat denna marknad. **STIBOR**, Stockholm Interbank Offered Rate är som vi nämnt en **fixing** (fastställd ränta) baserad på åtta affärsbankers utlåningsräntor på dipositmarknaden. Varje bank anger den räntan som den är villig att låna ut pengar till, till de andra stiborbankerna. Fixingen utgör ett medelvärde av de olika bankernas räntesatser klockan 11:00 varje bankdag. Vid beräkningen bortser man från den lägsta och den högsta räntan för respektive löptid.

Löptiderna som noteras är:

- T/N En dag (Tomorrow Next).
- S/N Två dagar (Spot Next).
- S/W En vecka (Spot Week).
- 1W En vecka.
- 1M En månad.
- 2M Två månader.
- 3M Tre månader.
- 6M Sex månader.
- 9M Nio månader.
- 1Y Ett år.

Ibland förekommer även O/N (Over Night) dagslån, S/N (Spot Next) två bankdagar och S/W (Spot Week). Lån på depositmarknaden noteras som enkla årsräntor med normalt två decimaler. Dessa kallas för **räntepunkter**. Fem räntepunkter motsvarar således 0.05 %. Heltalen i räntesatserna kallas för **figurer**.

Andra vanliga fixingar är LIBOR(EUR) (London Interbank Offered Rate), LIBOR (USD) (dollarn fixas i London), NIBOR (NKR) och CIBOR (DKR).

Kurserna på STIBOR kan man finna på OM Stockholmsbörsens webbplats:

STIBOR-fixing	SENAST	Datum	UPPDAT
TN	3.850	20011212	11:05
1W	3.852	20011212	11:05
1M	3.910	20011212	11:05
2M	3.920	20011212	11:05
3M	3.920	20011212	11:05
6M	3.920	20011212	11:05
9M	3.972	20011212	11:05
12M	4.105	20011212	11:05

(dagligen kl 11:05)

<u>Exempel</u>: Räntenotering av ett depositlån:

6M SEK DEPO 4.35-50

Betydelse:

Löptid	Valuta	Instrument	Inlåning	Utlåning
6 Månader	SEK	DEPO	4.35%	4.50%

Stora figuren = 4, (Bid = 4.35, Offer = 4.50).

Skillnaden mellan utlåningsräntan och inlåningsräntan (**prisspreaden**) är 15 räntepunkter. Bid är den räntan som banken är villig att låna ut kvoterat belopp av valutan, för leverans på spotdagen/likviddagen, d.v.s. två dagar efter affärsdagen (T+2). Prissättningen på depositlån beräknas på följande sätt:

$$F = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{d}{360}\right)$$

där

P = lånat belopp,
r = enkel årsränta,
d = antalet kalenderdagar för löptiden.
F = återbetalninsbelopp.

CD – Certificates of Deposit

En CD är ett certifikat på att någon har deponerat ett givet belopp på en viss bank. Då den inte anger vem som deponerat beloppet är certifikatet säljbart till en tredje part. Deponerat belopp plus upplupen ränta betalas till innehavaren på dagen för förfall. Räntan på en CD är något lägre än på andra fixa depositlån. Andra liknande instrument är BA's (Bankers' Acceptances) och CP's (Commercial Papers).

STATSSKULDSVÄXLAR

Statsskuldsväxlar, SSVX (treasury bills) är värdepapper på penningmarknaden bestående av så kallade **diskonteringspapper.** Andra diskonteringsinstrument är **bostadscertifikat**, **bankcertifikat**, **kommun-** och **företagscertifikat**. Vad som skiljer de olika instrumenten är **emittenten** (utlånaren). För övrigt handlas de enligt samma princip. För aktuell information kan man gå in på Riksgäldskontorets hemsida: www.rgk.se (Se Nominella obligationer, statsskuldväxlar under rubriken "Investerarinformation")

Emittent
Emittent för statsskuldväxlar är staten genom Riksgäldskontoret.

Skuldebrev
Typ av skuldebrev är löpande innehavarskuldebrev.

Löptider
Upp till ett år, ofta emitteras de på 13, 26 och 52 månader. Löptider över ett år kan i undantagsfall förekomma.

Emissioner
Emissioner sker enligt Riksgäldskontorets emissionsschema genom anbudsauktioner. Anbuden lämnas genom de av Riksgälden auktoriserade återförsäljarna, dvs vissa banker och värdepappersbolag. De anbud med lägst ränta accepteras först och därefter i stigande ordning tills den angivna emissionsvolymen är fylld.

Andrahandsmarknaden
Likviditeten i statsskuldväxelmarknaden får betraktas som god. Andrahandsmarknaden består av en telefonmarknad där vissa banker och värdepappersbolag agerar market-makers, dvs marknadsgaranter. Statsskuldväxlar kan även handlas på SOX som är en elektronisk börs inom Stockholmsbörsen.

Värdering
Prissättningen på instrumentet anges som enkel årsränta. Eftersom statsskuldväxlar är diskonteringsinstrument betalar inte köparen växelns nominella belopp utan det nominella beloppet diskonterat med avslutsräntan. För att beräkna det diskonterade beloppet *P* (nuvärdet) kallat likvidbeloppet, används formeln nedan:

$$P = \frac{N}{1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{d}{360}}$$

där

P = likvidbelopp,
r = enkel årsränta,
d = antalet återstående kalenderdagar för löptiden.
N = det nominella beloppet.

Leverans
Leverans av och likviddag för statsskuldväxlar inträffar två bankdagar efter affärsavslutsdagen.

Kurserna på Statsskuldväxlar kan man finna på OM Stockholmsbörsens webbplats:

2001-12-12 13:40

Marknadsräntor | Statsskuldväxlar

NAMN	MID	+/-	HÖGST	LÄGST	UPPDAT
SSV-01M	3.715	0.000	3.725	3.715	08:44
SSV-02M	0.000	0.000	0.000	0.000	06:10
SSV-03M	3.705	-0.020	3.735	3.705	13:26
SSV-04M	3.720	-0.015	3.755	3.720	13:24
SSV-05M	3.735	-0.020	3.775	3.735	13:26
SSV-06M	3.755	-0.020	3.805	3.755	13:26
SSV-09M	3.835	-0.030	3.905	3.835	13:27
SSV-12M	3.960	-0.025	4.025	3.960	13:27
SSV-13M	0.000	0.000	0.000	0.000	06:10
SSV-14M	0.000	0.000	0.000	0.000	06:10
SSV-16M	0.000	0.000	0.000	0.000	06:10
SSV-17M	0.000	0.000	0.000	0.000	05:10

Staten | **Statsskuldväxlar**

Lån	Förfall	Snitt ränta	Högsta ränta	Lägsta ränta	Omsättning Mkr
SSV 0112	20011219	3.737	3.750	3.730	2509.0
SSV 0201	20020116	3.714	3.720	3.700	317.0
SSV 0203	20020320	3.705	3.730	3.600	2025.0
SSV 0204	20020417	3.710	3.750	3.710	2105.0
SSV 0205	20020515	0.000	0.000	0.000	0.0
SSV 0206	20020619	3.772	3.790	3.770	605.0
SSV 0209	20020918	3.867	3.870	3.865	300.0
SSV 0212	20021218	0.000	0.000	0.000	0.0
Total omsättning Mkr					7861
Avser handelsdag					20011211

<u>Exempel</u>: Räntenotering av en statsskuldsväxel:

SSVX0112 4.25-22

Betydelse:

Förfall	Köper	Säljer
December 2001	4.25%	4.22%

Stora figuren = 4, (Bid = 4.25, Offer = 4.22).

Skillnaden mellan köp- och säljräntan (prisspreaden) är här 3 räntepunkter. Bid är den räntan som banken är villig att köpa statsskuldväxeln på spotdagen, d.v.s. två dagar efter affärsdagen (T+2). Att köpa ett diskonteringsinstrument innebär ju att man placerar kapital, d.v.s. lånar ut pengar. För detta vill banken ha högre ränta än när man lånar in pengar, d.v.s. säljer statsskuldväxeln. Ask är den ränta banken är villig att sälja motsvarande statsskuldväxel för leverans på spotdagen. Att sälja ett diskonteringsinstrument kan ses som en finansiering, d.v.s. man lånar in pengar. För detta vill banken ge en lägre ränta än när den lånar ut pengar d.v.s. köper statsskuldväxeln.

Amerikanska T-bills prissätts som ett procentuellt avdrag (discount rate) på det nominella beloppet i stället för ränta på den placerade beloppet. För att räkna om denna rabatt, till ett mer adekvat avkastningsmått som enkel årsränta, krävs att man med hjälp av rabatten beräknar likvidbeloppet och utifrån det beräknar den enkla årsräntan. Den omräknade räntan kallas för **bond equivalent yield**.

Avslut i statsskuldväxelmarknaden görs för närvarande i tio utestående löptider. Förfallodagen inträffar den tredje onsdagen i förfallomånaden, den så kallade **IMM-dagen**.

Det nominella beloppet är det belopp som Riksgäldskontoret utbetalar till innehavaren till statsskuldväxeln på förfallodagen. Prissättningen på svenska statsskuldväxlar och certifikat ges som enkel årsränt. Eftersom de är diskonteringsinstrument betalar inte köparen växelns nominella belopp utan detta diskonterat med marknadsräntan.

Statsskuldväxlar används ofta som säkerheter för andra typer av affärer. En liten ”spelare” får bara använda 95% av värdet på en statsskuldväxel som säkerhet.

För att beräkna likvidbeloppet (nuvärdet) P vid ett köp av en statsskuldväxel används formeln:

$$P = \frac{F}{1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{d}{360}}$$

där

P = likvidbelopp,
r = enkel årsränta,
d = antalet återstående kalenderdagar för löptiden.
F = det nominella beloppet.

STATSOBLIGATIONER

Statsobligationer, SO (treasury bonds) är värdepapper på obligationsmarknaden och är ett så kallat **diskonteringspapper.**

Emittent
Statsobligationer emitteras av staten genom Riksgäldskontoret.

Typ av skuldebrev
Skuldebrevet är ett så kallat löpande innehavarskuldebrev, en kupongobligation med årsvis betalning av kupong.

Löptid
Över två år vid emissioner. Löptider upp till 16 år har förekommit.

Emissioner
Emissioner sker enligt Riksgäldskontorets emissionsschema genom anbudsauktioner. Anbuden lämnas genom de av Riksgälden auktoriserade återförsäljarna, dvs vissa banker och värdepappersbolag. De anbud med högst kurs accepteras först och därefter i fallande ordning tills den angivna emissionsvolymen är fylld.

Andrahandsmarknaden
Likviditeten i statsobligationsmarknaden får betraktas som mycket god. Andrahandsmarknaden består av en telefonmarknad där vissa banker och värdepappersbolag agerar market-makers, dvs marknadsgaranter. Statsobligationer kan även handlas på SOX.

Värdering
Prissättningen på instrumentet anges som en effektiv årsränta. Eftersom statsobligationer är diskonteringsinstrument betalar inte köparen obligationens nominella belopp utan kursvärdet på obligationen samt upplupen kupong sedan föregående ränteförfallodag. För att beräkna priset (*P*), dvs kurs plus upplupen kupong, används formeln nedan:

$$P = \frac{N}{\left(1+\frac{Y}{100}\right)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{\left(1+\frac{Y}{100}\right)^i}$$

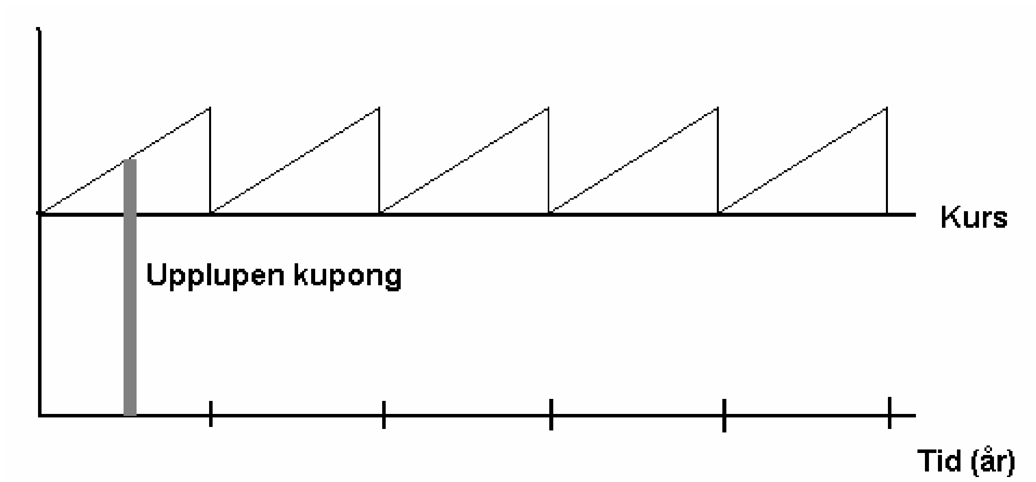
vilken kan förenklas till:

$$P = \frac{N + \frac{C}{Y/100} \cdot \left[\left(1+\frac{y}{100}\right)^k - 1\right]}{\left(1+\frac{y}{100}\right)^n}$$

där

P	= likvidbeloppet.
Y	= marknadsräntan (marknadens avkastningskrav) yield to maturity.
k	= antal kvarvarande kupongförfall, antalet kapitaliseringar.
C	= kupongens storlek = $r{\cdot}N$, där r är räntan på obligationen.
N	= det nominella beloppet.
n	= löptiden för obligationen (Räntebas: 30E/360).

Man säger att man **handlar på par** om marknadsräntan är lika med kupongräntan. Kursen för en obligation ser ut som i figuren nedan. Orsaken till det ”hackiga” utseendet, är de så kallade kupongutbetalningarna. Därför stiger priset (dirty price) till kurs (clean price) plus kupong (accrued interest) linjärt till kupongutbetalningen, varefter den faller ner till kursnivå igen. Det tidsberoende värdet som adderats till kursen kallas för **upplupen kupong**. Med andra ord är upplupen kupong den ersättning innehavaren tjänat på obligationen utan att någon kupongutbetalning för perioden har skett. Kursen för en obligation är därför priser rensat med upplupen kupong. Därför är kursen ett bättre mått än priset vid värderingen av obligationen över tiden.



Den feta (räta linjen) kallas optionens kurs och den sågtandade optionens pris. Priset och kursen ges av:

$$P = \frac{\frac{k}{1+r}\cdot\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}-1\right]+N}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1+d/360}}$$

$$Kurs = P - k\cdot\frac{360-d}{360}$$

där

r	= Marknadsräntan
n	= Antalet återstående kuponger
d	= Antalet dagar till nästa kupongutbetalning
N	= Nominellt belopp
k	= Nominellt kupongvärde

Den negativa termen i formeln för kursen är den så kallade upplupna kupongen.

Leverans

Leverans av och likviddag för statsobligationer inträffar tre bankdagar efter avslutsdagen. Kupongränta erhålls på kupongdagen på det konto i VPC-systemet på vilket obligationen är inregistrerad.

Kurserna på statsobligationer kan man fina på OM Stockholmsbörsens webbplats (se nedan).

2001-12-12 13:37

Marknadsräntor | Statsobligationer

NAMN	MID	+/-	HÖGST	LÄGST	FÖRFALLODATUM	UPPDAT
SO-1039	3.750	-0.005	3.775	3.747	20020412	13:16
SO-1033	4.180	-0.025	4.270	4.180	20030505	13:09
SO-1042	4.415	-0.045	4.530	4.415	20040115	13:24
SO-1035	4.665	-0.053	4.765	4.665	20050209	13:24
SO-1044	4.848	-0.057	4.970	4.848	20060420	13:24
SO-1038	4.900	-0.050	4.955	4.900	20061025	10:51
SO-1037	4.960	-0.055	5.070	4.960	20070815	13:18
SO-1040	5.058	-0.044	5.150	5.058	20080505	13:23
SO-1043	5.120	-0.040	5.205	5.120	20090128	13:24
SO-1034	4.955	-0.195	5.150	4.955	20090420	10:51
SO-1045	5.218	-0.032	5.300	5.215	20110311	13:24
SO-1041	5.418	-0.029	5.500	5.415	20140505	13:24

BOSTADSOBLIGATIONER

Bostadsobligationer är diskonteringsinstrument som ges ut av emittenter, de så kallade mellanhandsinstituten på bostadskreditmarknaden.

Emittent
Några de största emittenterna är: *Statshypotekskassan* (*Caisse*), *AB Spintab, Statens Bostadsfinansierings AB (SBAB), SEB BoLån AB* och *Handelsbanken Hypotek AB*. De emitterar löpande obligationer för att finansiera sin kreditgivning. Även företags- och kommunfinansierade mellanhandsinstitut finansierar sin kreditgivning på samma sätt. Några exempel på dessa emittenterna är: *Svensk Exportkredit AB* (SEK), *Industrikredit AB* och *Kommuninvest i Sverige AB*.

Skuldebrev
Skuldebreven är så kallade **löpande innehavarskuldebrev**, en **kupongobligation** med som regel årsvis eller halvårsvis betalning av kupong.

Löptid
Löptiden är som regel i över två år vid emissionstillfället.

Emissioner
Mellanhandsinstituten säljer sina obligationer genom fasta emissionssyndikat bestående av svenska banker och värdepappersbolag samt i vissa fall utländska banker. Emissioner sker fortlöpande när bostadsinstituten har upplåningsbehov för att finansiera sin kreditgivning till låntagare mot säkerheter i bottenlåneinteckningar i fastigheter.

Andrahandsmarknaden
Likviditeten i bostadsobligationsmarknaden får betraktas som ganska god, för de större bostadsinstitutens obligationer. Andrahandsmarknaden består av en telefonmarknad där vissa banker och värdepappersbolag agerar market-makers, dvs marknadsgaranter. Bostadsobligationer kan även handlas på SOX.

Värdering
Prissättningen på instrumentet anges som en effektiv årsränta. Eftersom bostadsobligationer är **diskonteringsinstrument** betalar inte köparen obligationens nominella belopp utan kursvärdet på obligationen samt **upplupen kupong** sedan föregående ränteförfallodag. Priset (*P*) för en bostadsobligation med årlig kupongutbetalning, beräknas på samma sätt som för **statsobligationer**:

$$P = \frac{F}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n+\frac{d}{360}}} + \sum_{i=0}^{n} \frac{k}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{i+\frac{d}{360}}}$$

där

k = kupongvärdet = $F \cdot \frac{r}{100}$
r = effektiv årsränta
n = antalet hela år till förfall
d = antal dagar till nästa kupongutbetalning

Leverans
Leverans av och likviddag för bostadsobligationer inträffar tre bankdagar efter avslutsdagen. Kupongränta erhålls på kupongdagen på det konto i VPC-systemet på vilket obligationen är inregistrerad - alternativt genom inkassering i bank av de räntekuponger som följer med obligationen.

På OM Stockholmsbörsens hemsida finns information om bostadsräntor:

Villaräntor	RÖRLIG	3M	1ÅR	2ÅR	3ÅR	5ÅR	10ÅR
Bokredit	5.00	---	---	5.65	---	6.50	---
Europeloan	---	4.88	---	5.33	---	6.19	6.54
Ikanobanken	---	4.95	5.05	5.50	6.00	6.40	6.85
JP Nordiska	5.20	---	---	5.80	---	6.60	---
Länsförsäkringar Bank	---	4.95	5.05	5.50	6.00	6.40	6.85
Nordea Hypotek	5.40	5.30	5.42	5.89	6.25	6.69	---
SalusAnsvar	---	4.95	5.05	5.50	---	6.40	6.85
SBAB	---	4.95	5.05	5.50	6.00	6.40	6.85
SEB Bolån	5.40	---	5.50	5.90	6.25	6.70	7.00
SHB/Stadshypotek	5.40	---	5.50	6.05	6.40	6.80	7.00
Skandiabanken	---	4.95	5.10	5.55	6.00	6.40	---
Spintab	---	5.40	---	6.00	---	6.80	---
Spintab/Euro	---	4.80	---	---	---	---	---

Bostadsrätter	RÖRLIG	3M	1ÅR	2ÅR	3ÅR	5ÅR	10ÅR
Europeloan	---	5.23	---	5.68	---	6.54	6.89
Ikanobanken	---	5.35	5.35	5.70	6.20	6.60	7.05
JP Nordiska	5.70	---	---	6.30	---	7.10	---
Nordea Hypotek	5.90	5.80	5.92	6.39	6.75	7.19	---
HSB Bank	5.40	---	5.55	6.05	6.45	6.90	---
SalusAnsvar	---	5.35	5.45	5.90	---	6.80	7.25
SBAB	---	5.35	5.45	5.90	6.40	6.80	7.25
SEB Bolån	5.90	---	6.00	6.40	6.75	7.20	7.50
SHB/Stadshypotek	5.90	---	6.00	6.55	6.90	7.30	7.50
Skandiabanken	---	5.45	5.60	6.05	6.50	6.90	---
Spintab	---	5.90	---	6.50	---	7.30	---

2001-12-12 13:38

Marknadsräntor | Bostadsobligationer

INSTITUT	NAMN	MID	+/-	HÖGST	LÄGST	FÖRFALLODATUM	UPPDAT
Stadshypotek	CAIO-1555	3.875	0.027	3.900	3.848	20020619	13:25
-	CAIO-1558	4.253	-0.029	4.360	4.253	20030319	13:25
-	CAIO-1559	4.615	-0.040	4.720	4.615	20031217	13:25
-	CAIO-1562	4.912	-0.043	5.020	4.912	20040915	13:25
-	CAIO-1563	5.135	-0.050	5.255	5.135	20050615	13:24
-	CAIO-1564	5.313	-0.052	5.425	5.313	20060315	13:25
-	CAIO-1560	6.410	-0.055	6.465	6.410	20080618	13:24
-	CAIO-1565	5.445	-0.055	5.565	5.445	---------------	13:25
Nordbanken	NBHO-5511	3.868	-0.037	3.905	3.868	20020619	13:25
-	NBHO-5512	4.410	-0.045	4.540	4.410	20030618	13:25
-	NBHO-5514	4.840	-0.050	4.960	4.840	20040616	13:24
-	NBHO-5515	5.218	-0.049	5.335	5.218	20050921	13:24
-	NBHO-5516	5.385	-0.050	5.495	5.385	---------------	13:24
SBAB	SBAO-116	4.008	-0.032	4.060	4.005	20020918	13:24
-	SBAO-117	4.530	-0.043	4.640	4.530	20031015	13:25
-	SBAO-119	5.313	-0.049	5.425	5.313	20060315	13:25
-	SBAO-118	5.638	-0.047	5.730	5.638	20081217	13:24
-	SPIO-165	4.012	-0.033	4.060	4.012	20020918	13:24
Spintab	SPIO-169	4.508	-0.042	4.620	4.508	20030917	13:25
-	SPIO-161	4.827	-0.048	4.940	4.827	20040615	13:25
-	SPIO-170	5.140	-0.050	5.265	5.140	20050615	13:24
-	SPIO-168	5.653	-0.047	5.745	5.653	20090420	13:24
-	SPIO-166	6.060	-0.050	6.110	6.055	20140505	13:24
-	SPIO-171	5.370	-0.050	5.480	5.370	---------------	13:25

CAIO = Stadshypotek

NBHO = Nordbanken

SBAO = SBAB

SPIO = Spintab

NÅGOT OM RÄNTEDERIVAT

Räntederivat (*fixed income derivatives*) är instrument vars värde är härlett ur ett framtida värde på en underliggande marknadsränta. Man kan dela in räntederivaten i fyra grupper:

1. **Börshandlade derivat**. Derivatkonstruktioner som handlas på en formell börs.
2. **Klassiska derivat**. Derivatkonstruktioner som introducerades på 1980-talet, bl a ränteswappar.
3. **Andra generationens derivat**. Derivatkonstruktioner som introducerades på 1990-talet. Dessa kallas ofta för exotiska och är vanliga bl a i Frankrike.
4. **Strukturerade produkter**. Obligationer/värdepapper med någon form av derivatkonstruktion.

I grunden är ett derivatinstrument ett avtal mellan två parter som överenskommer om att utväxla en tillgång eller ett belopp på eller innan ett framtida datum på ett i förväg fastställt pris.

De tre grundkonstruktionerna är:

- Terminer
- Swappar
- Optioner

RÄNTEFUTURES

Gemensamt för s.k. Bond Futures är att de är:

- Kvoterade på kurs (clean price).
- Kontrakten är börshandlade.
- Kontrakten är dagligt kontantavräknade.
- Kontrakten är leveranskontrakt.

Öppna positioner på kontraktets stängningsdag kommer att leda till leverans av underliggande leveransbara obligationer. Ett mycket litet antal av de futurekontrakts som omsätts går till leverans eftersom de flesta marknadsaktörer vid spekulation och räntesäkringar väljer att stänga sina öppna positioner innan leveransdagen, genom att köpa tillbaka sålda kontrakt eller sälja tidigare köpta.

Tidigare handlades på Stockholmsbörsen ett kontrakt kallat räntefutures. Trots att de inte handlas för tillfället skall vi ge en kortfattad beskrivning av deras princip. En future påminner mycket om en termin (forward). Det är således ett kontrakt på en framtida leverans av en Statsobligation. Men det är två viktiga skillnader. Dels sker en daglig kontantavräkning av vinst och förlust som bestäms vid marknadens stängning och dels är den leveransbara varan någon av obligationerna i den så kallade leveranskorgen. Leveranskorgen består av de obligationer som faller inom ramen för respektive futures kontraktspecifikation. Syftet med flera leveransbara obligationer till ett kontrakt är att man vill undvika risken för materialbrist. Obligationsfuturen skall ju utgöra en benchmark för de svenska obligationsräntorna och det vore ju olyckligt om den började att mer återspegla bristen i en viss obligation vid leverans än marknadens krav på avkastning. Lösningen är då att tillåta leverans av fler än en obligation.

För att justera för de leveransbara obligationernas olika löptider och kuponger används en så kallad prisfaktor. Denna gör att man lättare kan jämföra leveranskorgens obligationer med varandra. En prisfaktor beräknas för varje levererbar obligation och leveransdag Denna prisfaktor är sedan konstant under kontraktets hela löptid.

Prisfaktorn x Futurepriset = Den levererbara obligationens kurs på leveransdagen

På leveransdagen multipliceras prisfaktorn med futurekontraktets pris och man får på detta sätt fram obligationens kurs, d.v.s. obligationens pris exklusive upplupen kupong. Detta är obligationens ”clean price”.

De kontrakt som fanns baserades på benchmarklån emitterade av den svenska staten med ungefär samma löptid. Det finns två kontrakt: 2STAT, med 2 års löptid och 10STAT med 10 års löptid och 6% ränta. 10STAT baseras på benchmarklån med 8 till 12 år kvar till förfall och med en emitterad stock på minst 20 Miljarder kronor.

När man väl fastslagit vilka obligationer som är leveransbara till ett kontrakt återstår att konstruera ett index som gör att de leveransbara optionerna kan handlas till ett unikt futurepris. Problemet är att futuren handlas på kurs och de leveransbara obligationerna kommer vid lika marknadsränta ha olika kurs. Lösningen består i att man räknar fram ett index till varje leveransbar obligation. Obligationernas kurs dividerat med deras respektive index skall ge futurepriset. Vid lika marknadsränta skall futurepriset bli lika för obligationerna. Ett första steg i processen är att skapa en kupongränta för futurekontraktet. Formeln för att beräkna prisfaktorn ges av:

$$Pf = \frac{1}{\left(1+\frac{r_c}{100}\right)^{f/12}}\left[\frac{c}{M}\left(\left(1+\frac{r_c}{100}\right)-\frac{1}{\left(1+\frac{r_c}{100}\right)^{n}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{r_c}{100}\right)^{n}}\right]-\frac{c}{100}\left(1-\frac{f}{12}\right)$$

där

P_f = Prisfaktorn (som avrundas till 6 decimaler).
r_c = Kupongräntan för den konstruerade obligationen.
c = Kupongräntan för den leveransbara obligationen.
n = Antalet hela år som återstår av den leveransbara obligationens löptid räknad från nästa kupongdag (avrundas neråt).
f = Antalet hela månader från leveransdagen av kontraktet till dagen för leverans av den leveransbara obligationen (avrundas neråt).

Om $c > r_c \Rightarrow P_f > 1$
$c < r_c \Rightarrow P_f < 1$
$c = r_c \Rightarrow P_f = 1$

Någon obligation kommer att bli billigare att leverera än de övriga, eftersom leveranskursen = futurekursen multiplicerat prisfaktorn. Därför kommer futuren att prissättas efter denna. Vi ser också en imperfektion i prisfaktorn. Denna är medvetet inbyggd för att favorisera en av de leveransbara obligationerna en aning. I annat fall skulle små förändringar i marknadsräntan leda till ständiga byten av den leveransbara obligationen.

För att beräkna vilken av obligationerna som är billigast att leverera (CTD Cheepest To Deliver) beräknar man den implicita reporäntan för varje obligation. Denna ges av:

$$CTD = \frac{\frac{P_{future}}{100} \cdot P_f \cdot N + U - P_{obligation}}{P_{obligation}} \cdot \frac{360}{d}$$

där $\frac{P_{future}}{100} \cdot P_f \cdot N + U$ är leveranslikviden. Den obligation med störst CTD är den som är billigast att leverera.

Leverans

Obligationerna levererades till den fix som fastställdes klockan 12:30 den sista handelsdagen. Leveranspriset beräknades som

$$P = \frac{Fix}{100} \cdot Pf \cdot N + U$$

där

Fix = den fastställda fixen.
Pf = prisfaktorn för den levererade obligationen
N = det nominella beloppet
U = den upplupna kupongen

Kontraktsbelopp

1 miljon kronor nominellt.

Kontraktbas

Kontraktet avser en teoretisk obligation med 6% kupong.

Kvotering

Prissättning sker i hundradels procent med 100 som parivärde. Prisförändringar uttrycks i kursticks om 0.01 per kontrakt. Ett kurstick motsvarar 100 kronor.

Löptid

sexmånaderskontrak noteras löpande varje slutmånad.

Slutmånad

IMM-månaderna mars, juni, september och december.

Kontantavräkning
Upplupen vinst/förlust regleras varje dag, så kallad mark to market.

Daglig fix
Fix för den dagliga avräkningen fastställs klockan 16:15 som medelvärde av bästa köp- och bästa säljkurs.

Marginalsäkerheter
Clearing bidrar till en effektivare marknad eftersom samtliga aktörer kan agera utan att behöva väga in den ursprungliga motpartsrisken i prisbilden. Men för att hantera riskerna och garantera kontraktets fullgörande kräver börsen (clearinghuset) en fix säkerhet (initial margin). Denna är 10 000 kronor per kontrakt i 2STAT och 22 000 kronor per kontrakt för 10STAT.

Leveranskorg
Stadsobligationslån med 1.5 till 3.5 års återstående löptid från leveransdagen för 2STAT och 8 till 12 års löptid för 10STAT.

Staten | **Obligationer (Benchmark)**

Lån	Förfall	Snitt ränta	Högsta ränta	Lägsta ränta	Omsättning Mkr
STAT 1033	20030505	4.213	4.220	4.200	1545.0
STAT 1042	20040115	4.467	4.490	4.455	3386.0
STAT 1035	20050209	4.722	4.740	4.715	908.0
STAT EU44	20060420	0.000	0.000	0.000	0.0
STAT SV44	20060420	4.906	4.975	4.725	3191.8
STAT 1037	20070815	5.024	5.040	5.015	943.0
STAT 1040	20080505	5.100	5.100	5.100	2.0
STAT EU43	20090128	0.000	0.000	0.000	0.0
STAT SV43	20090128	5.174	5.185	5.150	961.0
STAT 1045	20110315	5.253	5.275	5.220	1978.0
STAT 1041	20140505	5.458	5.475	5.450	20.0
Total omsättning Mkr					12934.8
Avser handelsdag					20011211

Det mest populära futurekontraktet är tre-månadskontraktet på korta räntan i Eurodollar. Detta handlas på CME. En Eurodollar är en US-dollar med deposit i en bank utanför USA. Detta kontrakt påminner om det på LIBOR. Leverans av Eurodollar sker i mars, juni, september och december.

Kontraktspriset för en Eurodollar är speciellt enkelt och ges av:

$$10.000[100 - 0.25(100 - Z)]$$

där Z är det kvoterade priset för en Eurodollar. Exempel: om $Z = 94.32$ fås \$925.800. En räntepunkt (0.01%) motsvarar alltså \$25. Då tredje onsdagen i leveransmånaden infinner sig och man känner tre-månadsräntan settlas kontraktet i kontanter. Vid sista mark-to-market sätts futurepriset till $100 - R$, där R är 90 dagars eurodollarräntan uttryckt i kvartalsvis ränta på actual/360 dagars beräkning. Om exempelvis $R = 8\%$ fås mark-to-market: $Z = 92$ och således priset $980.000. Observera att långa Eurodollars futurepriser inte kan översättas till forwardräntor då den senare alltid är lägre. Därför tillämpar man en konvexitetsjustering. Exempelvis

$$\text{Forward rate} = \text{Future rate} - 0.5\,\sigma\, t_1\, t_2$$

där t_1 = sluttiden för futuren
t_2 = sluttiden för räntan på det underliggande kontraktet och
σ = volatiliteten på den korta räntan under ett år.

En annan vanligt handlad obligationsfuture är Euro-BUND-kontrakt. Dessa är på 100.000 EUR och ger en vinst på 10 EUR för varje kurstick.

PREMIEOBLIGATIONER

Premieobligationer är en vanlig sparform för privativesterare. Detta på grund av de låga nominella beloppen och lotteriet som är förknippat med innehavet.

Emittent
Staten genom Riksgäldskontoret.

Typ av skuldebrev
Löpande innehavarskuldebrev. Kupongobligation med ränteutbetalning i form av utlottningar vid bestämda tidpunkter enligt ett schema som fastställs av Riksgäldskontoret. En del premieobligationer har en rörlig vinstplan, där avkastningen fastställs med utgångspunkt från räntan på sex månaders statsskuldväxlar. Andra premieobligationer har en fast avkastning under lånets hela löptid.

Löptid
Vanligen fem till tio år vid emissionstillfället.

Valör
Varierar mellan olika årgångar, från nominellt 1 tkr till nominellt 10 tkr.

Emissioner
Emissioner sker efter Riksgäldskontorets beslut. Riksgäldskontoret beslutar vilken emissionskurs som ska gälla, vinstplan för de emitterade obligationerna m.m. Emitterade premieobligationer har sålts genom banker och värdepappersbolag.

Andrahandsmarknaden
Likviditeten i premieobligationsmarknaden får betraktas som ganska god om än med mindre nominella belopp. Under tiden runt en dragning sker inte någon handel i det premieobligationslån i vilket vinster ska utlottas. Även premieobligationer kan handlas på SOX.

Värdering
Priset på premieobligationer anges i kronor per premieobligation. Priset inkluderar upplupen ränta/vinst till och med likviddagen. Betydande prisskillnader kan förekomma mellan enstaka premieobligationer och nummerföljder. Dessa skillnader kan förklaras av den garanterade avkastningen som lämnas på nummerföljderna. Utlottning av vinster på premieobligationer sker genom att bestämda serie- och ordningsnummer utlottas av Riksgäldskontoret. Ett visst antal småvinster lottas ut enbart på ordningsnummer. Det innebär att en placerare som förvärvat en hel serie premieobligationer får en garanterad avkastning. Den garanterade avkastningen uppgår till mellan 1,5 procent och 4,5 procent av premieobligationens nominella värde.

Leverans
Leverans av och likviddag för premiebligationer inträffar tre bankdagar efter avslutsdagen.

REALRÄNTEOBLIGATIONER (real kupongobligation)

Emittent
Staten genom Riksgäldskontoret.

Typ av skuldebrev
Löpande innehavarskuldebrev. Kupongobligation med årsvis betalning av kupong på 3,5% eller 4% av det nominella beloppet, därutöver erhåller innehavaren ett belopp vars storlek är relaterat till förändringen av konsumentprisindex under löptiden. Även reala nollkupongobligationer förekommer.

Löptid
Fem upp till tretton år vid emissionstillfället.

Valör
Minsta valör 5 tkr.

Emissioner
Kvartalsvis genom de av Riksgälden auktoriserade återförsäljarna, dvs vissa banker och värdepappersbolag.

Andrahandsmarknaden
Likviditeten i realobligationsmarknaden får betraktas som god. Andrahandsmarknaden består av en telefonmarknad där vissa banker och värdepappersbolag agerar market-makers, dvs marknadsgaranter. Realobligationer kan även handlas på SOX.

Värdering
Prissättningen på instrumentet anges som en effektiv årsränta. Eftersom realobligationer är diskonteringsinstrument betalar inte köparen obligationens nominella belopp utan kursvärdet på obligationen samt upplupen kupong sedan föregående ränteförfallodag. För varje år beräknas en nominell kupong såsom real kupong uppräknad med indexfaktorn för kupongdagen.

Leverans
Leverans av och likviddag för realränteobligationer inträffar tre bankdagar efter avslutsdagen. Fast kupong plus förändringen av konsumentprisindex utbetalas årligen den 1 december.

2001-12-12 13:39

Marknadsräntor | **Realränteobligationer**

NAMN	MID	+/-	HÖGST	LÄGST	FÖRFALLODATUM	UPPDAT
SO-3002	0.000	0.000	0.000	0.000	20040401	06:10
SO-3101	3.540	-0.005	3.655	3.515	20081201	10:49
SO-3001	3.760	0.005	3.760	3.715	20140401	10:49
SO-3105	3.735	0.000	3.735	3.695	20151201	08:06
SO-3102	3.835	0.020	3.835	3.795	20201201	08:06
SO-3103	0.000	0.000	0.000	0.000	20281201	06:10
SO-3104	3.925	0.010	3.925	3.885	20281201	08:06

REPOR

En repa (repurchase agreement), ett repoavtal, är en belåning av ett värdepapper. Det är ett avtal om att säljaren levererar ett underliggande papper (obligation, aktie eller annan pant) mot att köparen levererar pengar. När man ingår avtalet fastställs pris och tidpunkt när panten går tillbaka. Köparen sägs göra en omvänd repa (reversed repo). Man kan se en repa som att man säljer ett värdepapper med ett avtal om ett framtida återköp. Det likvidbelopp man erhåller vid försäljningen utgör lånebeloppet. Den omvända repan ses då som att man köper ett värdepapper med avtal om en framtida försäljning. Marknadsräntan för repan, reporäntan avser avkastningen för repoperioden, d.v.s. löptiden för belåningen.

Special och GC

Man skiljer mellan två olika typer av säkerhet i repan. Special och GC. I en Special blir ett speciellt värdepapper föremål för repan. Säljaren är ute efter billig finansiering, en låg ränta genom att utnyttja efterfrågan på en specifik stadsobligation eller statsskuldväxel. Köparen är kort i obligationen och är därmed mindre känslig för ändringar i reporäntan. Då han kan därför acceptera en lägre reporänta än köparen är i en GC-repa. Därför blir räntan oftast lägre i en special jämfört med en så kallad GC-repa. Om många på marknaden är korta i ett speciellt papper samtidigt som visst brist råder, kan reporäntan för papperet sjunka ordentligt. En GC (general collateral) är en korg av värdepapper, exempelvis svenska stadsobligationer. Säljaren väljer efter avslutsaffär vilka papper han skall leverera. Hans syfte är att låna pengar mot god säkerhet och på så sätt få ner kostnaden för lånet. Köparens syfte är att utan för stor kreditrisk låna ut pengar.

I en äkta repa överlåts inte kupongutbetalningarna utan dessa tillfaller säljaren. I oäkta repor, vilket är vanligast i Sverige tillfaller utdelningar och kupongutbetalningarna till köparen. Därför måste priset vid återköpet korrigeras.

Andra typer av repor

Två andra typer av repor som ökar likviditeten är:

- Open-dated repos; Ett repoavtal som när som helst kan sägas upp av parterna. Reporäntan omförhandlas dagligen. Fördelen är att man slipper att skicka säkerheter fram och tillbaka i de dagliga kortaste reportransaktionerna (O/N och T/N).

- Cross-currency repos; Valutan i säkerheten skiljer sig från valutan i repoavtalet. Fördelen är att man exempelvis kan finansiera sin valutaportfölj i andra valutor utan valutaväxlingar.

Två varianter som reducerar transaktionskostnaderna är:

- Hold.in-costody; Där behåller säljaren (banken) säkerheten på ett separat kundkonto åt köparen. Därför slipper man leveranskostnader.

- Tri-party-repo; Där sker säkerheter och transaktioner via en tredje part (säkerhetsbank), där denna sköter säkerheterna och alla betalningar samt dagliga säkerhetskrav.

Fyra varianter som ökar repoavkastningen:

- High-yield repo; Där köparen får säkerheter med låg kreditrating.
- Multi-collateral repo; En repa för flera olika obligationer i små valörer.
- Floating-rate repo; En reporänta som beräknas enligt en bestämd formel eller index.
- Optionskonstruktioner; Exempelvis golv (Floor) eller tak (Caps) på reporänta eller valfri löptid för fast reporänta.

Även centralbanker använder sig av repor. Dessa används i penningpolitiska syften för att styra likviditeten i banksystemet och därmed den korta marknadsräntan. Om Riksbanken belånar värdepapper säger man att de gör en omvänd repa. För centralbanksrepor utgår man alltid ifrån vad motparten gör i repan.

<u>Exempel</u>: Kvotering av en repa:

S/W SSVX0112   4.15-05

Betydelse:

Löptid	Lånad tillgång	Bid	Ask
S/W	SSVX0112	4.15%	4.05%

Stora figuren = 4, (Bid = 4.15, Offer = 4.05).

Skillnaden mellan köp- och säljräntan (prisspreaden) är här 10 räntepunkter. Bid är den räntan som banken är villig att köpa kvoterat nominellt belopp av statsskuldväxeln för leverans på spotdagen, d.v.s. två dagar efter affärsdagen (T+2) samt sälja tillbaka den sju dagar senare. Ask är den ränta till vilken banken är villig att sälja kvoterat nominellt belopp av statsskuldväxeln för leverans på spotdagen, samt köpa tillbaka den sju dagar senare.

Löptiden för repor är från en dag upp till sex månader. Bestämningen av löptider är i stort sett den samma som för depositlån.

T/N (tomorrow-next): Då erhålls likviden nästkommande bankdag och återbetalningen sker påföljande bankdag efter nästkommande.

C/W (Corporate-Week): Då erhålls likviden en bankdag efter spotdagen och återbetalningen sker sju dagar senare..

För att beräkna återköpspriset används följande formeln:

$$F = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot \frac{d}{360}\right)$$

där

P	= likvidbelopp, lånebelopp
r	= enkel årsränta,
d	= antalet återstående kalenderdagar för löptiden.
F	= återköps beloppet.

FÖRLAGSLÅN

Emittent
Förlagslån emitteras av banker, kreditmarknadsbolag och andra låntagare. Vid genomförda emissioner krävs anmälan i efterhand till Riksbanken.

Typ av skuldebrev
Löpande orderskuldebrev. Kuponglån med normalt årsvis betalning av kupong, men nollkupongslån förekommer.

Löptid
Över två år vid emissioner.

Emissioner
Emissioner sker allteftersom låntagarna har ett finansieringsbehov och kan ses som ett alternativ till att emittera obligationer. Förlagslån tecknas vanligtvis av större kapitalplacerare, exempelvis försäkringsbolag.

Andrahandsmarknaden
Likviditeten i förlagslån med kupong kan inte betraktas som god. Likviditeten för förlagslån med nollkupong är något bättre. Lånen kan handlas på Stockholmsbörsen elektroniska börs SOX.

Värdering
Prissättningen på förlagslån anges som en effektiv årsränta. Eftersom förlagslån är diskonteringsinstrument betalar inte köparen obligationens nominella belopp, utan kursvärdet på obligationen, samt upplupen kupong sedan föregående ränteförfallodag. För förlagslån utan kupong blir det inte aktuellt med någon upplupen kupong vid överlåtelser.

Marknadsräntor | **SOX förlagslån**

	KÖP RTA %	SÄLJ RTA %	ÄNDR RTA	KÖP	SÄLJ	SLUTDATUM	KUPONGRÄNTA	UPPDAT
FöreningsSparbanken AB								
FBBO 17	6,24	0,00	0,36	78,27	0,00	20060104	0,00	13:06
Hagströmer & Qviberg AB								
HAGQ 1	0,00	0,00	0,00	85,00	92,00	39991231	7,50	09:01
Nordbanken AB								
NORO 10	5,56	5,36	0,01	67,23	68,17	20090420	0,00	12:29
NORO 18	4,98	0,00	-0,07	106,53	0,00	20030915	9,00	09:44
NORO 20	4,97	4,87	0,01	85,86	86,12	20050209	0,00	09:44
Skandinaviska Enskilda Banken AB								
SEBO 16	3,78	3,68	0,01	99,23	99,25	20020301	0,00	13:25
FöreningsSparbanken AB								
SPAR 1694	6,80	6,71	0,09	58,62	59,00	20100131	0,00	13:12
Spendrup Invest AB								
SPEI 1	14,69	0,00	0,02	38,00	0,00	20090109	0,00	12:14
Sydsvenska Kemi AB								
SYSK 1	14,59	14,16	0,01	27,50	28,50	20110609	0,00	13:05
Wihlborgs Fastigheter AB								
WIBO 1	6,79	0,00	0,01	99,10	0,00	20021215	5,83	09:09

Leverans

Leverans av och likviddag för förlagslån inträffar tre bankdagar efter avslutsdagen. Kupongränta erhålls på kupongdagen på det konto som uppgivits till emittenten i samband med inregistreringen av förvärvade förlagsbevis hos den som emitterat förlagsbevisen, alternativt kan förlagsbeviset utfärdats av VPC.

DEPOSITTERMINER

Depositterminer är avtal mellan två parter, antingen bilateralt – OTC (forwards) eller via en tredje motpart – en börs. (futures). Avtalet fastställer en depositränta för en viss löptid och ett nominellt belopp i framtiden. Tre exempel på instrumentkonstruktioner för depositterminer är:

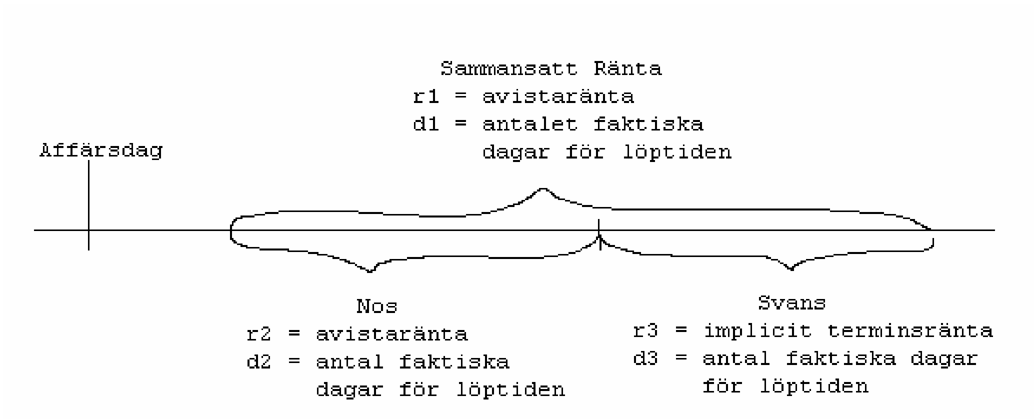
- FRA – Forward Rate Agreement,
- Forward/Forward deposits och
- STIR – Short Term Interest Future.

På många börser handlas så kallade Eurocurrency Futures. Dessa sker in valuta annan än landets egen. Exempel på ett sådant kontrakt är Eurodollar som handlas i London.

Med ett Forward/Forwardkontrakt vill en låntagande hedger säkra en framtida inlåning. En lånande spekulant spekulerar i en uppgång av ränta och en arbitrageur utnyttjar felprissättningar på marknaden. Omvända förhållanden gäller naturligtvis för långivare.

Den implicita terminsräntan (eng. figuring the tail) räknas ut med formeln:

$$r_3 = \left[\frac{1 + \frac{r_1}{100} \cdot \frac{d_1}{360}}{1 + \frac{r_2}{100} \cdot \frac{d_2}{360}} - 1 \right] \cdot \frac{360}{d_3} \cdot 100$$



I exemplet ovan är det tre dagar mellan affärsdagen och nosen. Nosen och svansen är sedan tre månader vardera. Arbitrage mellan deposit och depositterminer förutsätter att ränteintäkten under den första ränteperioden (*d2*) återinvesteras under terminsperioden (*d3*).

FRA - Forward Rate Agreement

Standardiserat Stibor-FRA kontrakt

I grunden är ett IMM-FRA ett terminskontrakt - ett avtal där säljaren förbinder sig att låna ut pengar (det nominella beloppet) till köparen i framtiden, närmare bestämt från en IMM-dag till nästa IMM-dag. (IMM-dagarna i Sverige är tredje onsdagen i månaderna mars, juni, september och december. Ett svenskt IMM-FRA-kontrakt har med andra ord en underliggande löptid på tre månader. Ett nytt kontrakt noteras var tredje månad och det är alltid tolv serier som löper parallellt. Det innebär att den sammanlagda löptiden för de noterade IMM-FRA-serierna är 36 månader.)

Konstruktion

IMM-FRA-kontrakten är kontantavräknade terminer. Det innebär att något lån i själva verket aldrig utväxlas på terminens slutlikviddag, istället sker en kontantavräkning mot en fix ränta som fastställs på slutdagen.

Prissättning
Avslutspriset uttrycks som enkel årsränta med räntebas 365/360. Köparen anger till vilken ränta han eller hon vill låna och säljaren till vilken ränta han eller hon vill låna ut.

Kontantavräkning
Om avslutsräntan understiger fixingräntan erlägger säljaren mellanskillnaden. Om avslutsräntan överstiger fixingräntan erlägger köparen mellanskillnaden.

Fixing
Den underliggande fixingräntan är tre månaders stibor på kontraktets slutdag.

Clearing
På IMM-FRA-marknaden agerar Stockholmsbörsen clearinghus. Affärer inrapporteras och matchas, därefter har såväl köpare som säljare Stockholmsbörsen som motpart. Stockholmsbörsen garanterar att alla åtaganden som följer av kontraktet fullföljs. För att kunna hantera riskerna och garantera kontraktets fullgörande kräver Stockholmsbörsen att samtliga aktörer ställer säkerheter. Stockholmsbörsen tillämpar månatlig avräkning (periodisk avräkning) för IMM-FRA-kontrakten. Syftet med avräkningen är att i slutet av varje månad eliminera de ackumulerade säkerhetskraven efter månadens handel. Clearingen bidrar till en effektivisering av marknaden i och med att motpartsrisken inte återspeglas i prisbilden.

Marknaden
IMM-FRA-marknaden får betraktas som mycket likvid. Kontrakten handlas på en informell telefonmarknad där ett antal marknadsgaranter – market-makers – kvotera priser per telefon samt kvotera indikativa priser som distribueras via befintliga informationssystem såsom Reuters, Bridge, Bloomberg m.m. Övriga marknadsaktörer såsom företag, institutioner och privatplacerare når marknaden via en intermediär – vanligtvis market-maker - som är medlem hos Stockholmsbörsen. Medlemmen rapporterar in avslut för registrering hos Stockholmsbörsen, affären matchas och Stockholmsbörsen övertar motpartsrisken.

På OM Stockholmsbörsens webbplats finner man Marknadsräntorna för IMM-FRA:

2001-12-12 13:41

Marknadsräntor | IMM-FRA

NAMN	MID	+/-	HÖGST	LÄGST	UPPDAT
FRAS-01120203	3.895	0.000	3.905	3.895	13:07
FRAS-02030206	3.835	-0.030	3.905	3.835	13:18
FRAS-02060209	4.030	-0.035	4.125	4.030	13:18
FRAS-02090212	4.325	-0.040	4.435	4.325	13:21
FRAS-02120303	4.635	-0.060	4.755	4.635	13:26
FRAS-03030306	4.895	-0.040	4.985	4.895	13:12
FRAS-03060309	5.075	-0.040	5.155	5.075	13:16

Kontantavräkningen för en FRA ges av:

$$B = \frac{s-r}{100} \cdot \frac{d}{360} \cdot N \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{s}{100} \cdot \frac{d}{360}} \right]$$

där

B	= avräkningsbeloppet
s	= fixingräntan (STIBOR)
r	= avsslutsräntan
d	= antalet faktiska dagar under löptiden och
N	= det nominella beloppet

Allmänt om FRA:s

Vi har följande kassaflöden:

$$\begin{aligned} T_1 &: \quad -L \\ T_2 &: \quad +L[1 + R_k (T_2 - T_1)] \end{aligned}$$

Nuvärdet av dessa är:

$$L\left[\frac{1 - R_k (T_2 - T_1)}{1 - R_F (T_2 - T_1)} - 1 \right]$$

Om räntan R_k på en FRA skulle vara lika med forwardräntan R_F för samma tidsperiod skulle alltså FRA:ns värde vara lika med noll. En FRA:s värde ges därför av:

$$V = L(R_k - R_F)(T_2 - T_1)e^{-r_2 T_2}$$

där r_2 är den kontinuerliga nollkupongsräntan med slutdag T_2.

Alternativt kan vi se en FRA som att vi lånar ut ett belopp L till räntan R_k mellan tiderna T_1 och T_2 samtidigt som vi lånar samma belopp till räntan R_F. Vi har då bara ett kassaflöde:

$$T_2 : \quad L(R_k - R_F)(T_2 - T_1)$$

Värdet av detta idag är det med den riskfria räntan diskonterade beloppet.

- En FRA är därför ekvivalent med ett avtal där vi mot en förutbestämd ränta R_k gör en vinst i utbyte med en marknadsränta R_F (se swappar).
- FRA:n värderas genom att vi antar att vi med säkerhet kan realisera forwardräntan.

VX180 - Statsskuldväxeltermin

Standardiserad räntetermin på en 6 månaders statsskuldväxel.
En statsskuldväxeltermin är ett bindande avtal om köp eller försäljning av statsskuldväxlar på ett bestämt datum i framtiden.

Konstruktion

Den underliggande varan i de statsskuldväxelterminer som Stockholmsbörsen clearar är en konstruerad statsskuldväxel med en löptid på sex månader räknat från terminens slutlikviddag och ett nominellt belopp på en miljon kronor. Slutlikviddagen för kontrakten sammanfaller med IMM-dagarna, som infaller tredje onsdagen i mars, juni, september och december. Kontrakt finns noterade för clearing för de två närmaste slutlikvidmånaderna, vilket innebär att ett nytt kontrakt noteras var tredje månad.

Prissättning

Avslutspriset uttryckts som enkel årsränta med räntebas actual/360 (kontraktet med förfall i juni 2001 har fortfarande gamla räntebasen 30E/360). Köparen anger till vilken ränta han eller hon vill köpa statsskuldväxeln på slutlikviddagen.

Slutfixing och leverans

För öppna positioner på slutlikviddagen sker en leverans av faktiska statsskuldväxlar och en kontantavräkning av upplupen vinst eller förlust i positionen. Kontantavräkningen sker på slutdagen (tre bankdagar innan slutlikviddagen) klockan 11.00 mot en stängningsränta som fastställs av SIX AB som medianvärdet av köp- och säljräntor för terminen.

Clearing

På statsskuldväxelterminsmarknaden agerar Stockholmsbörsen clearinghus. Affärer inrapporteras och matchas, därefter har såväl köpare som säljare Stockholmsbörsen som motpart. Stockholmsbörsen garanterar att alla åtaganden som följer av kontraktet fullföljs. För att kunna hantera riskerna och garantera kontraktets fullgörande kräver Stockholmsbörsen att samtliga aktörer ställer säkerheter. Stockholmsbörsen tillämpar månatlig avräkning (periodisk avräkning) för terminskontrakten. Syftet med avräkningen är att i slutet av varje månad eliminera de ackumulerade säkerhetskraven efter månadens handel. Clearingen bidrar till en effektivisering av marknaden i och med att motpartsrisken inte återspeglas i prisbilden.

Marknaden
Statsskuldväxelterminsmarknaden får betraktas som likvid. Kontrakten handlas på en informell telefonmarknad där ett antal marknadsgaranter – market-makers – kvotera priser per telefon samt kvotera indikativa priser som distribueras via befintliga informationssystem såsom SIX AB, Reuters, Bridge, Bloomberg m.fl. Övriga marknadsaktörer såsom företag, institutioner och privatplacerare når marknaden via en intermediär, vanligtvis en market-maker, som är medlem hos Stockholmsbörsen. Medlemmen rapporterar in avslut för registrering hos Stockholmsbörsen, affären matchas och Stockholmsbörsen övertar motpartsrisken.

STATSOBLIGATIONSTERMINER - R2, R5, R10

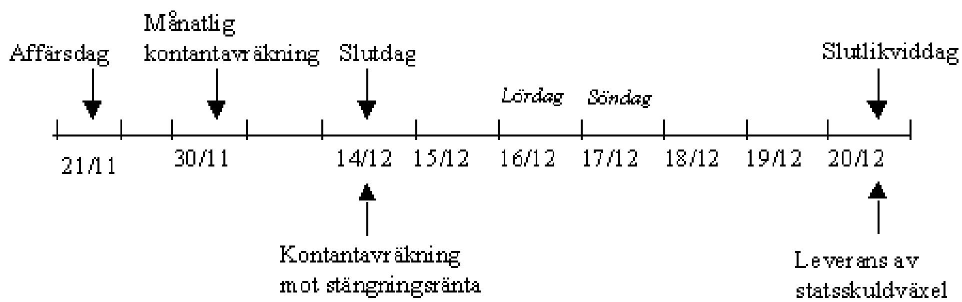
En statsobligationstermin är ett bindande avtal om köp eller försäljning av statsobligationer på ett bestämt datum i framtiden. Köpet är bindande, men ingen betalning sker förren leveransdagen. Dock måste säkerheter ställas till Stockholmsbörsens förfogande.

Konstruktion
Stockholmsbörsens statsobligationsterminer är leveransterminer på nominellt en miljon SEK av underliggande statsobligationer. Slutlikviddagen för kontrakten sammanfaller med IMM-dagarna, som infaller tredje onsdagen i mars, juni, september och december och stängningsdagen inträffar på torsdagen innan. Kontrakt finns noterade för clearing för de två närmaste slutlikvidmånaderna, vilket innebär att ett nytt kontrakt noteras var tredje månad.
Instrumentets löptid skall anses vara två (R2), fem (R5) respektive tio (R10) år räknat från seriens slutlikviddag och dess kupongränta skall anses vara sex procent. Den konstruerade obligationens nominella belopp skall lyda på en miljon svenska kronor.

Prissättning
Avslutspriset uttryckts som effektiv ränta med räntebas 30/360. Köparen anger till vilken ränta han eller hon vill köpa statsobligationen på slutlikviddagen.

Slutfixing och leverans
För öppna positioner på slutlikviddagen sker en leverans av faktiska statsobligationer och en kontantavräkning av upplupen vinst eller förlust i positionen.
Kontantavräkningen sker på slutdagen klockan 11.00 mot en stängningsränta som fastställs som medianvärdet av köp- och säljräntor för terminen.

Clearing
På statsterminsmarknaden agerar Stockholmsbörsen clearinghus. Affärer inrapporteras och matchas, därefter har såväl köpare som säljare Stockholmsbörsen som motpart. Stockholmsbörsen garanterar att alla åtaganden som följer av kontraktet fullföljs. För att kunna hantera riskerna och garantera kontraktets fullgörande kräver Stockholmsbörsen att samtliga aktörer ställer säkerheter. Stockholmsbörsen tillämpar månatlig avräkning (periodisk avräkning) för terminskontrakten. Syftet med avräkningen är att i slutet av varje månad eliminera de ackumulerade säkerhetskraven efter månadens handel. Clearingen bidrar till en effektivisering av marknaden i och med att motpartsrisken inte återspeglas i prisbilden.



Marknaden
Marknaden för statsobligationsterminer får betraktas som likvid. Kontrakten handlas på en informell telefonmarknad där ett antal marknadsgaranter – market-makers – kvotera priser per telefon samt kvotera indikativa priser som distribueras via befintliga informationssystem såsom Reuters, Bridge, Bloomberg m.m. Övriga marknadsaktörer såsom företag, institutioner och privatplacerare når marknaden via en intermediär – vanligtvis market-maker - som är medlem hos Stockholmsbörsen. Medlemmen rapporterar in avslut för registrering hos Stockholmsbörsen, affären matchas och Stockholmsbörsen övertar motpartsrisken.

STINA - Stockholm Tomnext Interbank Average

Standardiserad Call money swap

Syftet med Stina swappar är att efterlikna finansiering och placering på depositmarknaden, och samtidigt separera marknadsrisken från kredit- och likviditetsrisken.

Konstruktion
Parterna i ett stina-kontrakt överenskommer att erlägga/erhålla skillnaden mellan en fast (avtalad) ränta och en sammansatt rörlig ränta som består av T/N stibor-fixingar.

Rörligt- och fast räntebelopp beräknas utifrån ett överenskommet nominellt belopp och en överenskommen löptid. Skillnaden erläggs/erhålls på löptidens sista dag (slutlikviddagen).

Prissättning
Avslutspriset uttrycks som en enkel årsränta med räntebas 365/360, på den fasta räntan.

Kontantavräkning
På slutdagen (två bankdagar innan slutlikviddagen) sker kontantavräkning. Om det rörliga räntebeloppet är större än det fasta räntebeloppet erhåller köparen mellanskillnaden. Vid motsatsen erhåller säljaren mellanskillnaden. Stina swappar är inte föremål för månatlig kontantavräkning.

Fixing
Daglig fixing av T/N Stibor sker 11.00 CET och görs av de sk Stiborbankerna. Stiborfixingen återfinns i Reutersystemet på sidan SIOR.

Clearing
På Stina-marknaden agerar Stockholmsbörsen clearinghus. Affärer inrapporteras och matchas, därefter har såväl köpare som säljare Stockholmsbörsen som motpart. Stockolmsbörsen garanterar att alla åtaganden som följer av kontraktet fullföljs. För att kunna hantera riskerna och garantera kontraktets fullgörande kräver Stockholmsbörsen att samtliga aktörer ställer säkerheter. Stockholmsbörsen tillämpar inte månatlig avräkning (periodisk avräkning) för Stina-kontrakten. Stockholmsbörsen clearar Stina swappar för de konventionella depositlöptiderna men clearar också brutna löptider. Clearingen bidrar till en effektivisering av marknaden i och med att motpartsrisken inte återspeglas i prisbilden.

Marknaden
Stina-marknaden får betraktas som ganska likvid, med få men stora kontraktsvolymer. Kontrakten handlas på en informell telefonmarknad där ett litet antal marknadsgaranter – market-makers – kvotera priser per telefon samt kvotera indikativa priser som distribueras via befintliga informationssystem såsom Reuters. Övriga marknadsaktörer såsom några stora industriföretag, når marknaden via en intermediär – market-maker - som är medlem hos Stockholmsbörsen. Medlemmen rapporterar in avslut för registrering hos Stockholmsbörsen, affären matchas och Stockholmsbörsen övertar motpartsrisken.

OMRX - ett ränteindex

Stockholmsbörsens ränteindexfamilj

OMRX, Stockholmsbörsens ränteindex betecknar en familj av index som alla har till syfte att visa värdeutvecklingen för en viss typ av passivt förvaltad portfölj av likvida svenska räntebärande värdepapper.

En av OMRX-indexens uppgifter är att utgöra ett mätinstrument för ränteportfölj-förvaltare, så att de på ett enkelt sätt kan mäta sin prestation i förvaltningen av svenska räntebärande värdepapper.

OMRX-indexen beräknas kontinuerligt under varje svensk bankdag och uppdateras i realtid. Historiska data finns lagrade från den 2 januari 1990 för indexen i OMRX-familjen.

Indexens sammansättningar bygger på officiell statistik från Riksgäldskontoret över emitterade volymer med undantag för OMRX-MORT som bygger på statistik från Statshypotekskassan.
Indexfamiljen består av åtta olika index:

TBILL OMRX-TBILL är ett index för av Riksgäldskontoret emitterade statsskuld-växlar.

TBOND OMRX-TBOND är ett index för av Riksgäldskontoret emitterade stats-obligationer med benchmarkstatus, så kallade benchmarkobligationer.

GOVT OMRX-GOVT (TBILL+TBOND) är ett totalindex över Riksgäldens upplåning på den svenska marknaden och inkluderar statsskuldväxlar och statens benchmarklån.

MORT OMRX-MORT är ett index för emitterade svenska bostadsobligationer.

BOND OMRX-BOND (TBOND+MORT) är ett index för Riksgäldskontorets- och bostadsinstitutens upplåning via obligationer.

TOT OMRX-TOT (GOVT+BOND) är ett totalindex för Riksgäldskontorets- och bostadsinstitutens upplåning i Sverige.

O/N OMRX-O/N är ett index för dagslåneräntan och återspeglar värdeökningen i en portfölj som fullt ut investerats i banksystemet till dagslåneräntan.

REAL OMRX-REAL är ett index för Riksgäldens upplåning i realränteobligationer och återspeglar värdeökningen i en portfölj som följer realräntan plus förändringen i konsumentprisindex.

Värdering
För att beräkna $OMRX_i$ (OMRX för en klass av värdepapper i, till exempel TBOND) vid tiden t används formeln nedan.

$$OMRX_i(t) = \frac{TMV_i(t)}{TMV_i(t-1)} \cdot OMRX_i(t-1)$$

Där $TMV_i(t)$ är det totala marknadsvärdet på värdepapper som ingår i index *i* vid tiden *t*. $TMV_i(t)$ beräknas enligt:

$$TMV_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i(t)} MV_i^j(t) \cdot IV_i^j(t)$$

Där vi summerar över alla värdepapper $n_i(t)$ som ingår i index *i* vid tiden *t*. $MV_{i,}^{j}(t)$ är marknadsvärdet av alla värdepapper *j* vid tiden *t* för index *i*. Marknadsvärdet refererar till avräknat belopp. För obligationer beräknas detta via kurs plus upplupen kupong. $IV_{i,}^{j}(t)$ är den emitterade volymen (i miljoner SEK) för värdepapper *j* vid tiden *t* för index *i*.

STOCKHOLMSBÖRSENS VERKSAMHET

Stockholmsbörsens affärside är att erbjuda handel, clearing och informationstjänster inom aktie och ränterelaterade produkter för att tillgodose marknadens behov av kapital, marknadsvärdering, placeringsmöjligheter och riskhantering. En väl fungerande börs skapar förutsättningar för ett samhälle med tillväxt och välstånd genom att tillhandahålla riskkapital till företagen så att de kan växa och utvecklas, och samtidigt erbjuda en marknadsplats för placeringar och investeringar av kapital.

Stockholmsbörsen erbjuder med andra ord handel i aktier, obligationer, derivat och börshandlade fonder samt en clearingtjänst för derivat. Dessutom tillhandahålls vissa tjänster för räntemarknaden. OM London Exchange, som är ett dotterbolag till Stockholmsbörsen, bedriver handel och clearing av de svenska derivatprodukterna på London-marknaden.

Marknadsplatser

Stockholmsbörsen Fixed Income tillhandahåller en elektronisk marknadsplats för interbankmarknaden. Där också en börsmarknad för räntebärande värdepapper, främst riktad mot privatkunder.

Emittenter har möjlighet att emittera värdepapper elektroniskt med hjälp av funktionalitet i SAXESS systemet. Emittenttjänsten kan kopplas till den elektroniska marknadsplatsen för interbankmarknaden. Interbankmarknadens aktörer använder Saxess systemet för en rad olika informationstjänster. Dagligen sker fixing av STIBOR, valutor, boräntor, SOCP samt statsfixing.

Riksbanken och Riksgäldskontoret använder Saxess systemet för att distribuera marknadsinformation och marknadens interbankaktörer visar indikativa priser på obligationer och andra ränteinstrument i systemet.

Dessutom rapporteras marknadens omsättning till Stockholmsbörsen Fixed Income. Information om omsättningen publiceras dagligen med en dags fördröjning.

Clearing

Clearing erbjuds av Stockholmsbörsens Fixed Income i ränteterminer, se vidare under produkter. Clearing innebär i det här sammanhanget att Stockholmsbörsen tar över motpartsrisken i en gjord affär genom att agera köpare gentemot säljare och säljare gentemot köpare. Därmed elimineras den ursprungliga motpartrisken, vilket ger de inblandade aktörerna större handelsfrihet. För att Stockholmsbörsen ska kunna ta på sig den uppkomna risken på detta sätt så måste båda aktörerna ställa säkerheter som motsvarar den av Stockholmsbörsen bedömda risken.
Stockholmsbörsen agerar clearing med väl definierade regler. För att få cleara produkter hos Stockholmsbörsen måste man vända sig till en medlem som är godkänd av Stockholmsbörsen och som klarar Krav för clearingmedlemskap som finns specificerade i Stockholmsbörsens Regelverk. De finansiella produkter som Stockholmsbörsen clearar finns angivna i regelverket under Kontraktsspecifikationer.

Finansiella aktörer kan välja att sköta sina clearade affärer via banker och fondkommissionärer som är medlemmar till OMs börs i London (OML) eller i Stockholm. De båda handelsplatserna agerar efter olika reglementen beroende på vilka lagar som finns i respektive land. Det finns i grunden två olika clearingkoncept som båda erbjuds.

Medlemsclearing

Om slutkundens val faller på en medlem i London har man alltid banken som juridisk motpart och det är upp till banken och den enskilde aktören att reglera det juridiska förhållandet. Bankens förhållande till OML är baserat på OMLs Regelverk. Förhållandet kallas medlemsclearing.

Slutkundsclearing

Om slutkundens val faller på en medlem i Stockholm har den enskilde aktören alltid Stockholmsbörsen som motpart. Det juridiska förhållandet regleras via ett avtal mellan slutkund och Stockholmsbörsen. Avtalet är en del av Stockholmsbörsens Regelverk och administreras av ett handelsbolag, CCHB, gemensamt ägt av Stockholmbörsen och Fondhandlarföreningen. Förhållandet kallas slutkundsclearing.

Säkerheter

För att minimera motpartsrisken kräver Stockholmsbörsen att kunden och medlemmen löpande ställer säkerheter. Storleken beror på kundens/medlemmens sammanlagda position. Stockholmsbörsen meddelar dagligen alla medlemmar om storleken på varje enskild aktörs säkerhetsnetto. Det är upp till medlemmen att tillse att varje slutkund följer de krav som Stockholmsbörsen ställer.

Stockholmsbörsen clearar även OTC-handlade räntekontrakt. Det innebär att Stockholmsbörsen inte sköter handel utan endast påtar sig rollen som motpart efter avslut om motparterna väljer att lämna affären till clearing. Stockholmsbörsen clearar standardiserade OTC-kontrakt.

Om du väljer att cleara en affär vet du att Stockholmsbörsen har 1.000 Mkr i riskkapital bundet till clearingverksamheten. Ovanpå detta har Stockholmsbörsen tagit en försäkring på ytterligare 1.000 Mkr hos försäkringsbolaget AIG Europe Ltd. AIG har AAA som kreditvärdering hos Moody's. Tillsammans med kreditförsäkringen har Stockholmsbörsen ett riskkapital på 2.000 Mkr. Detta innebär att Stockholmsbörsen är en av världens högst kapitaliserade clearing organisationer.

RÄNTEMODELLER

Tidigare har vi gått igenom några av de vanligaste ränteinstrumenten som finns på marknaden. Nu ska vi fördjupa oss i den matematiska beskrivningen av dessa och hur de värderas. Som vi kommer att se finns det många räntor på marknaden och flera sätt på vilka vi kan uttrycka dem. Räntan på marknaden varierar på daglig basis och påverkas av flera faktorer, däribland:

- Inflationen,
- Växelkurser,
- Likviditet och
- Kreditvärdighet

När handlare talar om räntor menar de ofta helt olika räntor, beroende på vad de handlar. För en repohandlare är den viktiga räntan den enkla räntan, för en optionshandlare den kontinuerliga och för en obligationshandlare yield-to-maturity.

I nästan all kurslitteratur i optionsteori får man lära att Black-Scholes formel för priset på en europeisk köpoption (utan utdelning i form av yield) ges av:

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-rT} \cdot N\left(d_2\right)$$

där r är den riskfria räntan. Vi kan också skriva denna som:

$$C = e^{-r \cdot T} \cdot \left[S \cdot e^{r \cdot T} \cdot N(d_1) - X \cdot N\left(d_2\right)\right]$$

där vi flyttat termen för att diskontera optionens värde till ett nuvärde. I detta fall är nu r diskonteringsräntan. Men, detta är inte alltid den riskfria räntan. Skall vi vara noggranna bör vi skriva Black-Scholes formel som:

$$C = e^{-r_{discount} \cdot T} \cdot \left[S \cdot e^{r_{repo} \cdot T} \cdot N(d_1) - X \cdot N\left(d_2\right)\right]$$

där $r_{discount}$ är diskonteringsräntan och r_{repo} reporäntan. Vi andväder alltså två olika räntor, en för att diskontera med och en som riskfri ränta (reporäntan).

Räntor

Benchmarkränta = Base rate (UK) = Prime rate (US)
Den minsta ränta en investerare är villig att ta för att investera i ett icke riskfritt värdepapper. Dessa räntor ges ofta som en yieldkurva där instrument med olika löptider bygger upp kurvan. Oftast är detta värdepapper utgivna av staten, då dessa oftast är att betrakta som riskfria. Därför används dessa som måttstock vid jämförelse med andra räntor.

Depositränta
En fastställd ränta för en deposittermin, exempelvis en FRA, en Forward/Forward deposit eller en STIR – Short Term Interest Future.

Diskonteringsränta (discount rate, capitalization rate)
Den ränta som används för att diskontera ett kassaflöde i framtiden till dess nuvärde. Denna reflekterar pengarnas tidsvärde, ”time value of money” och risken förknippade med kassaflödet. Ibland ser man likhet mellan diskonteringsränta och nollkupongspriser.

Enkel ränta
Avkastningen uttryckt i procent av det investerade beloppet.

Effektiv årsränta
Avkastningen i procent av det investerade beloppet på årsbasis med hänsyn till ränta-på-ränta effekten.

Forwardränta
En projektion av framtidens räntor från en given tid till en annan beräknad från spoträntan (se nedan) eller en avkastningskurva. Denna fixeras varje dag på lån i framtiden.

Implicit reporänta
Räntan en säljare av ett futureskontrakt kan tjäna genom att köpa ett värdepapper och därefter sälja tillbaka det till ett högre pris. Se reporänta nedan.

Implicit spotränta
Spoträntan som byggs upp av (teoretiska) nollkupongsobligationer.

Interbankränta (LIBOR, STIBOR etc)
Denna ränta bestäms av ett antal investmentbanker (i respektive land) på daglig basis. Detta är ett medelvärde av den utlåningsränta dessa banker är villiga för utlåning dem emellan. Varje marknad har sin interbankränta, exempelvis LIBOR – London InterBank Offer Rate eller STIBOR – Stockholm InterBank Offer Rate etc.

Kupongränta
Den procentsats som utbetalas som kupong på en obligation.

Nollkupongsränta (zero rate, zero-coupon interest rate)
Den ränta man tjänar på en obligation som inte betalar någon kupong.

Nominell ränta
Räntan justerad för inflationen.

Yield
En obligations yield är den diskonteringsränta som likaställer de diskonterade kassaflödena med obligationens marknadspris.

Par yield
Den kupongränta som värderar en obligation till dess nominella värde.

Prime Rate
Den ränta en bank erbjuder deras bästa kunder.

Reporänta
Räntan för en repa. En repa (repurchase agreement) gör man genom att sälja ett värdepapper för att senare köpa tillbaka det till ett högte pris. Skillnaden i pris motsvarar den så kallade reporäntan. Oftast är dessa kontrakt korta, typ over-night-repo, en-dags-repa, veckorepa etc. Reporäntan är något lägre än swapräntan då man har säkerheter i form av det värdepapper som ingår i avtalet. Den statliga reporäntan är den ränta då staten repar in och ut sina egna obligationer.

Reporäntan används bland annat för att beräkna carry cost för instrument som har en underliggande. Oftast används denna som kontinuerlig ränta med räntekonventionen Act/365. Räntan räknas från spotdagen för det underliggande instrumentet till lösendagen + antalet settlementdagar.

Riskfria räntan
Den avkastning man kan erhålla utan att ta någon risk under en given tidsperiod. Ofta baseras denna ränta på en stadsobligation med samma löptid som tidsperioden i fråga. Se benchmarkränta.

Spotränta
Den teoretiska avkastningen av nollkupongsobligationer. Se nollkupongsränta.

Swapränta
Den fixa ränta för en swap som prissätter denna till värdet noll. En swap är ett avtal där två parter byter ränteflöden. Den ena parten byter en fixt ränta mot en rörlig och den andra parten det omvända. Denna ränta används ofta som den riskfria räntan.

Terminstrukturen för räntor
Terminstrukturen är en tidsstruktur för marknadsräntorna, d.v.s. en relation mellan räntor på obligationer med olika löptider. Denna beskrivs av en graf, en s.k. yieldkurva. Investerare är i behov av att veta vilken ränta som hon/han skall använda sig av för att kunna värdera sina tillgångar. Denna dynamiska information finns i terminstrukturen.

Treasury rate
Den ränta man får då man lånar ut till staten i dess egen valuta. Denna betraktas oftast som riskfri då man inte förväntar sig att staten ska gå i konkurs. Se riskfria räntan.

Upplupen ränta (accrued interest)
Den intjänade räntan på en obligation sedan den senaste kupongutbetalningen.

Utdelningsränta (dividend rate)
Den fixa eller flytande räntan som utbetalas på en ”preferred” aktie. Detta är en aktietyp som förekommer i bland annat Storbritannien.

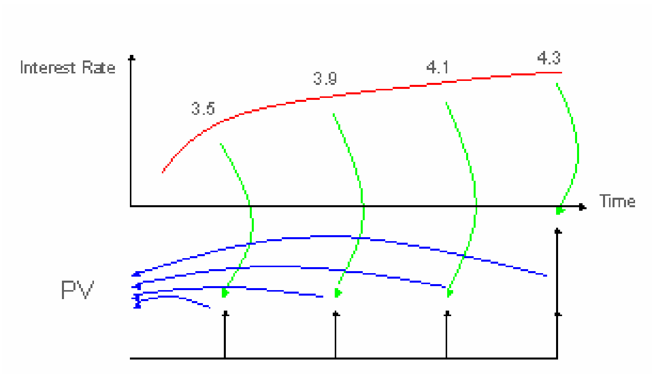
Yield to Maturity (YTM)
Den ränta en investerare erhåller om han behåller ett räntebärande värdepapper till förfall. Vidare antas att alla kuponger återinvesteras i samma ränta. YTM beror på kupongräntan, tiden till förfall och marknadspriset. Ibland talar man om att ett instrument är yieldkvoterat. Med detta menas att det är kvoterat efter YTM-kurva. YTM-kurvan motsvarar en platt yieldkurva, därför är den inte bra förprissättning då den är unik för varje instrument.

Kreditränta
Ränta beroende på kreditvärdighet. Denna är oftast en spread på en annan ränta, exempelvis en benchmarkränta.

Hazardränta
Ränta som ibland används som alternativ till spread där det föreligger en risk att den man lånar ut till inte kommer att kunna återbetala hela beloppet.

Definitioner och samband mellan olika räntor

Innan vi börjar med värderingar av olika instrument ska vi gå igenom en del definitioner och samband mellan räntorna ovan. När vi diskuterar marknadsräntorna utgår vi ifrån terminstrukturen för räntorna. Den graf som dessa räntor utgör kallas för en yieldkurva. Dessa yieldkurvor använder vi oss av för att nuvärdesdiskontera framtida kassaflöden (inkomster och utgifter):



Spotränta

Spoträntan används när vi vill veta hur mycket man erhåller vid tiden t_1 (i framtiden) om man investerar X kr idag (d.v.s. vid tiden t_0):

$$X_{t_1} = \left(1 + r_{spot}\right)^{t_1} \cdot X_{t_0}$$

$$PV\left(X_{t_1}\right) = \frac{1}{\left(1 + r_{spot}\right)^{t_1}} \cdot X_{t_1}$$

där $PV\left(X_{t_1}\right)$ är nuvärdet av X_{t_1}. Spoträntan räknas fram med hjälp av så kallad bootstrapping av obligationspriserna, se nedan.

Diskonteringsränta

När vi frågar efter nuvärdet av ett belopp X vid tiden t_1 använder vi oss av diskonteringsräntan. Denna ges av

$$PV\left(X_{t_1}\right) = r_{t_1}^{discount} \cdot X_{t_1}$$

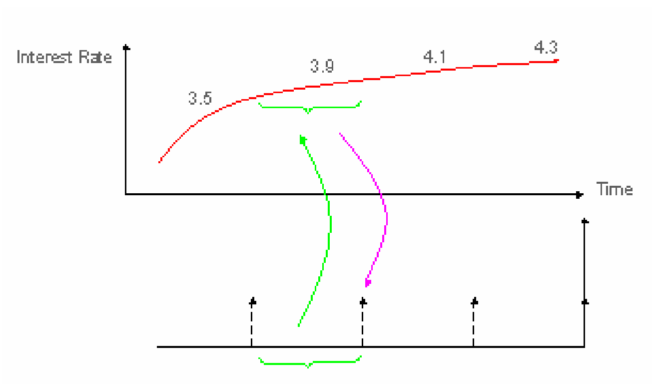
$$r_{t_1}^{discount} = \frac{1}{\left(1 + r_{spot}\right)^{t_1}}$$

Forwardränta

Forwardräntan används då vi planerar att göra en investering X kr vid tiden t_1 (i framtiden) och få tillbaka investeringen vid en senare tidpunkt, t_2. Forwardräntan beräknas från spoträntan med hjälp av arbitragevillkoret:

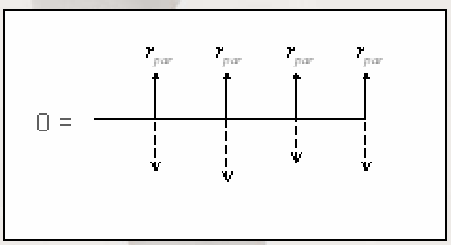
$$(1 + r_{t_1}^{spot})^{t_1} \cdot (1 + r_{t_2 - t_1}^{forward})^{t_2 - t_1} = (1 + r_{t_2}^{spot})^{t_2} \Rightarrow$$

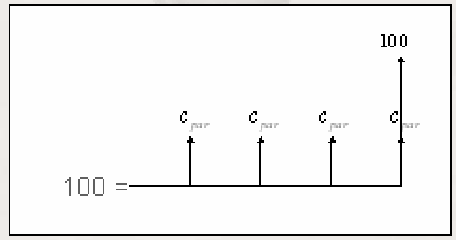
$$r_{t_2 - t_1}^{forward} = \left(\frac{(1 + r_{t_2}^{spot})^{t_2}}{(1 + r_{t_1}^{spot})^{t_1}} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1$$



Parränta

Parräntan är den fasta ränta man erhåller för ett antal flytande framtida ränteflöden. Ett typiskt instrument med en flytande ränta är en så kallade FRN (Floating Rate Note). En FRN beter sig som en obligation, med skillnaden att dess kupongränta styrs av en annan ränta, styrränta, exempelvis LIBOR + 50 räntepunkter (basis points, 1 bp = 1/100 %). Parräntan kan också definieras som den räntan på en obligations kuponger som prissätter obligationen till par, d.v.s. dess nominella värde. En obligation kvoteras som vi sett, som procent av det nominella värdet. Vi tänker oss att vi köper X kronor för att sedan få X kronor tillbaka i framtiden plus ett antal kuponger.





Parränta kan beräknas för en swap enligt nedan:

$$\sum_i (r_{discount}^i \cdot r_{par}) = \sum_i (r_{discount}^i \cdot r_{forward}^{t_i - t_{i-1}}) \Rightarrow$$

$$r_{par} = \frac{\sum_i (r_{discount}^i \cdot r_{forward}^{t_i - t_{i-1}})}{\sum_i r_{discount}^i}$$

En swap är ett kontrakt där två aktörer byter en fast ränta mot en rörlig. Parräntan för en obligation beräknas med hjälp av:

$$100 = \sum_{i=1}^{n} \left(r_{discount}^i \cdot c_{par} \right) + \left(r_{discount}^n \cdot 100 \right) \Rightarrow$$

$$r_{par} = c_{par} = \frac{100 \cdot \left(1 - r_{discount}^n\right)}{\sum_{i=1}^{n} r_{discount}^i}$$

Om obligationen och swap'en är prissatta med samma yieldkurva blir naturligtvis deras parränta densamma. Observera att samma terminstruktur ger många typer av räntor, exempelvis diskonteringsränta, spotränta, forwardränta, parränta o.s.v. det är endast olika sätt att representera terminstrukturen.

Sammansatt ränta

Om vi periodiskt erhåller ränta måste vi fråga oss hur ofta vi erhåller en utbetalning. Orsaken är att vi vill kunna återinvestera utbetald ränta och inte bara stoppa pengarna i fickan.

Om vi låter f vara perioden, d.v.s. antalet utbetalningar per år erhåller vi:

$$(1+r_{annual})^t = (1+\frac{r_f}{f})^{f\cdot t}$$

$$(1+r_{annual})^t = (1+\frac{r_{quarterly}}{4})^{4\cdot t}$$

Talar vi här om parräntan för en obligation som betalar en kupongränta c_{par} med f kuponger per år i n år får vi:

$$100 = \sum_{i=1}^{n\bullet f}\left(r_{discount}^{i}\bullet\frac{c_{par}}{f}\right)+\left(r_{discount}^{n\bullet f}\bullet 100\right)\Rightarrow$$

$$r_{par} = c_{par} = f\bullet\frac{100\bullet\left(1-r_{discount}^{n\bullet f}\right)}{\sum_{i=1}^{n\bullet f} r_{discount}^{i}}$$

Enkel ränta

Om vi erhåller hela räntebeloppet i slutet av investeringsperioden får vi:

$$(1+r_{annual})^t = (1+r_{simple}\cdot t)$$

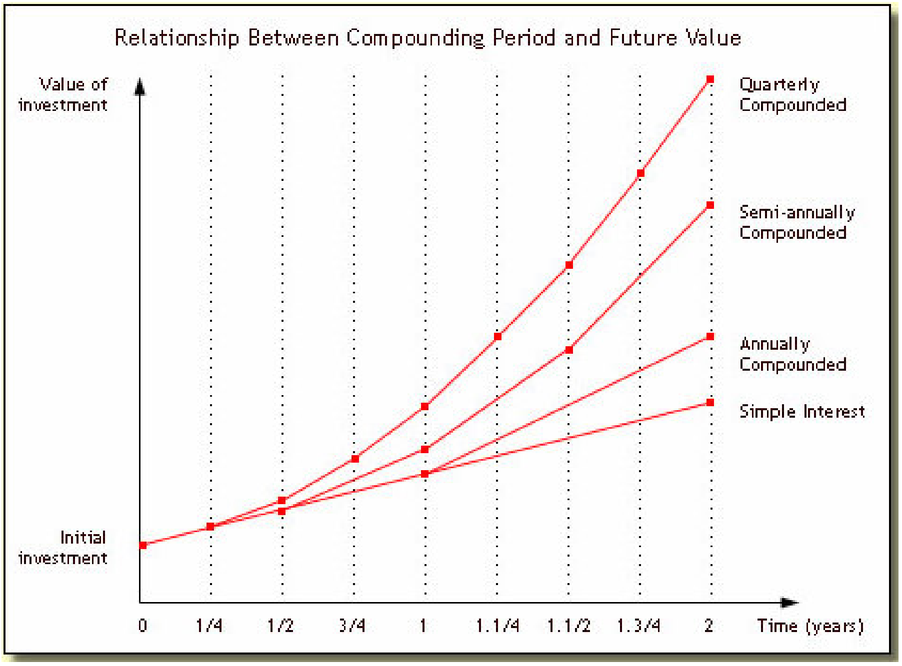
Kontinuerlig ränta

Om vi erhåller räntan kontinuerligt får vi i stället:

$$(1+\frac{r_f}{f})^{f\cdot t}, f\to\infty\Rightarrow$$

$$(1+r_{annual})^t = e^{r_c\cdot t}$$

Kontinuerlig ränta används ofta då man värderar optioner. Se Black-Scholes modell.



Hazardränta

Om vi vill modellera sannolikheten för att motparten kan gå i konkurs och därmed inte kan betala tillbaka det fulla beloppet, använder vi Hazardränta:

$$r_{t_1}^{discount} = \frac{1}{\left(1+r_{t_1}^{spot}\right)^{t_1}} \cdot \left[\left(1-P(t_1)\right)+R\cdot P(t_1)\right]$$

Här är *P(t)* sannolikheten för att motparten kommer att gå i konkurs (göra default) mellan tiden noll (idag) och tiden *t*. *R* är den avkastning vi får vid en eventuell motpartskonkurs. *R* anges som procent av den fulla avkastningen.

Värdering av obligationer

Vi skall nu gå igenom grunderna hur man värderar obligationer och hur man bestämmer avkastning i form av yieldkurvor. Matematiskt sett betraktar vi obligationer som ett antal kassaflöden vilka sedan diskonteras bakåt för att vi ska erhålla deras nuvärden.

Obligationer har som vi redan vet en fastställd ränta i form av kuponger. I Sverige betalas dessa ut en gång per år, i England två gånger per år och i vissa andra länder en gång per kvartal.

Statsobligationer	Kupongfrekvens	Upplupen Räntebas
USA	Halvår	Actual/Actual
Japan	Halvår	Actual/365
England	Halvår	Actual/365, Actual/Actual
Frankrike	Halvår	Actual/Actual
Tyskland	År	30E/360 or Actual/Actual
Holland	År	30E/360 or Actual/Actual
Canada	Halvår	Actual/365
Australien	Halvår	Actual/Actual
Italien	Halvår	Actual/Actual
Företagsobligationer (Corporate Bonds)		
USA	År eller Halvår	30/360
England	Halvår	Actual/365 or Actual/Actual
Eurobonds	År (några Halvår)	30E/360

<u>Exempel</u>: Nuvärdet av en ettårig kvartalsvis kupongutbetalning på 100 kr nominellt med 10 % årlig kupong beräknas som:

$$100\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^4=110.38$$

vilket motsvarar en effektiv ränta (EAR, Equivalent Annual Rate) på 10.38 %.

<u>Exempel</u>: Nuvärdet av tre årliga kuponger på 5000 kr med 5 % diskonteringsränta:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{5000}{1+0.05}+\frac{5000}{(1+0.05)^2}+\frac{5000}{(1+0.05)^3} \\ &= 4761.90+4535.15+4319.19=13616.24 \end{aligned}$$

Vi kan skriva det diskonterade nuvärdet som:

$$PV = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

där C är storleken på kupongen. Kassaflödena består således av kuponger, och på slutdagen även återbetalning av det nominella beloppet. Det förekommer även obligationer där lånet amorteras av, så kallade sinking funds. Tillämpar vi formeln ovan på obligationer fås priset som:

$$P = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+{r}/{m})^{n \cdot m}}\right] + \frac{Nom.val.}{\left(1+{r}/{m}\right)^{n \cdot m}}$$

där *m* är antal kupongutbetalningar per år, *n* antal år till förfall, *r* diskonteringsräntan och *Nom. val.* obligationens nominella belopp. Observera att obligationspriset är omvänt proportionellt mot diskonteringsräntan. Denna ränta kan man finna på tidningarnas finanssidor och betecknas som **YTM** eller **Red** (Redemption Yield), se exempelvis Financial Times. Vi antar man att man kan återinvestera alla kuponger med samma återbäring, vilket man naturligtvis inte alltid kan göra i praktiken. Om man handlar på par, d.v.s. med en YTM lika med kupongräntan är priset lika med det nominella värdet. Ibland talar man om flat- current- interest- running- eller income yield. Man avser då kupongens storlek delat med obligationspriset. Denna betecknas med **Int** i Financial Times.

Om obligationen handlas	Yield
På par	Samma som kupongräntan
Över par	Lägre än kupongräntan
Under par	Högre än kupongräntan

Förenklat kan vi skriva nuvärdet av ett antal kassaflöden som:

$$PV = \sum \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

Vill vi värdera riskfyllda obligationer (kassaflöden) kan vi göra detta genom att lägga på en spread

$$PV = \sum \frac{C_n}{(1+r+s)^n}$$

Denna spread innebär att vi kräver en högre avkastning av en riskfylld obligation jämfört med en riskfri. Man kallar denna spread risk premium. Detta ger obligationen ett lägre pris.

Definition: **Current**- och **Adjusted current yield** definieras på följande vis:

$$Current\ yield = \frac{Coupon\ rate}{Clean\ price} \cdot 100$$

$$Adjusted\ current\ yield = \frac{\left[Coupon\ rate + \left(100 \cdot Clean\ price\right)/\ n\right]}{Clean\ price} \cdot 100$$

där *n* är antalet år till förfall, d.v.s. hela år plus delar av år, där delar av år räknas med aktuell dagräkningskonvention.

Yieldkurvor

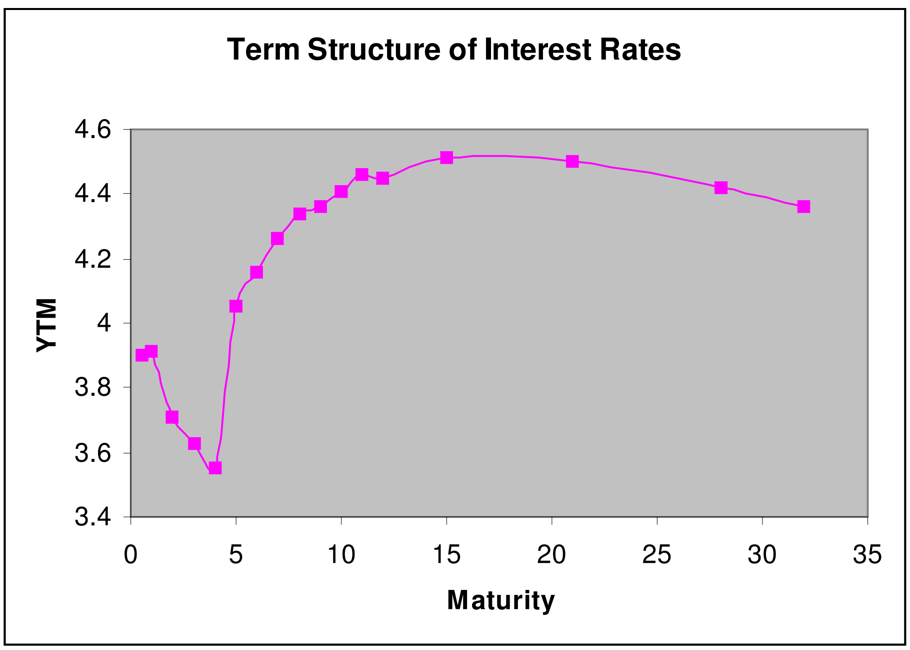
Yieldkurvor, eller terminstrukturen för räntorna avspeglar som vi nämnt yield-to-maturity för instrument med olika framtida lösendagar. Det finns flera teorier som försöker ge en förklaring på formen på dessa. De kan vara konkava eller konvexa. Några vanliga teorier är:

- Väntevärdesteori
- Marknadssegmentsteori
- Likviditetsteori

Den sistnämnda vilken är den vanligaste, argumenterar för att forwardräntorna alltid skall vara högre än de förväntade nollkupongsräntorna samt att investerare är beroende av likviditet och att utlånare önskar fixerade räntor. Då man studerar dynamiken på räntederivat måste man använda sig av modeller för terminstrukturen.

Vi utgår från de så kallade benchmark räntorna för statsobligationer. Viktigt är att vi använder oss av obligationer av samma typ och som är likvärdiga med avseende på risk och likviditet. Nedan ses data hämtade ur Finacial Times (2002):

År	Yield - Red	Kupong	Pris	Yield – Int
0.5	3.9	0		
1	3.91	0		
2	3.71	9	100.66	8.94
3	3.63	6.5	103.27	6.29
4	3.55	5	102.34	4.89
5	4.05	8.5	113.15	7.51
6	4.16	7.5	112.68	6.66
7	4.26	7.25	113.76	6.37
8	4.34	9	124.48	7.23
9	4.36	5.75	108.57	5.30
10	4.41	6.25	112.45	5.56
11	4.46	9	132.65	6.78
12	4.45	5	104.19	4.80
15	4.51	8	134.34	5.96
21	4.5	8	143.98	5.56
28	4.42	6	124.43	4.82
32	4.36	4.25	98.15	4.33



De korta räntorna, (upp till ett år) ges av s.k. Treasure-Bills, de mellan ett och tio år av Treasury-Notes och övriga av Treasury-Bonds. Parallellt, med kurvan ovan ligger räntor på obligationer utgivna av olika företag och kommuner. Dessa räntor är alltid högre, då de har en större risk än de statliga obligationerna. De högst rankade företagen ligger närmast de statliga. Skillnaden mellan företagsobligationer och statsobligationer kallas spread. Nedan ges de beteckningar som används för att klassa företag, och även olika länders ekonomi:

Standard and Poors		Moodys
AAA		Aaa
AA		Aa
A	Investment grade	A
BBB		Baa
BB		Ba
B	Speculative grade	B
CCC	"Junk"	Caa
CC		Ca
C		C

Ibland används även D. I skrivande stund är Argentina Goverment Bonds klassade som D.

När man känner yieldkurvan för statsräntorna kan man med så kallad **bootstrapping** beräkna **spot-yield-kurvan**. Detta går till så att man skalar av, strippar kupongerna för att bilda virtuella nollkupongsobligationer.

<u>Exempel:</u> Antag att vi har följande yield:

- 6m 4.000 % (6 månades ränta på årsbasis)
- 12m 5.951 %

Beräkna priset på en ettårig 10 %-obligation med halvårsvisa kuponger med diskonteringsräntan 5.951%.

<u>Lösning</u>: Vi summera nuvärdena av samtliga kassaflöden: Vi har en kupong på 5 kr (hälften av 10 % på nominella beloppet 100 kr) efter 6 månader samt en kupong plus det nominella beloppet efter ett år. Alltså:

$$\frac{5}{1+\frac{0.05915}{2}}+\frac{105}{\left(1+\frac{0.05915}{2}\right)^2}=103.874$$

Då halvårsräntan inte har någon kupong blir den halvåriga spoträntan också 4 %.

Vi söker därför den ettåriga spoträntan s, som måste uppfylla villkoret:

$$\frac{5}{1+\frac{0.04}{2}}+\frac{105}{\left(1+\frac{s}{2}\right)^2}=103.874$$

Löser vi ut s ur ekvationen ovan får att s = *6.0%*.

Eftersom yield to maturity definieras som den fixa ränta som prissätter obligationen tillbaka till marknadspriset kan vi beräkna denna genom att lösa ekvationen:

$$P=\sum_i \frac{c_i}{(1+YTM)^{t_i}}+\frac{100}{(1+YTM)^{t_n}}$$

där c_i är obligationens kuponger, t_i tiden för utbetalningar och P obligationens marknadspris. Men kontinuerlig ränta (contiuous compounding) får vi på samma sätt:

$$P=\sum_i c_i \cdot e^{-t_i \cdot YTM}+100 \cdot e^{-t_n \cdot YTM}$$

Kom ihåg att vi återinvesterar alla kuponger till samma yield och att YTM är unikt för varje instrument. Om vi inte kan återinvestera kupongerna, innebär detta att vi måste byta termen $(1 + YTM)^t$ ovan mot $(1 + t \cdot YTM)$.

Beräkning av YTM

För obligationer finns ett antal metoder för att beräkna Yield-to-Maturity (YTM). Som vi sett ovan gäller:

$$P=\sum_i \frac{c_i}{(1+YTM)^{t_i}}+\frac{Nom}{(1+YTM)^{t_n}}$$

där

Nom = obligationens nominella värde,
c_i = kupongen vid tiden t_i och
P = obligationens nuvärde.

Om vi därmed har ett marknadspris kan vi beräkna vilken YTM som marknaden anser gälla för obligationen. (Vi känner ju naturligtvis kupongräntan och dess nominella värde.) Denna ekvation används dock ganska ringa i praktiken eftersom den är relativt klumpig. Man måste veta exakta tider för kupongutbetalningar m.m. Dessa tider beror av kalendrar och dagräkningskonventioner. Om justeringar för datum med kupongutbetalningar och bankdagar försummas kan formeln förenklas. Eftersom alla obligationer betalar kuponger periodiskt kan vi mäta tiden i kupongperioder:

$$t_i = f + (i-1)$$

$$t_n = f + (n-1) + g$$

där

f	= del av period till nästa kupongdag
g	= del av period från föregående kupongdag
i	= antal hela perioder till kupongdag i

Om dagen för förfall inte sammanfaller med en kupongdag ska en sista delkupong med storleken $g \cdot C / H$ betalas ut, där C är kupongräntan och H antal kuponger per år. Med dessa parametrar kan vi förenkla summationen ovan i en enkel formel.

<u>ISMA och Moosmüller</u>

Det finns ett antal metoder att beräkna YTM varvid vi nämner två här, ISMA och Moosmüller. ISMA ges av:

$$\begin{aligned} P &= v^f \cdot \left[\frac{C}{H} \cdot \sum_{i=1}^{n} v^{i+1} + \left(Nom + g \cdot \frac{C}{H} \right) \cdot v^{n-1+g} \right] \\ &= v^f \cdot \left[\frac{C}{H} \cdot \frac{1-v^n}{1-v} + \left(Nom + g \cdot \frac{C}{H} \right) \cdot v^{n-1+g} \right] \end{aligned}$$

där

$$v = \frac{1}{1 + \frac{YTM_h}{H}}$$

YTM_h är Yield-to-Maturity given h kupongutbetalningar per år. Denna metod kan även användas på instrument utan kupong. En annan formel, Moosmüller används ofta använda i Tyskland.

Skillnaden mellan denna och ISMA är hur denna hanterar delar av kuponger. Moosmüller ges av:

$$P = \frac{1}{1+\frac{f \cdot YTM_h}{H}} \cdot \left[\frac{C}{H} \cdot \frac{1-v^n}{1-v} + \frac{Nom + g \cdot \frac{C}{H}}{1+\frac{g \cdot YTM_h}{H}} \cdot v^{n-1+g} \right]$$

Bootstrapping

Vi skall nu visa hur vi med hjälp av bootstrapping kan beräkna spoträntorna från ett antal benchmarkinstrument. Därför antar vi, att vi känner ett antal benchmarkräntor som vi fått från stats-obligationernas yield-to-maturity. Antag att dessa ges av:

År till förfall	Yield to maturity, YTM	Hypotetiskt obligationspris
0.5	6.00 %	100 kr
1.0	7.00 %	100 kr
1.5	8.00 %	100 kr
2.0	9.00 %	100 kr

<u>Spoträntorna</u>

Vi ska nu skala av dessa för att se vilka räntor som skulle gälla för nollkupongs-obligationer. Denna yieldkurva kan vi sedan använda som den riskfria räntan för lösendagar mellan noll och två år. Vidare antar vi att obligationerna betalar ut två kuponger per år. Då vår halvårsobligation inte betalar någon kupong kan vi redan betrakta denna som en nollkupongare. Därmed har vi spoträntan idag för lån på ett halvår:

$s_1 = 6.00$ %

Kortare räntor måste vi extrapolera bakåt då vi känner åtminstone en till i en senare tidpunkt. Nästa obligation kommer att betala ut en kupong på 3.50 efter 6 månader (7 % på 100 kr nominellt).

Nuvärdet av dessa 3.50 är med gällande halvårs spotränta är därmed:

$$\frac{3.5}{1+\frac{0.06}{2}}=3.398$$

Efter ett år kommer vi att erhålla 103.5 kr men en spotränta s_2. Därför måste:

$$\frac{3.5}{1+\frac{0.06}{2}}+\frac{103.5}{\left(1+\frac{s_2}{2}\right)^2}=100.0$$

Observera att 100.0 ovan är obligationens pris, inte det nominella värdet. Löser vi ut s_2 ur ekvationen ovan får vi att $s_2 = 7.018$ *%*. För 1.5-års obligationen får vi därmed (kupongränta 8% ger 4 kr i kupong per halvår):

$$\frac{4.0}{1+\frac{0.06}{2}}+\frac{4.0}{\left(1+\frac{0.7018}{2}\right)^2}+\frac{104.0}{\left(1+\frac{s_3}{2}\right)^3}=100.0$$

Denna ger oss: $s_3 = 8.0854$. På samma sätt kan vi bestämma s_4 (den tvååriga spot-yield-räntan) $s_4 = 9.117$ %. Därmed har vi den sökta spot-rate-yield-kurvan:

År till förfall	Yield to maturity, YTM	Spot-Rate-Yield-Curve
0.5	6.00 %	6.000 %
1.0	7.00 %	7.018 %
1.5	8.00 %	8.085 %
2.0	9.00 %	9.117 %

Som vi ser ligger denna yieldkurva något över YTM. I normala fall hade vi tagit hänsyn till att marknadens pris inte är 100 kr samt att vi har en upplupen ränta att ta hänsyn till.

Observera att vi har en mycket ideal situation ovan. Vi har antagit att varje kupongutbetalning sker exakt samma dag som en kortare obligation förfaller. I verkligheten har vi perioder av både glapp och överlapp. Då måste vi bygga in interpolation i boostrapmodellen, vilket gör att vi måste lösa ut spoträntorna via ett ekvationssystem.

Med hjälp an nollkupongsräntorna kan vi nu prissätta övriga obligationer.

Exempel: Antag att vi har en tvåårig obligation med en kupongränta på 6% och med halvårsvisa kuponger (på 3 kr). Vidare antar vi att nollkupongsräntorna för 6, 12, 18 och 24 månader är 5.0, 5.8, 6.4 respektive 6,8%. Då fås det **teoretiska priset** för obligationen av:

$$3 \cdot e^{-0.05 \cdot 0.5} + 3 \cdot e^{-0.058 \cdot 1.0} + 3 \cdot e^{-0.064 \cdot 1.5} + 103 \cdot e^{-0.068 \cdot 2.0} = 98.39$$

Vi kan nu beräkna obligationens yield (Yield to Maturity):

$$3 \cdot e^{-y \cdot 0.5} + 3 \cdot e^{-y \cdot 1.0} + 3 \cdot e^{-y \cdot 1.5} + 103 \cdot e^{-y \cdot 2.0} = 98.39$$

Detta ger oss en yield y på 6.67 %. Vi ska längre fram nämna en annan metod för att beräkna YTM kallad ISMA. Andra existerande metoder är Braess-Fengmeyer eller Moosmüller.

Obligationens **par yield** beräknas med hjälp av:

$$\frac{c}{2} \cdot e^{-0.05 \cdot 0.5} + \frac{c}{2} \cdot e^{-0.058 \cdot 1.0} + \frac{c}{2} \cdot e^{-0.064 \cdot 1.5} + \left(100 + \frac{c}{2}\right) \cdot e^{-0.068 \cdot 2.0} = 100.00$$

Alltså, den kupongränta som prissätter obligationen till dess nominella värde (par value). För vår obligation får vi c = 6.87 %.

Forwardräntorna

När vi har nollkupongsräntorna (vår spot rate yield kurva) kan vi beräkna forwardräntorna, med hjälp av:

$$r_{t_2 - t_1}^{forward} = \left(\frac{(1 + r_{t_2}^{spot})^{t_2}}{(1 + r_{t_1}^{spot})^{t_1}} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1$$

Ve erhåller då följande värden:

År till förfall	Yield to maturity	Spot rate	Forward rate
0.5	6.00 %	6.000 %	6.000 %
1.0	7.00 %	7.018 %	8.046 %
1.5	8.00 %	8.085 %	10.251 %
2.0	9.00 %	9.117 %	12.272 %

Beräkning av yield kurvor

För att värdera olika instrument har vi sett att vi behöver vi veta vilken ränta vi ska diskontera de framtida kassaflöden med, så att vi kan beräkna nuvärdet. Speciellt är yieldkurvor viktigt för instrument med flera kassaflöden, exempelvis obligationer. Vi behöver då räntor för samtliga dagar då dessa betalar ut en kupong. Därför måste man använda sig av interpolation för att kunna beräkna en yield för en godtycklig tidpunkt. Med bootstrapping har vi fått fram de räntor vi behöver för att med interpolation bestämma hela yieldkurvan.

Då det även handlas en mängd instrument på marknaden med större risk än statsobligationer behöver vi värdera dessa med en något högre ränta. För sådana instrument utgår man från en riskfri yieldkurva och adderar ett så kallat spread ovanpå denna. Man skiftar då yield- kurvan/kurvorna uppåt med en denna spread, ofta en konstant som anges i antal räntepunkter. En högre yield leder till ett lägre pris på de instrument man värderar. Då dessa är förknippade med en viss risk är marknaden inte villig att betala ett lika högt pris på en sådan som för en riskfri obligation. Man kan addera en spread på de flesta räntorna ovan, men vill man använda spreaden för värdering måste man alltid konvertera denna till en spread på spotkurvan.

Interpolationsmetoder

Det finns en rad olika interpolationsmetoder och vi skall här nämna några av dem:

- Linjär interpolation
- Logaritmisk interpolation.
- Polynomanpassning.
- Kubisk spline
- Hermite interpolation

Linjär interpolation

En linjärt interpolerad kurva på Yield to Maturity enligt tabellen nedan består av tre linjära ekvationer $Y_i(t)$, som var och en går genom två punkter T_i och T_{i+1} enligt:

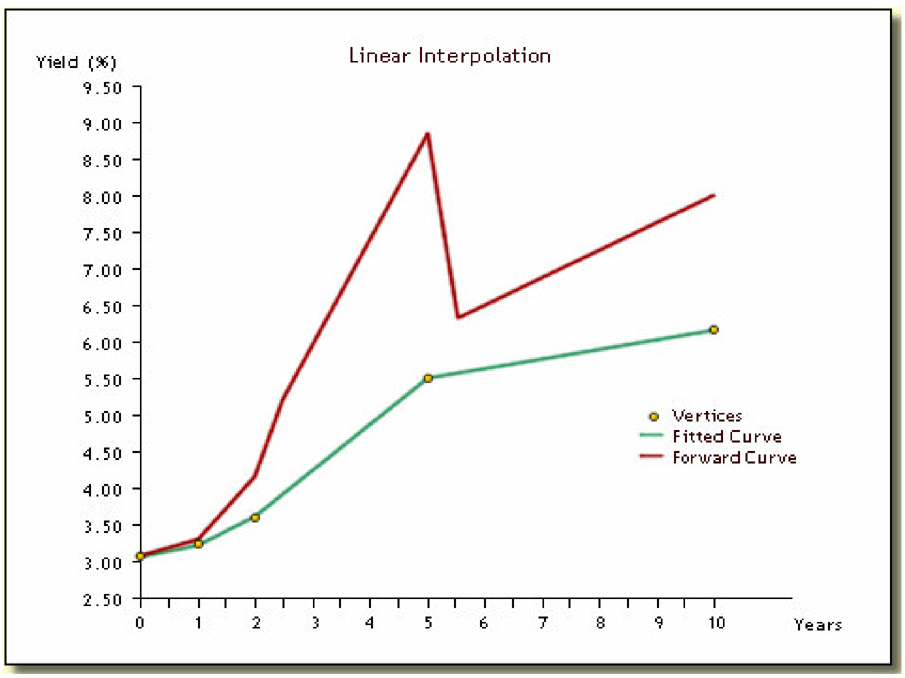
$$Y_i(t) = Y_i + \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i} \cdot (Y_{i+1} - Y_i)$$

År till förfall	Yield to maturity
0.0	4.00 %
2.0	5.00 %
4.0	6.50 %
10.0	6.75 %

För att exempelvis beräkna den 6-åriga YTM-räntan får vi:

$$Y_2(6) = 6.50 + \frac{6-4}{10-4} \cdot (6.75 - 6.50) = 6.5833\%$$

Problemet med linjär interpolation är att kurvan kan ha skarpa vinklar där linjerna möts, vilket resulterar i stora hopp då man sedan ska beräkna forwardräntorna. Se figuren nedan:



Logaritmisk interpolation

Vid logaritmisk interpolation använder man sig av följande uttryck baserad på diskonteringsfaktorerna:

$$D(t) = D(T_i)^{\frac{T_{i+1}-t}{T_{i+1}-T_i}} \cdot D(T_{i+1})^{\frac{t-T_i}{T_{i+1}-T_i}}$$

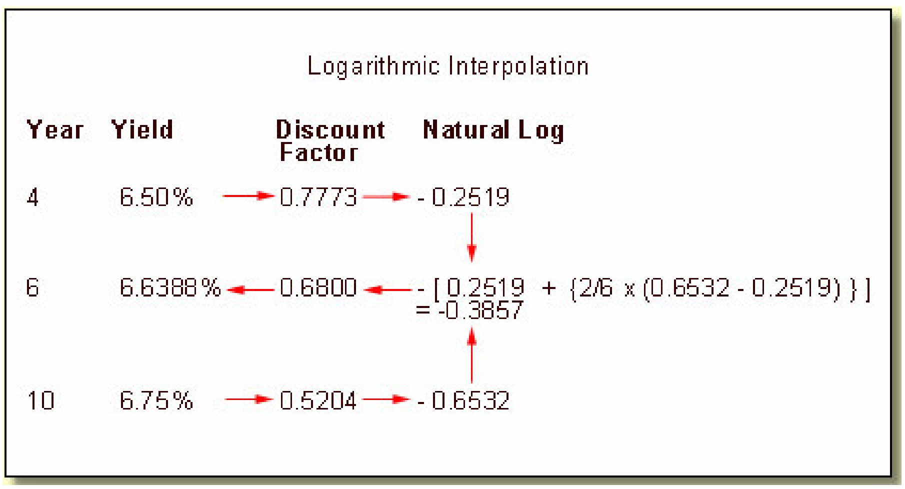
Tar vi sedan logaritmen av höger och vänster sida får vi:

$$\ln\{D(t)\} = \ln\{D(T_i)\} + \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i} \cdot \left[\ln\{D(T_{i+1})\} - \ln\{D(T_i)\} \right]$$

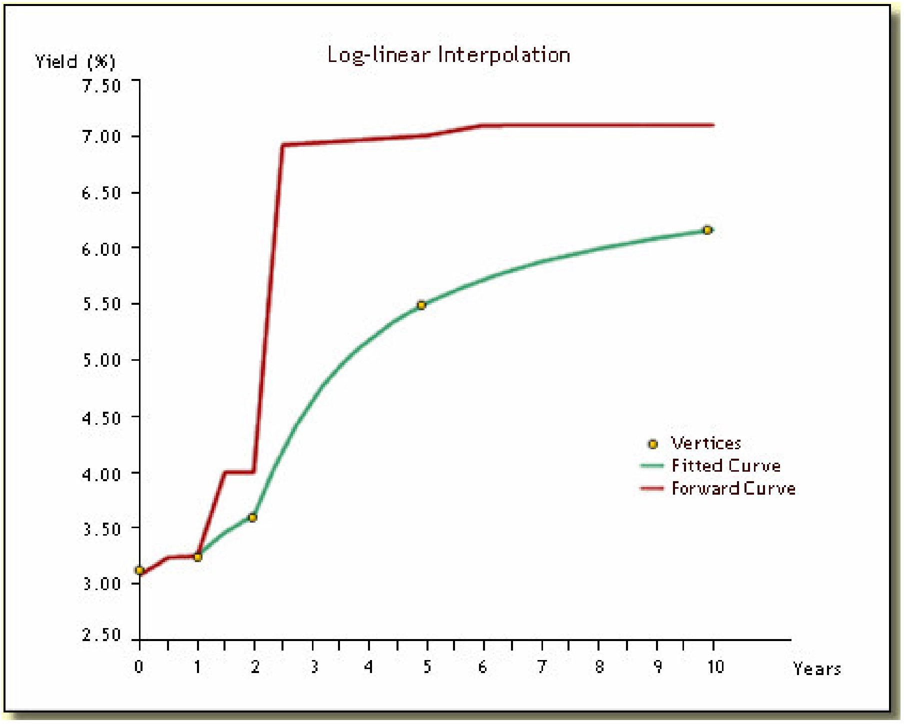
För att nu beräkna den 6-åriga YTM-räntan gör vi följande:

1. Beräkna diskonteringsfaktorerna för år 4 och 10
2. Tar logaritmen av dessa
3. Gör linjär interpolation på dessa värden
4. Beräkna diskonteringsfaktorn för den 6-åriga räntan och
5. Översätt denna i termer av yield

Vi illustrerar detta i figuren nedan.



Nackdelen är att de interpolerade räntorna blir något högre än med linjär interpolation. Dessutom får vi fortfarande hopp i forwardkurvan. Däremellan är forwardräntan styckevis konstant. Detta vill man dock ofta ha då man räknar med Hazardräntor.



Polynomanpassning

Vid polynomanpassning smetas de skarpa vinklarna ut och vi får en kontinuerlig kurva. Ide'n går ut på att om vi har $n+1$ diskreta punkter så kan vi anpassa ett polynom av grad n som går genom alla dessa punkter:

$$Y_n(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + ... + + a_n \cdot t^n$$

Polynomet kan bestämmas med Lagranges metod:

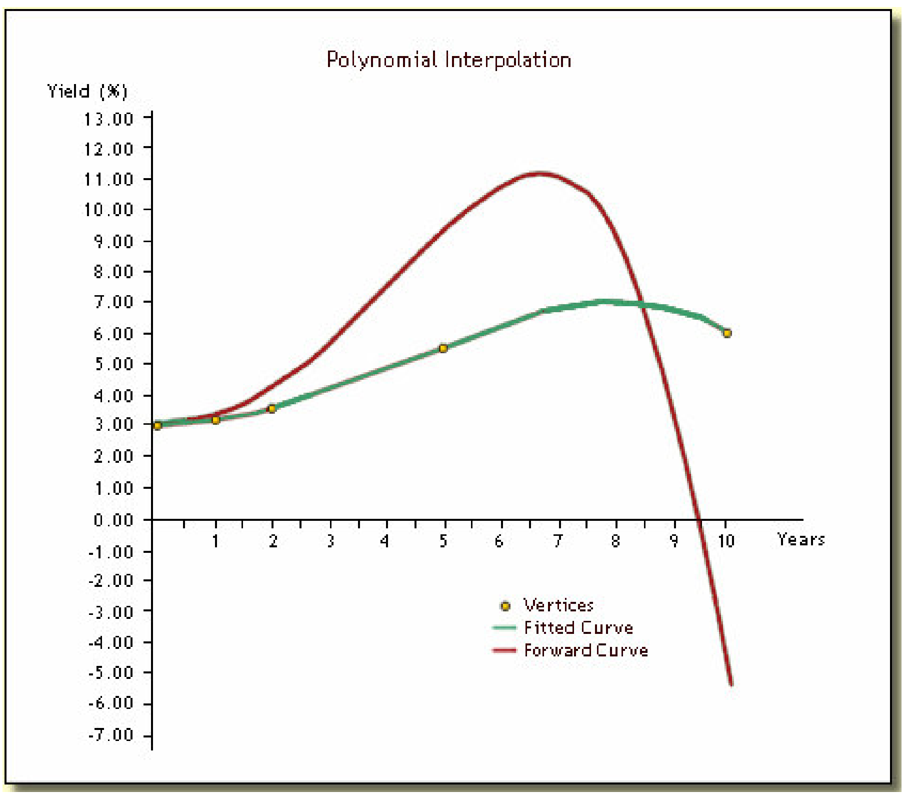
$$\begin{aligned} Y_n(t) = & \frac{(t-T_1)(t-T_2)(t-T_3)...(t-T_n)}{(T_0-T_1)(T_0-T_2)(T_0-T_3)...(T_0-T_n)} \cdot Y_0 \\ & + \frac{(t-T_0)(t-T_2)(t-T_3)...(t-T_n)}{(T_1-T_0)(T_1-T_2)(T_1-T_3)...(T_1-T_n)} \cdot Y_1 \\ & + \frac{(t-T_0)(t-T_1)(t-T_3)...(t-T_n)}{(T_2-T_0)(T_2-T_1)(T_2-T_3)...(T_2-T_n)} \cdot Y_2 \\ & + ... \\ & + \frac{(t-T_0)(t-T_1)(t-T_2)...(t-T_{n-1})}{(T_n-T_0)(T_n-T_2)(T_n-T_3)...(T_n-T_{n-1})} \cdot Y_n \end{aligned}$$

Med vårt exempel får vi:

$$\begin{aligned}Y_3(t) &= \frac{(t-2)(t-4)(t-10)}{(0-2)(0-4)(0-10)}\cdot 4.00 + \frac{(t-0)(t-4)(t-10)}{(2-0)(2-4)(2-10)}\cdot 5.00 \\ &+ \frac{(t-0)(t-2)(t-10)}{(4-0)(4-2)(4-10)}\cdot 6.50 + \frac{(t-0)(t-2)(t-4)}{(10-0)(10-2)(10-4)}\cdot 6.75 \\ &= -0.0151\cdot t^3 + 0.15313\cdot t^2 + 0.25417\cdot t + 4.0\end{aligned}$$

För $t = 6$ får vi att $Y_3(6) = 7.775$ %.

Ett problem med denna metod ses nedan. Då en punkt får den anpassade kurvans lutning att byta tecken får man negativa forwardräntor.



Kubisk spline

Denna teknik adderar en viss styvhet i yieldkurvan samtidigt som kurvan blir kontinuerlig och deriverbar. Tekniken går ut på att anpassa punkterna till ett antal polynom av graden tre. I vårt fall:

$$
\begin{aligned}
Y_0(t) &= a_0 \cdot t^3 + b_0 \cdot t^2 + c_0 \cdot t + d_0 \quad \textit{mellan} \quad T_0 \textit{ och } T_1 \\
Y_1(t) &= a_1 \cdot t^3 + b_1 \cdot t^2 + c_1 \cdot t + d_1 \quad \textit{mellan} \quad T_1 \textit{ och } T_2 \\
Y_2(t) &= a_2 \cdot t^3 + b_2 \cdot t^2 + c_2 \cdot t + d_2 \quad \textit{mellan} \quad T_2 \textit{ och } T_3
\end{aligned}
$$

Varje ekvation har 4 obekanta (koefficienterna *a* – *d*), så med tre ekvationer har vi följande ekvationssystem med 12 obekanta att lösa:

$$
\begin{bmatrix}
T_0^3 & T_0^2 & T_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
T_1^3 & T_1^2 & T_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_1^3 & T_1^2 & T_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & T_2^3 & T_2^2 & T_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2^3 & T_2^2 & T_2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_3^3 & T_3^2 & T_3 & 1 \\
3T_1^2 & 2T_1 & 1 & 0 & -3T_1^2 & -2T_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6T_1 & 2 & 0 & 0 & -6T_1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3T_2^2 & 2T_2 & 1 & 0 & -3T_2^2 & -2T_2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6T_2 & 2 & 0 & 0 & -6T_2 & -2 & 0 & 0 \\
6T_0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6T_3 & 2 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4.00 \\ 5.00 \\ 6.50 \\ 6.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

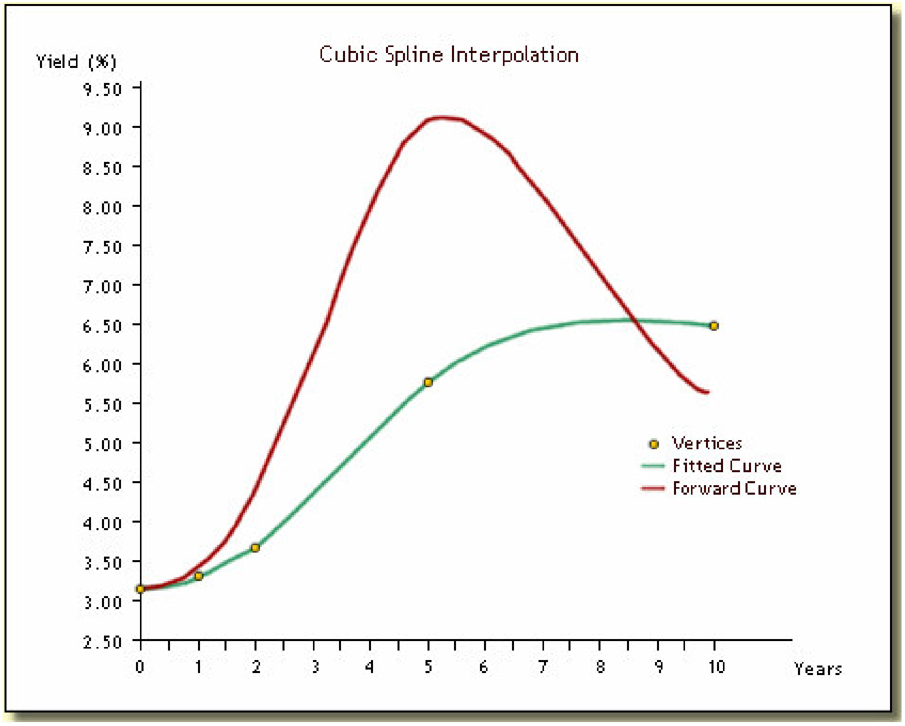
I vårt fall fås koefficienterna till:

{ 0.022, 0.000, 0.413, 4.000, 0.047, 0.411, -0.410, 4.548, .008, -0.249, 2.230, 1.029 }

Vi kan då beräkna den 6-åriga räntan som

$$Y_2(6) = 0.008 \cdot 6^3 - 0.249 \cdot 6^2 + 2.230 \cdot 6 + 1.029 = 7.173\%$$

Hela kurvan med forwardräntan ses i figuren nedan.



Det finns naturligtvis någon brist även i denna metod även om den är lite svårare att upptäcka. När man vill studera risker och genom att skifta räntepunkter på yielkurvan upptäcker man att då man skifta en del av kurvan påverkas helheten. Även om denna påverkan är liten är den ej önskvärd.

Hermite interpolation

Denna teknik som kallas för *clamped cubic spline*, gör att skift i den interpolerade kurvan endast påverkar närliggande punkter. Låt *r* vara en vektor $Y' = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ och

$$Y(t) = Y_i + m_i(t)\cdot\left(Y_{i+1} - Y_i\right) + m_i(t)\cdot\left(1 - m_i(t)\right)\cdot g_i + m_i^2(t)\cdot\left(1 - m_i(t)\right)\cdot c_i$$

där

$$m_i(t) = \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i}$$
$$g_i = \left(T_{i+1} - T_i\right)\cdot y_i - \left(Y_{i+1} - Y_i\right)$$
$$c_i = 2\left(Y_{i+1} - Y_i\right) - \left(T_{i+1} - T_i\right)\cdot\left(y_{i+1} + y_i\right)$$

Då beräknas vektorn *Y'* av

$$y_i = \frac{1}{T_{i+1} - T_{i-1}} \left[\frac{(Y_i - Y_{i-1}) \cdot (T_{i+1} - T_i)}{T_i - T_{i-1}} + \frac{(Y_{i+1} - Y_i) \cdot (T_i - T_{i-1})}{T_{i+1} - T_i} \right]$$

Med randvillkoren

$$y_1 = \frac{1}{T_3 - T_1} \left[\frac{(Y_2 - Y_1) \cdot (T_3 + T_2 - 2 \cdot T_1)}{T_2 - T_1} + \frac{(Y_3 - Y_2) \cdot (T_2 - T_1)}{T_3 - T_2} \right]$$

$$y_n = \frac{1}{T_{n-1} - T_{n-2}} \left[\frac{(Y_{n-1} - Y_{n-2}) \cdot (T_n - T_{n-1})}{T_{n-1} - T_{n-2}} + \frac{(Y_n - Y_{n-1}) \cdot (2 \cdot T_n - T_{n-1} - T_{n-2})}{T_n - T_{n-1}} \right]$$

En variant på Hermiteinterpolation, är en metod som kallas Hermite RT. Denna interpolerar på Hermite-vis via logaritmen av diskonteringsräntorna. Diskonteringsräntorna uttrycks som:

$$D(t) = e^{-r \cdot t}$$

där *r* är den kontinuerliga räntan vid tiden *t*. *ln[D(t)] = -rt* därav namnet på metoden. För spoträntan gäller då:

$$(1 + Y)^t = e^{-r \cdot t}$$

Denna räntekurva blir något snällare än vanlig Hermite. Speciellt då likviditeten är låg och antalet instrument begränsade. I avancerade risksystem, kan man ofta dessutom vikta de olika metoderna i beräkningarna av yieldkurvorna.

Spread och spreadkurvor

Spread används för att prissätta värdepapper med vissa egenskaper, exempelvis:

- Utgivaren har lägre kreditranking, jämfört med staten.
- Värdepapperet har en ranking med turordning vid en eventuell konkurs.
- Likviditet.
- Värdepapperet har en inbyggd option av något slag.

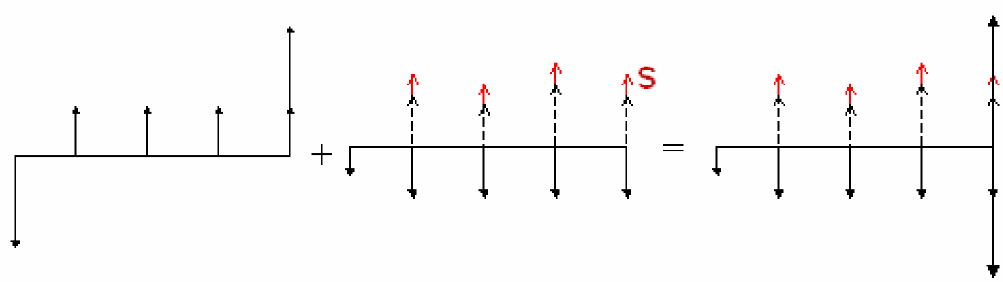
Vi definierar ett spread genom att addera ett antal räntepunkter till en underliggande yieldkurva kallad *Base Yield Curve*. På så sätt får instrument värderade med denna ett lägre nuvärde och därmed ett lägre pris. Baskurvan består oftast av ett antal benchmarkräntor givna av statsobligationer och andra statliga räntor. Naturligtvis kan vi definiera en spread på vilken annan yieldkurva som helst. Sådana spreadkurvor används för att värdera instrument som inte är riskfria. Ett annat användningsområde för spread är då man vill simulera scenarior där den framtida räntan ändras. Antag exempelvis att vi vill veta hur mycket värdet ändras för en obligation om räntan går upp en räntepunkt. Då måste vi skifta hela yieldkurvan för att kunna omvärdera samtliga kassaflöden. Samma teknik används även vid beräkna känslighetsparametrar som beror på räntan.

Exempel: Ett spread på spoträntan ger os diskonteringsräntan som:

$$r_{t_1}^{discount} = \frac{1}{\left(1 + r_{t_1}^{spot} + s\right)^{t_1}}$$

Asset Swap Spread

En asset swap spread kan betraktas som ett kreditderivat. Idén bakom en sådan är att konvertera obligationer till syntetiska FRN:er. Orsaken är att man vill ha en struktur som endast har kreditrisk och är fri från ränterisk. Normalt betalar man en premie för att man ska nå par, så att den startpriset blir 100. Asset swap spread är alltså det spred, S på den flytande räntan som ger ett nuvärde av noll från start.



Givet ett obligationspris, *P* kan vi ta fram den motsvarande asset swap spreaden.

1. Köp obligationen för marknadspriset, *P* (den lilla vänstra pilen ner). Om exempelvis obligationen handlas till priset 95 blir denna 5 för att priset för FRN'en ska bli 100. Då denna har ett nuvärde på noll koncentrerar vi oss på swap-delen.
2. Lägg till två kompenserande flöden på slutet av swapen och identifiera de olika betalningarna. Först identifierar vi de flytande kassaflödena:
   Vi erhåller (se högra bilden ovan), de flytande kassaflödena (streckade pilar)

plus de två komponenterna vid slutdagen som tillsammans kan betraktas som en riskfri FRN prissatt till par (100).

3. Nuvärdet av själva asset swap spreaden S (de små pilarna) är:

$$PV = S \cdot \sum_i p_i d_i$$

där p_i är period i och d_i diskonteringsfaktorn för betalning i från swapkurvan.

4. På betalsidan har vi kupongerna plus det nominella värdet på obligationen, prissatt från swapkurvan, $P_{obligation}$.
5. På betalsidan har vi också startpremien för swapen (del lilla, vänstra pilen ner) $100 - P_{swap}$.

Vi har därmed:

$$100 + S \cdot \sum_i p_i d_i - P_{obligation} - (100.0 - P_{swap}) = 0$$

Man kan också använda samma formel för att bestämma priset på en obligation givet en spread.

$$S = \frac{P_{obligation} - P_{swap}}{\sum_i p_i \cdot d_i}$$

Eftersom vi behöver en swapkurva för att värdera obligationsdelen och för att ta fram diskonteringsfaktorerna definierar vi asset-swap-spreadet ovanpå kurvan. Vi kan också använda samma formel för att värdera en obligation, givet ett spread, genom att lösa ut priset i ekvationen ovan. Samma formel kan också användas för cross currency-swaps. Enda skillnaden är då att diskonteringsfaktorn vi använder hämtas från den andra valutan för det flytande benet.

Observera att vi måste ta i beaktande hur ofta kuponger betalas ut.

YTM-Spread

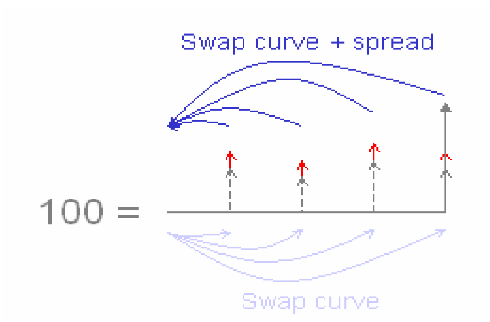
För att kunna relatera olika obligationer till varandra kan man använda YTM-Spread. Antag att vi har en given benckmarkobligation *BO*, med en yield-to-maturity YTM och ett pris P_{BO} där vi vill prissätta en annan obligation O så att dess pris blir P_O med en spread på BO´s yield-to-maturity. Eftersom det existerar ett ett-till-ett-förhållande mellan ett pris och en YTM kan vi finna dessa spread och vise versa.

$$\mathrm{YTM}(P_O) = \mathrm{YTM}(P_{BO}) + \mathrm{Spread}$$

Man kan använda ISMA (se nedan) för att beräkna YTM. Observera att om obligationerna har olika långa perioder mellan kupongerna måste man först beräkna spreaden på *BO* för att sedan konvertera denna till *B*.

Par FRN Spread

Par FRN spread är det spread som krävs för att den flytande diskonterade räntan i en FRN då man använder FRA:ns underliggande kurva vid värderingen.



Option Adjusted Spread

Option Adjusted Spread, eller OAS är ett spread på forwardräntorna i ett binomialträd. Namnet kommer av att man vill prissätta obligationer med en inbyggd option genom att addera ett spread. Vi skall studera denna metoden i detalj senare.

Duration och konvexitet

Med duration beskriver man en obligations priskänslighet, d.v.s. hur mycket obligationens pris (dirty price = gross price) omedelbart påverkas av en given förändring av marknadsräntan (yield to maturity). Man använder sig av fyra så kallade riskmått:

- Macaulay's duration,
- Modifierad duration och
- Dollar duration.
- Effektiv duration

Vi återkommer med att studera den effektiva durationen då vi studerar callable bonds nedan. Följande faktorer påverkar durationen:

1. Obligationens löptid.
2. Kupungstorleken.
3. Kupongfrekvensen och
4. Marknadsräntan

Macaulay's duration är en annan benämning för räntebindningstid eller kapital-bindningstid. Denna anger hur lång tid som krävs innan en obligation ger en ren vinst, d.v.s. betalar tillbaka insatsen. En nollkupongsobligation (en obligation utan kupongutbetalningar) med har således samma duration som dess löptid. En obligation med kuponger har en duration som är mindre än dess löptid. Man säger att Macaulay's duration är den vägda genomsnittliga löptiden för obligationen eller portföljen. Denna löptid innebär alltså den tiden det tar innan man kompenserats för ett prisfall om marknadsräntan går upp, om man har investerat i en bättre ränta. När man beräknar Macaulay's duration betraktar vi obligationen som lika många nollkupongare som antalet kupongutbetalningar samt obligationens nominella värde så som enskilda obligationer. Därefter beräknar man den nuvärdesvägda medellöptiden för dessa nollkupongobligationer.

Antag därför att vi har n kassaflöden c_i, $i = 1, 2, ..., n$ vid tidpunkter t_i. Då ges obligationens pris, P av (med kontinuerlig kapitalisering):

$$P = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i}$$

där y är obligationens YTM (yield to maturity). Durationen definieras då som

$$D = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i} = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{P}\right]$$

Faktorn i [.] anger nuvärdet av respektive kassaflöde. Ofta skrivs durationen som

$$D = \frac{1}{P} \cdot \left[\frac{N}{\left(1+\frac{Y}{100}\right)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{C \cdot i}{\left(1+\frac{Y}{100}\right)^i}\right]$$

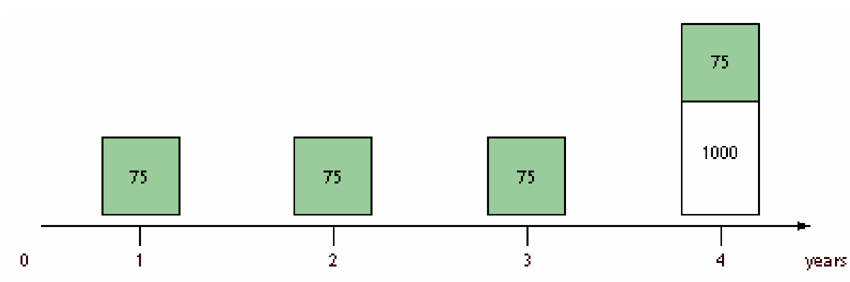
Där vi antagit en kupong per år och där

P	= likvidbelopp, nuvärdet av obligationen,
Y	= marknadsräntan (yield to maturity)
C	= kupongens storlek = $r \cdot P$ där r är obligationens ränta.
N	= det nominella beloppet på obligationen.
n	= antalet år till obligationens förfall.

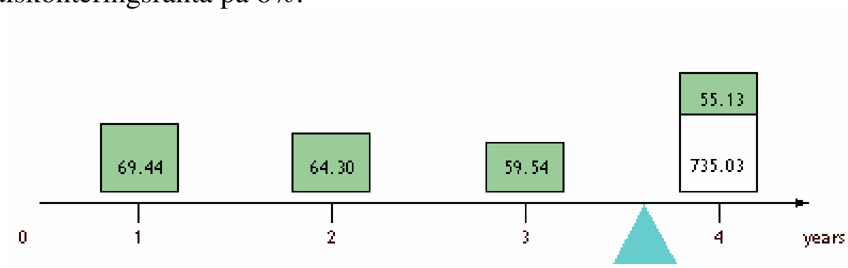
P ges då av:

$$P = \frac{N}{\left(1 + \frac{Y}{100}\right)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{\left(1 + \frac{Y}{100}\right)^i}$$

Vi ser åter att vi summerar och viktar alla diskonterade kassaflöden för obligationen. Durationen illustreras nedan för en 4-årig obligation på 1000 nominellt värde med en kupongränta på 7 %.



Innan vi kan beräkna durationen måste vi nuvärdesdiskontera kassaflödena. Vi gör detta med en diskonteringsränta på 8%.



Vi får en duration på cirka 3.6 år. 3.6 år

Durationen för en portfölj av ränteinstrument beräknas som det viktade medelvärdet av durationen för de ingående instrumenten där deras vikt räknas med avseende på de nuvärdesdiskonterade värdena:

$$D_{portfolio} = \frac{1}{PV_{portfolio}} \cdot \sum_i PV_i \cdot D_i$$

<u>Definition</u>: **Modifierad duration** anger den procentuella förändringen i pris om marknadsräntan går upp med en procent.

$$MD = \frac{D}{\left(1 + \frac{Y}{100}\right)}$$

Man benämner ibland denna som ränteelastisiteten. Den modifierade durationen är motsvarigheten till optionsanalysens delta.

<u>Exempel:</u> En treårig obligation på 1000 kr som betalar en årlig kupong på 10%. Marknadspriset på denna år 951.97 kr med en yield på 12%.

$$D = \frac{0.10 \cdot 1000/(1+0.12) + 2 \cdot 0.10 \cdot 1000/(1+0.12)^2 + 3 \cdot (1+0.10) \cdot 1000/(1+0.12)^3}{951.97}$$
$$= 2.73 \quad år$$

Beräknar man durationen för olika obligationer kan man utnyttja detta för att se vilken obligation som innebär störst respektive minst risk. Ju större duration, ju större risk.

<u>Definition</u>: **Dollar duration** anger förändringen i priset (kronor, dollar, ...) om marknadsräntan går upp med en procent.

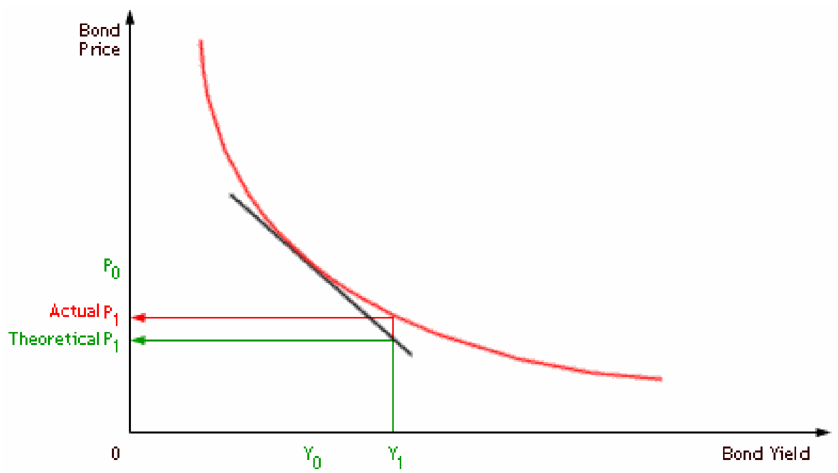
$$DD = MD \cdot N$$

<u>Definition</u>: **Base Point Value** anger förändringen i priset, per 100 nominellt om marknadsräntan går upp med en räntepunkt (= 0.01%).

$$BPV = \frac{D_{modified}(\%)}{100} \cdot \frac{DirtyPrice}{100}$$

<u>Definition</u>: **Konvexitet** anger den procentuella förändringen i den modifierade durationen om marknadsräntan går upp med en räntepunkt. Konvexiteten kan också definieras som ändringen i BPV för en given ändring i yield.

Konvexiteten är ickelinjär och kan jämföras med optionsanalysens gammavärde.
I figuren nedan ses det fel man får i det teoretiska priset då man inte tar hänsyn till konvexiteten då yielden ändras.



<u>Definition</u>: **Slutbelopp** anger det värdet (beloppet) av obligationen på slutdagen då man investerat utbetalda kuponger till marknadsräntan.

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{Y}{100}\right)^n$$

Om vi differentiera obligationspriset ovan får vi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-y t_i} = -PD$$

alltså

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \Delta y$$

vilket kan tillämpas på en hel portfölj. Uttrycker vi y i årlig avkastning fås

$$\Delta P = -\frac{P \cdot D \cdot \Delta y}{1 + y/m} = -P \cdot MD \cdot \Delta y$$

där m är antal kuponger per år.

Hedging med hjälp av duration

Antag att vi med ett futurekontrakt vill hedga en position i ett ränteberoende instrument. Låt F_c vara priset per kontrakt för futuren, D_F durationen av det underliggande instrumentet till futuren, P det framtida värdet av portföljen vi vill hedga vid hedgens slutdag och D_P durationen på portföljen på slutdagen. Vi har då:

$$\Delta P = -P \cdot D_P \cdot \Delta y$$
$$\Delta F_c \approx -F_c \cdot D_F \cdot \Delta y$$

Den durationsbaserade hedgefaktorn är då uttryck i antalet futurekontrakt

$$N = \frac{P \cdot D_P}{F_c \cdot D_F}$$

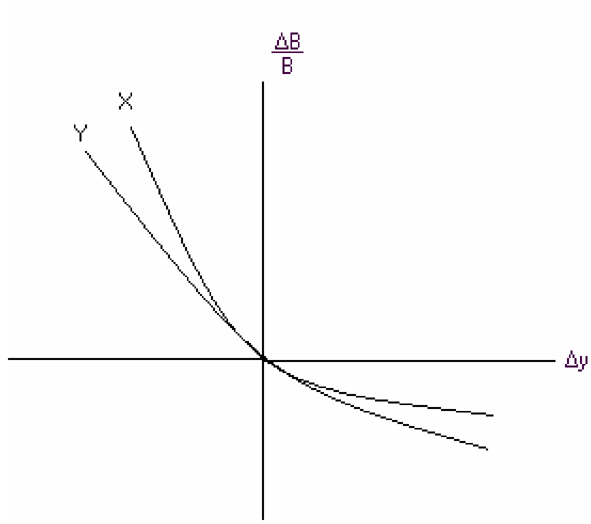
Svårigheter:

1. Man måste gissa vilket instrument som är billigast att leverera (CTD) på slutdagen. Denna kan komma att ändras med tiden.
2. Konvexiteten, se nedan
3. Vi kan ha icke parallella skift på yieldkurvan

Konvexiteten definieras av

$$\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 c_i e^{-yt_i} \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta P}{P} = -D \cdot \Delta y + \frac{1}{2} C \cdot (\Delta y)^2$$

Så om X och Y är två olika portföljer med samma duration kan skillnaden i konvexitet bli stor vid stora ändringar i yield. C är störst nära en kupongdag.



OAS: Option Adjusted Spread

Vi har tidigare i avsnittet om spread mycket kort nämnt OAS. Det är nu dags att studera denna modell i detalj.

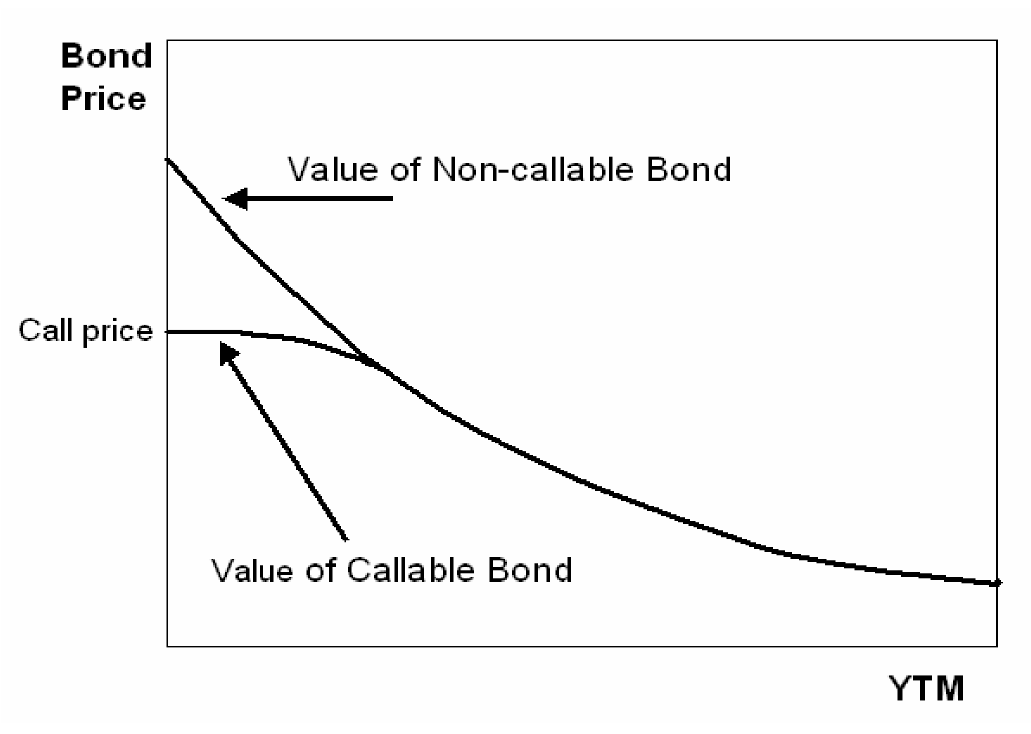
Yield to Call, Yield to Put, Yield to Worst och Yield to Best

Vi har hittills diskuterat vanliga ordinära obligationer, så kallade bullet bonds. Vi har sett att dessa betalar en fix periodisk kupong samt på slutdagen hela dess nominella värde (principalen) plus den sista kupongen. För en bullet bond har vi använt oss av en yield-to-maturity för att bestämma dess pris. En sådan obligation är icke amorterande, d.v.s. principalen är kvar tills dess att obligationen förfaller. Speciellt har vi studerat *benchmark bullet bonds* vilka är bullet bonds utgivna av staten. Dessa antas därför vara riskfria, d.v.s. fria från kreditrisk. En *non-benchmark bullet bond* är en bullet bond som i stället är utgiven av ett företag eller en kommun. Därför har dessa en kreditrisk skild från noll.

Vi ska nu gå vidare för att diskutera obligationer som har en i kontraktet inbyggd option, exempelvis *callable bonds.* En utgivare av en callable bond har rätten men inte skyldigheten att köpa tillbaka obligationen vid en eller flera bestämda tidpunkter under obligationens livstid. Om utgivaren gör en så kallad *call-back* betalar han köparen ett fördefinierat pris. Detta pris är oftast högre än obligationens parvärde. Skillnaden mellan priset och parvärdet kallas *call premium* eller *call price*. Många undrar kanske varför en utgivare kan tänkas att köpa tillbaka obligationen. Svaret på detta är följande: Antag att marknadsräntorna var höga då obligationens livscykel startade och att räntorna sedan sjunker. Då betalar obligationen en förhållandevis hög ränta. Detta är naturligtvis ofördelaktigt för utgivaren som i sin tur får låg ränta för egna investeringar. Då kommer utgivaren att köpa tillbaka obligationerna för att slippa att betala denna höga ränta och eventuellt ge ut nya obligationer med lägre ränta. Detta är negativt för investeraren som går miste om en bra ränta och måste investera om sitt kapital i en lägre ränta. I figuren nedan ser vi en jämförelse mellan priskurvan för en vanlig obligation och en callable.

En annan typ av obligation med en inbyggd option är putable bond. Här har köparen rätten att sälja tillbaka obligationen vid en eller flera bestämda tidpunkter under obligationens livstid. I detta fall gör köparen en så kallad *put-back* till ett fördefinierat pris.

Vi har tidigare nämnt nollkupongsobligationer. Precis som namnet säger betalar de inte ut någon kupong. Så dessa obligationer genererar endast ett kassaflöde vid en bestämd tidpunkt i framtiden. Eftersom de inte genererar periodiska kuponger handlas de alltid för det på par diskonterade nuvärdet. Den diskonteringsränta som prissätter en nollkupongare till dess nuvarande marknadsvärde kallas för nollkupongsräntan (zero rate) eller spot räntan.



Som vi ser i figuren ovan kan vi inte använda traditionella metoder för att värdera obligationer med en inbyggd option. Vi kan nämligen inte förvänta oss att erhålla alla kuponger eftersom utfärdaren (om vi har en callable bond) kan göra en call-back. Det traditionella sättet att värdera dessa är att beräkna motsvarande yield till varje möjlig tidpunkt för call-back, samt YTM. När vi beräkna denna yield, yield-to-call (callable) eller yield-to-put (putable) gör vi på samma sätt som när vi beräknar yield-to-maturity. Enda skillnaden är att datumet är den dag då återköp kan ske och priset som blir call-price i stället för par.

<u>Exempel:</u>

Security 1:	8% UK goverment maturing 4 may 2010.
Type:	domestic ”double-dated” gilt, semi-annual
Call features:	callable at par on 5 May 2007
Settlement:	18 June 2002
Price:	101.44 (decimal)

Yield to maturity (YTM on 5 May 2010): 7.75 %
Yield to call (YTC on 5 May 2006): 7.64 %

Om nuvarande marknadsyield är lägre än vår 8 %-iga kupongränta så att obligationen handlas över par gör man en kapitalförlust på 1.44 % om obligationen förfaller på par, antingen 2006 eller 2010. Återköps obligationen år 2006 skall kapitalförlusten amorteras under en kortare tidsperiod. Därav är YTC lägre än YTM. Om marknadsyielden är högre än 8% handlas obligationen under par (säg 97.00). Då blir i stället YTC högre än YTM.

Om obligationen handlas över par är det sämsta tänkbara (worst-case scenario) att man blir löst år 2006. Då tjänar innehavaren bara 7.64 %.

Den sämsta yielden man kan erhålla kallas yield-to-worst. Metoden att beräkna en callable bond med yield-to-worst är ytterst konservativ eftersom man alltid antar att det värsta inträffar, utan att ta hänsyn till sannolikheten att detta verkligen kommer att ske. På samma sätt som ovan beräknar man yield-to-best för putable bonds.

De sex stegen i OAS

Det finns sex steg associerade men OAS-modellen. Vi antar nedan att vi studerar en callable bond.

1. För varje dag med kassaflöde, beräkna aktuell forwardränta.

2. Bygg ett binomialträd med lika sannolikheter (= ½).

3. Kalibrera modellen genom att justera noderna i trädet tills dess att modellen kan beräknar samma priser som de som ges av kurvan med forwardräntorna, för alla Bond Event Days.

4. Kalibrera modellen genom att addera samma antal baspunkter, (spreadfaktorn) till alla räntor i trädet till dess att trädet värderar priset på vår callable obligation så att vi får tillbaka dess marknadspris. Detta resultat (spread) är obligationens OAS.

5. Applicera samma OAS för att värdera en vanlig obligation som för övrigt är identisk med vår callable (med enda undantag att obligationen inte är callable).

6. Tag skillnaden mellan värdena vi erhöll för vår callable och för vår vanliga obligation. Denna skillnad get värdet på den inbyggda optionen.

Beräkna forwardräntorna (steg 1)

För att göra det hela enkelt, så kommer vi att bygga ett binomialträd i de noder (för de tider – datum) då obligationen betalar ut en kupong och när det nominella beloppet betalas tillbaka. Därför behöver vi forwardräntorna i dessa noder, ett tidssteg framåt. Vi utgår från de benchmarkinstrument som finns på marknaden och använder deras yield-to-maturity för att med bootstrapping strippa dessa till nollkupongsobligationer. På så sätt får vi fram alla spoträntor, (se bootstrapping ovan). Med hjälp av dessa beräknar vi sedan forwardräntorna. Slutligen använder vi oss av de ovan nämnda interpolationsmetoderna för att beräkna forwardräntorna för de tider då vi erhåller kassaflöden från obligationen.

Bygg binomialträdet

När vi nu känner forwardräntorna för varje tidpunkt kan vi bygga själva binomialträdet. För att kunna spänna upp detta behöver vi σ volatiliteten för forwardräntorna. Vi illustrerar trädbygget med ett exempel.

Antag därför att vi har en callable obligation med två år till förfall och att vi erhållit följande forwardräntor uttryckta med halvårsvis kapitalisering:

$$f_1 = 6.000\ \%$$
$$f_2 = 7.200\ \%$$
$$f_3 = 8.150\ \%$$
$$f_4 = 8.836\ \%$$

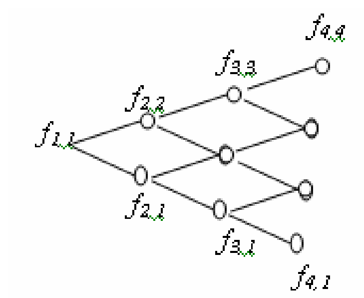
Antag vidare att volatiliteten för räntorna är 15 %. Då definierar vi volatilitetsfaktorn Z_i att spänna upp trädet med, som:

$$Z_i = e^{2\sigma \cdot \sqrt{t_i - t_{i-1}}}$$

och bygger trädet med följande relation mellan noderna:

$$f_{i,j} = Z_i^{j-1} \cdot f_{i,1}$$

där $f_{1,1} = f_1$ d.v.s., forwardräntan mellan tiden noll och ett ([0, ½] år). Då har vi följande binomialträd:



där räntorna i trädet ges av:

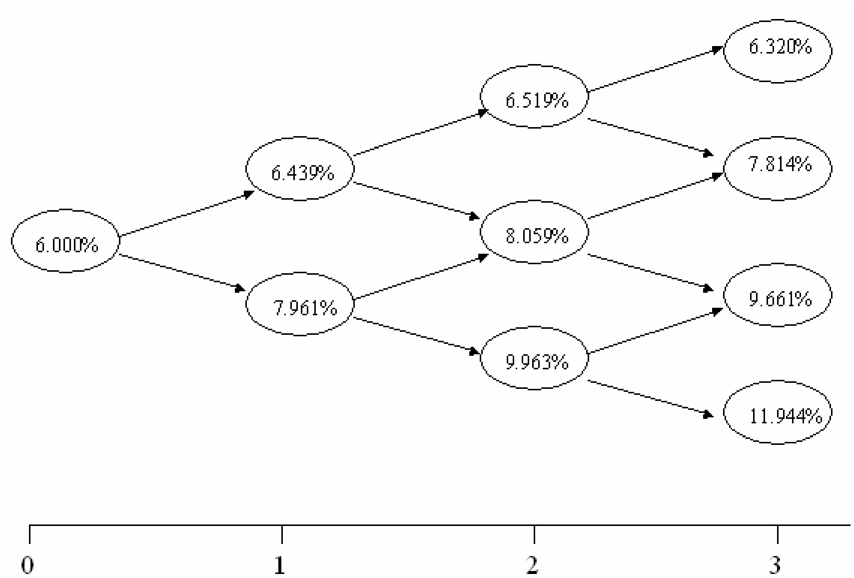
$$\begin{cases} f_{2,2} = Z_2 \cdot f_{2,1} \\ \frac{1}{2} f_{2,1} + \frac{1}{2} f_{2,2} = f_2 \end{cases} \Rightarrow \quad f_{2,1} = \frac{2 \cdot f_2}{1 + Z_2} \quad \Rightarrow \quad f_{2,2}$$

$$\begin{cases} f_{3,3} = Z_3^2 \cdot f_{3,1} \\ f_{3,2} = Z_3 \cdot f_{3,1} \\ \frac{1}{4} f_{3,1} + \frac{1}{2} f_{3,2} + \frac{1}{4} f_{3,3} = f_3 \end{cases} \Rightarrow \quad f_{3,1} = \frac{4 \cdot f_3}{1 + 2 \cdot Z_3 + Z_3^2} \quad \Rightarrow \quad f_{3,2} \quad \Rightarrow \quad f_{3,3}$$

och så vidare. Generellt gäller:

$$f_{n,1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot Z_n^i = 2^{n-1} \cdot f_n \quad \Rightarrow \quad f_{n,1} \quad \Rightarrow \quad f_{n,2}, \ldots, f_{n,n}$$

Detta ger oss ett binomialträd med följande värden:



Kalibrering av binomialträdet (steg 3)

Innan vi börja använda trädet för beräkningar, måste vi kalibrera det så att trädet genererar samma priser som de forwardräntor vi använde oss av för att skapa det. Kalibreringsprocessen går till så att vi vid varje tidpunkt väljer ett godtyckligt kassaflöde som vi skall värdera. Detta kassaflöde skall diskonterat med forwardräntorna ge samma resultat som om vi diskonterar det med hjälp av trädet. Observera att vi har ett träd med lika sannolikheter (= ½). Under hela kalibreringsprocessen håller vi avståndet mellan noderna i vertikal led konstant, d.v.s. $f_{i,j} = Z_i^{j-1} \cdot f_{i,1}$. Detta innebär att vi flyttar noderna upp eller ner tills vi får samma resultat med trädet som med forwardräntorna. Vi börjar med att kalibrera noderna vid tiden ett i trädet ovan. För ett godtyckligt kassaflöde *cf,* givet vid tiden 2 gäller då:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{cf}{1 + f_{2,1} \cdot (t_2 - t_1)} + \frac{cf}{1 + Z_2 \cdot f_{2,1} \cdot (t_2 - t_1)} \right) \cdot \frac{1}{1 + f_{1,1} \cdot (t_1 - t_0)} =$$
$$\frac{cf}{\left(1 + f_1 \cdot (t_1 - t_0)\right) \cdot \left(1 + f_2 \cdot (t_2 - t_1)\right)}$$

Vänsterledet är kassaflödet diskonterat med trädet. Först diskonterat vid tiden 2 (lika sannolikheter) och därefter vid tiden 1. I högerledet har vi diskonterat med de forwardräntor som gäller vid samma tidpunkter. Denna ekvation går att lösa analytisk, men för högre noder måste man ta till numeriska metoder. Observera att vi använt oss av att:

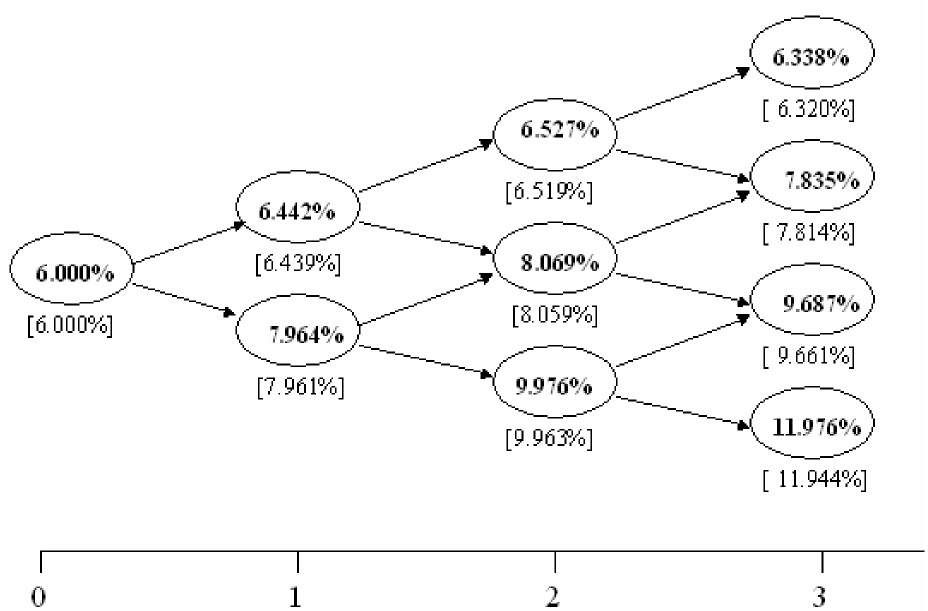
$$f_{2,2} = Z_2 \cdot f_{2,1}$$

Detta innebär, att då vi känner $f_{2,2}$ kan vi enkelt beräkna $f_{2,1}$.

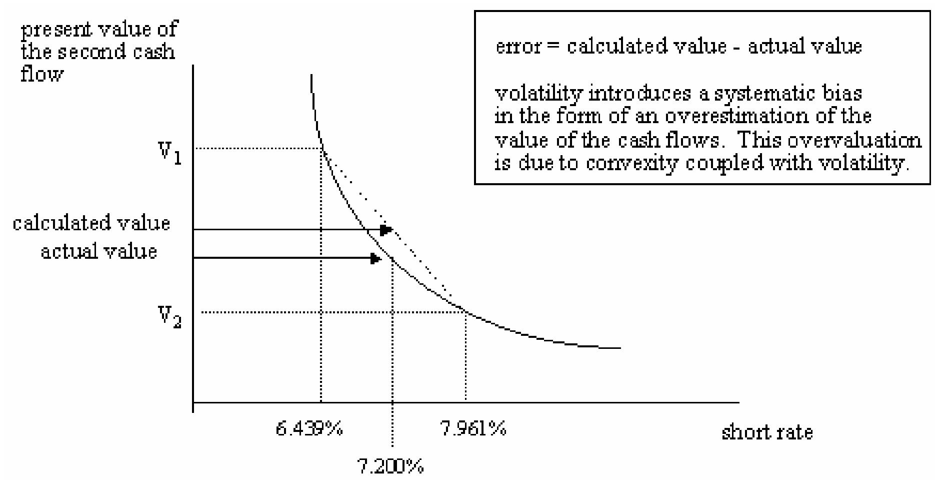
I nästa steg kalibrerar vi de tre noderna vid tiden 2. Vi har då följande ekvation:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+Z_3^2\cdot f_{3,1}\cdot(t_3-t_2)}+\frac{1}{1+Z_3\cdot f_{3,1}\cdot(t_3-t_2)}\right)\cdot\frac{1}{1+f_{2,2}\cdot(t_2-t_1)}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+Z_3\cdot f_{3,1}\cdot(t_3-t_2)}+\frac{1}{1+f_{3,1}\cdot(t_3-t_2)}\right)\cdot\frac{1}{1+f_{1,2}\cdot(t_2-t_1)}\right\}\cdot\frac{1}{1+f_{1,1}(t_1-t_0)}=$$
$$\frac{1}{(1+f_1\cdot(t_1-t_0))\cdot(1+f_2\cdot(t_2-t_1))\cdot(1+f_3\cdot(t_3-t_2))}$$

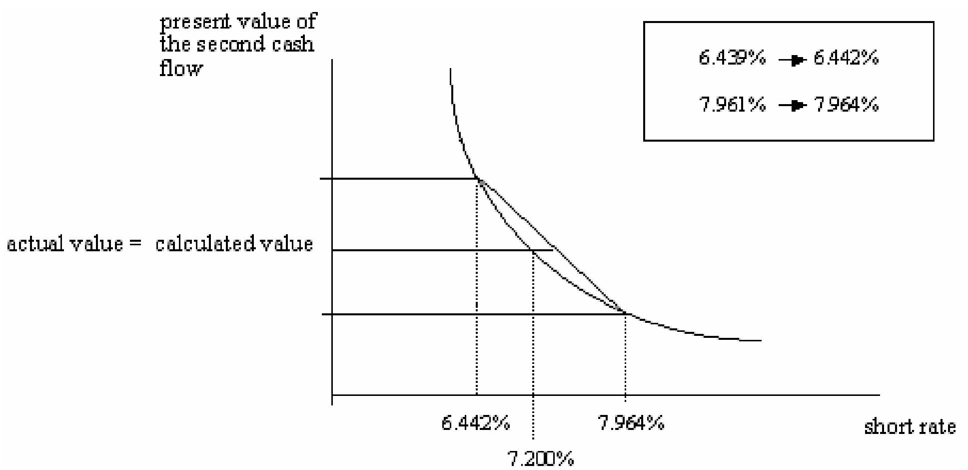
Denna ekvation löser $f_{3,1}$ som sedan ger $f_{3,2} = Z_3 f_{3,1}$ och $f_{3,3} = Z_3 f_{3,2}$. Då vi kalibrerat alla noder har vi följande träd:



De kalibrerade räntorna jämförs med räntorna för det okalibrerade trädet. Orsaken i att vi måste kalibrera trädet kan vi se i figuren nedan. På grund av formen på kurvan, konvexiteten kommer vi att erhålla ett fel i det beräknade värdet.



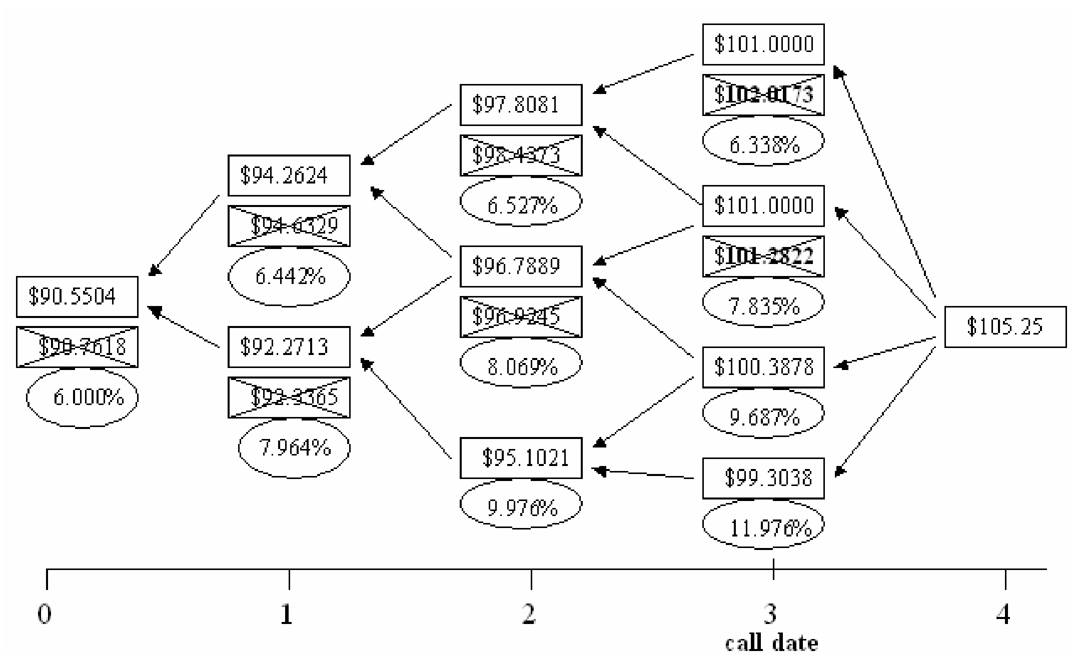
För att eliminera felet på grund av konvexiteten, måste vi höja räntorna en aning för att få situationen som visas nedan. Värdet av kassaflödet “calculated value” ovan, är ett medelvärde av värdena V_1 and V_2. Observera att detta medelvärde är högre än det verkliga värdet ”actual value”. Efter kalibreringen har vi följande situation:



Kalibrering av binomialträdet med OAS (steg 4)

Binomialträdet ovan kan användas för att värdera en benchmark bullet-obligation. Nu vill vi använda samma träd för att värdera en icke-benchmark (corporate) callable-obligation. För att förenkla analysen, antar vi att vi inte har några transaktionskostnader samt att utgivaren alltid köper tillbaka obligationen då det är möjligt och fördelaktigt.

Antag att vi har en obligation med 24 månader kvar av sin livstid och att den betalar en kupong två gånger om året med en årlig ränta på 10.50 %. Detta ger oss en kupongstorlek på 5.25. Antag vidare att obligationen är callable (återköpbar) om 18 månader till priset 101.00. Vi känner dessutom det pris på vilket obligationen handlas på marknaden. Låt detta vara 103.75. Vårt mål är att bestämma ett konstant spread ovanpå räntorna i trädet så att detta prissätter vår callable obligation till dess marknadspris. Vi börjar med ett litet spread och öka detta till dess vi erhåller marknadspriset. I denna process ersätter vi värdet på obligationen med dess "call value" i de noder den är callable och värdet överstiger detta "call value". Vi visar detta i trädet nedan som beskriver kassaflödet på slutdagen.



Vi gör sedan samma för alla kassaflöden och beräkna summan av dessa. Gör vi detta för olika skift i räntorna, finner vi tillsist att om vi addera 90.465 baspunkter, värderar trädet obligationen till dess marknadspris. Detta spread kallas obligationens *option adjusted spread* eller *OAS*. Detta spread representerar marknadens pris på den extra risk det innebär att köpa denna obligation istället för en statsobligation med samma löptid. En investerare kan ju tjäna lite mer på denna, men med risken att utgivaren köper tillbaka obligationen. Utgivaren gör detta om marknadsräntan är låg jämfört med räntan på obligationen. Samtidigt måste investeraren sälja tillbaka obligationen och investera i ett värdepapper med lägre ränta. En liknande analys gör man om obligationen är s.k. putable.

OAS och beräkning av priset på optionen (steg 5 och 6)

Vi kan nu använda OAS-analys för att beräkna priset på den inbyggda optionen. Vi gör detta genom att beräkna värdet av en icke-callable obligation med samma OAS. Priset av denna ges av samma träd som ovan, men då vi inte byter ut några obligationsvärden eftersom vi inte kan bli tvingade att sälja tillbaka obligationen. Med trädet ovan får vi värdet 103.8143. Observera att detta priset är något högre. Detta beror på att marknaden är villig att betala något mer för denna, då den är förknippad med en mindre risk och garanterar en viss avkastning.

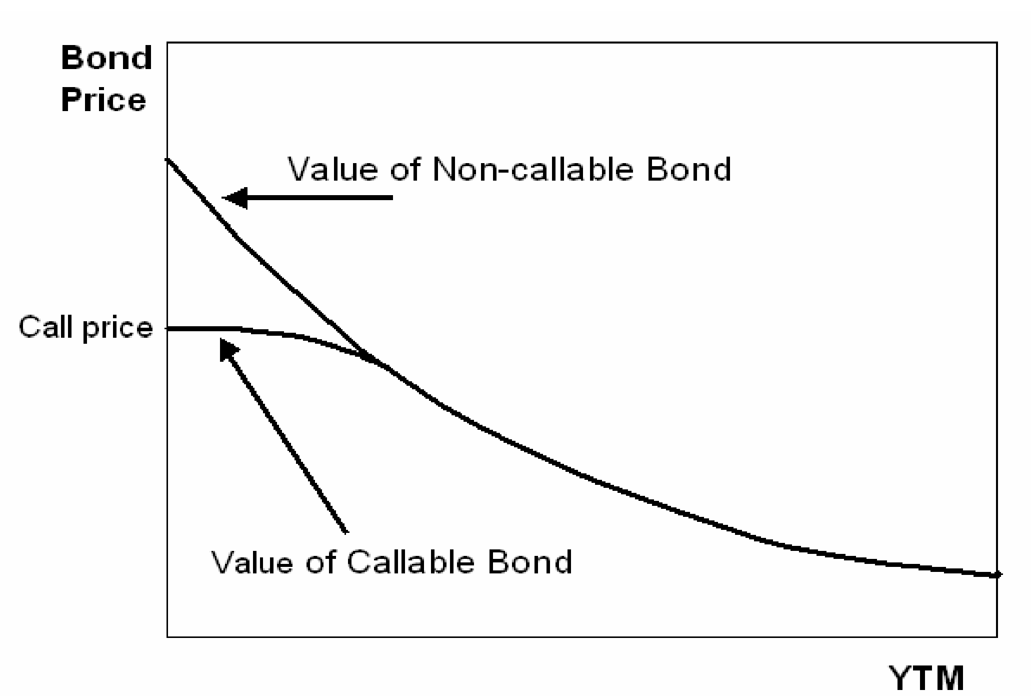
En callable obligation kan betraktas som en portfölj av en lång position av en vanlig obligation och en kort position i en köpoption på obligationen. Därför har vi:

$$B_{\text{callable}} = B_{\text{bullet}} - C_{\text{bullet}}$$

$$103.7500 = 103.8143 - C_{\text{bullet}}$$

Vilket ger oss att: $C_{bullet} = 0.0643$

Alltså är optionen värd 0.0643 för varje 100 av par. På grund av den inbyggda optionen får kurvan, pris – yield an annan form än en vanlig obligation. Detta illustreras i figuren nedan.



Inverkan av volatiliteten

Notera att en högre volatilitet ökar värdet av optionen. Eftersom innehavaren av obligationen är kort i denna, sänker optionen priset på obligationen. Av samma skäl höjer en lägre volatilitet priset på obligationen.

Effektiv Duration och Konvexitet

Eftersom en callable (eller putable) obligation har kassaflöden som är beroende av marknadsräntan följer att Macauleys duration är ett otillräckligt mått på risken ett innehav innebär. Därför måste man införa en effektiv duration obligationer med inbyggda optioner. OAS-analysen gör det möjligt för oss att finna ett bättre mått för ränterisken. Detta mått kallas obligationens *effektiva duration* eller *option-adjusted duration*.

För att beräkna detta mått beräknar vi först priset på obligationen som ovan. Därefter skiftar vi yieldkurvan (exempelvis) en räntepunkt upp och en räntepunkt ner och beräkna de priser som dessa skift ger upphov till. Observera att vi skiftar spoträntan, så vi måste räkna om forwardräntorna och kalibrera om binomialträdet för varje ny beräkning.

Den effektiva Macauley durationen and konvexiteten kan sedan beräknas ur:

$$Duration = \frac{P_- - P_+}{2 \cdot P_0 \cdot \Delta y}$$

och

$$Convexity = \frac{P_+ + P_- - 2 \cdot P_0}{P_0 \cdot (\Delta y)^2}$$

där

P_- obligationens pris då vi skiftat yielden neråt,
P_+ obligationens pris då vi skiftat yielden uppåt,
P_0 obligationens oskiftade pris och
Δy storleken av skiftet på yieldkurvan.

Om vi använder denna teknik på obligationen ovan finner vi en effektiv duration på 1.745 och en effektiv konvexitet på 4.045. Detta skall jämföras med 1.782 och 4.166 för motsvarande obligation utan inbyggd option. Denna skillnad kan tyckas liten, men vi har här att göra med en kort obligation. För en obligation med lång livstid är skillnaden i duration och konvexitet mera tydlig

INSTRUMENT PÅ PENNINGMARKNADEN

Räntemarknaden delas upp i obligationsmarknaden och i penningmarknaden. På penningmarknaden handlas instrument med en livstid upp till 12 månader. Man skiljer på denna tidsgräns på grund av alla lån upp till ett år betalas tillbaka som en enda klumpsumma den dagen lånet förfaller. Naturligtvis finns det undantag från denna regel, men vi antar här att så ej är fallet. Som regel sker dessutom all handel på penningmarknaden OTC (over-the-counter). Handeln sker över telefon, fax eller e-mail och marknaden har kontakt via elektroniska nyheter och prisdistributörer, exempelvis Reuters, Telerate och Bloomberg. Aktörerna är spridda över hela världen, men den viktigaste och största marknaden är den i New York. Därefter följer London och Tokyo.

Den viktigaste valutan på penningmarknaden är dollarn och den huvudsakliga valutareserven i centralbankerna runt om i världen består av värdepapper i amerikanska dollar. Detta är orsaken till att världsekonomin så starkt påverkas av dollarkursen.

För en investerare har värdepapperna på penningmarknaden två väsentliga faktorer, likviditet och låg risk. Långtidsinvesterare, så som pensionsfondförvaltare och försäkringsbolag använder penningmarknaden som en temporär marknad i väntan på att finna fördelaktiga investeringar på kapitalmarknaden. Penningmarknaden består av banker och vissa fondkommissionärer som är knutna till varandra via ett mer eller mindre informellt nätverk, den så kallade **interbank-marknaden** där centralbankerna är nyckelspelarna.

Det finns tre huvudtyper av instrument på penningmarknaden:

- **Depositlån**, vilket är en standardiserad form av in- och utlåning med korta löptider. Löptiderna varierar mellan en dag och upp till ett år.
- **Diskonteringspapper**: **stadsskuldsväxlar** (bills) och **certifikat**. Detta är räntebärande papper med löptider upp till ett år.
- **Repor**, vilket är en belåning av värdepapper. Dessa har en löptid från en dag upp till ett halvår.

Detaljerna kring dessa har vi redan diskuterat.

Värdet av en CD beräknas enligt exemplet nedan:

Exempel: Vad ska vi betala för CD:n nedan om yielden för instrumentet är 4.75 %?

Security:	Eurodollar CD
Type:	actual/360
Issuer:	Citicorp International, London
Amount:	USD 1 million
Coupon rate:	5.65% (actual/360)
Issued:	10 December 2001
Maturity:	10 June 2003
Settlement date:	10 March 2003

Beräkningen sker i två steg:

1. Kupongräntan är fix då CD:n ges ut, så det framtida värdet är känt. Vi kommer att erhålla det nominella beloppet med räntan 5.65%. Då antalet dagar är 182 och basen 360 erhåller vi:

$$1{,}000{,}000 \cdot \left(1 + \frac{5.65}{100} \cdot \frac{182}{360} = 1{,}028{,}563.89\right)$$

2. Men, då det nu endast är 92 dagar kvar till dess att CD'n förfaller måste vi diskontera det framtida värdet med en yield på 4.75%. Detta ger oss:

$$\frac{1{,}028{,}563.89}{1 + \frac{4.75}{100} \cdot \frac{92}{360}} = 1{,}016{,}228.01$$

Ett annat vanligt instrument på penningmarknaden är forward rate agreement (FRA). Dessa instrument som är OTC-marknadens motsvarighet till Euro-contract futures har vi redan studerat.

Swapar

En swap kan kortfattat beskrivas som ett avtal mellan två parter där man byter kassaflöden. Vi skall här gå igenom att antal olika typer av sådana swapar.

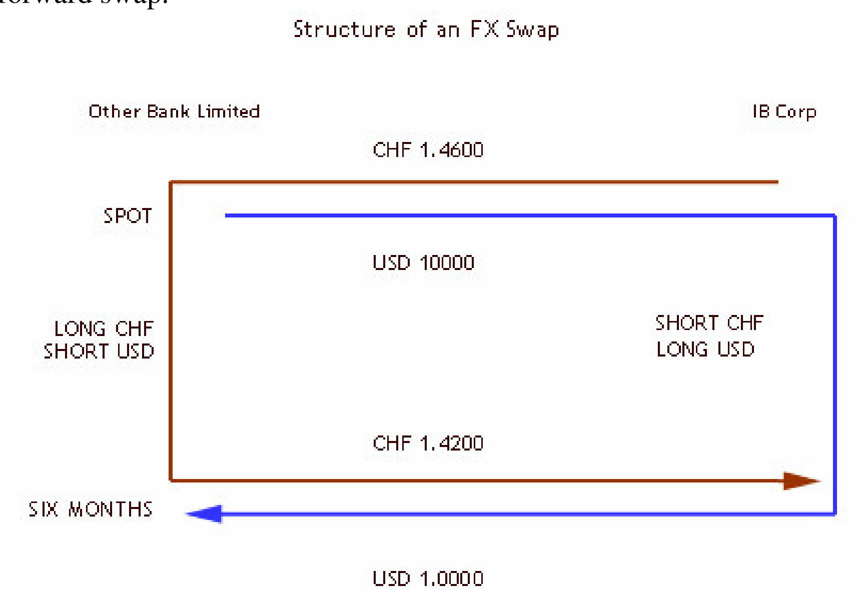
FX Swap – Valuta Swap, Forward Swap

Med en FX swap gör man

1. Köp ett belopp i någon valuta för leverans en viss dag, med en bestämd kurs.
2. Sälj samtidigt samma valuta för leverans vid ett senare datum på en annan kurs.

Vi illustrerar detta i figuren nedan, där banken köper 10M USD på spot sex månader på kursen 1.4600 och forwardkursen 1.4200.

Om båda betaldagarna är i framtiden kallar man detta för en forward swap, eller forwardforward swap.



Ränteswapar

Om betalningen mellan de båda parterna är i samma valuta kallar man dessa för ränteswapar (interest rates swaps). Den vanligaste swapen är då ena parten betalar en konstant ränta till den andra parten, medan denna betalar en flytande ränta baserad på exempelvis LIBOR, STIBOR eller en annan interbankränta plus ett visst antal räntepunkter. Swapen aktiveras på spotdagen i kontraktet och förfaller på slutdagen. Denna enkla swap kallas ofta för en *vanilla swap*. Köparen av en swap är den part som erhåller den flytande räntan medan säljaren erhåller den fasta räntan.

Ränteswapar kan användas för spekulation på förändringar i räntan, medan många investerare använder dem för att styra sin exponering av räntan.

Prissättning

Swapräntan definieras som den fixa ränta som likaställer dess nuvärde av framtida kassaflöden med nuvärdet av de flytande kassaflödena. Vi prissätter en swap så att nuvärdet av de fixa kassaflödena blir lika med nuvärdet för de flytande kupongerna:

$$\frac{C}{t}\cdot\sum_{i=1}^{L} D_{0,i} = \sum_{i=1}^{L} \frac{R_{i-1,i}}{t}\cdot D_{0,i}$$

där

C = Fix ränta (swapräntan)
t = Betalningsfrekvensen (1=årsvis, 2 = halvårsvis, 4=kvartalsvis, etc)
$D_{0,i}$ = Diskonteringsfaktorn för period 0 till $i = 1/(1 + R_{0,i}/t)^i$.
$R_{i-1,i}$ = Forwardräntan för perioden $i-1$ till i ($i = 1$ => spoträntan)
L = Antal kupongperioder.

alltså

$$C = \sum_{i=1}^{L}\left[\frac{R_{i-1,i}}{t}\cdot D_{0,i}\right]\cdot\frac{t}{\sum_{i=1}^{L} D_{0,i}}$$

eller

$$C = \sum_{i=1}^{L}\left[R_{i-1,i}\cdot D_{0,i}\cdot\frac{d_i}{Basis}\right]\cdot\frac{t}{\sum_{i=1}^{L} D_{0,i}}$$

där

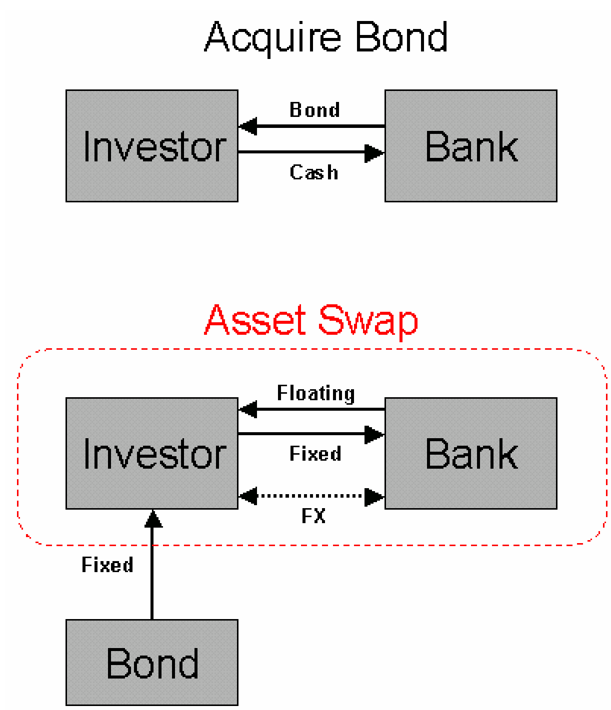
d_i = Verkligt antal dagar i perioden $i - 1$ till i.
Basis= 360 eller 365 beroende på dagräkningsregel.

Asset Swap

En asset swap gör det möjligt för en investerare att minimera marknadsrisken och utan att ändra sin exponering i kreditrisk. Metoden går ut på att konvertera en riskfylld obligation till en syntetisk FRN (Floating Rate Note). Marknaden för syntetiska strukturer är starkt driven av närvaron av arbitrage. Slutresultatet med att konstruera syntetiska strukturer är en högre yield (LIBOR + spread) än den existerande kontrakt på marknaden.

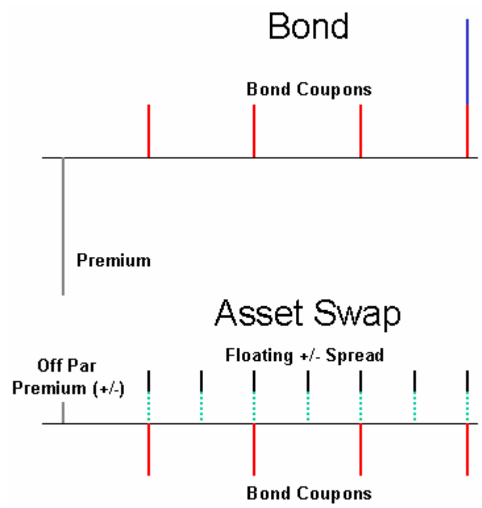
Några investerare refererar asset swappar att vara en ”ensam swap”, medan andra assetswaphandlare betraktar en asset swap som ett paket bestående av den underliggande obligationen och en swap. En del handlare handlar assetswapar där de utnyttjar redan innehavda obligationer, medan andra köper hela paketet.

Antag att en investerare äger eller förvaltar en obligation som betalar en årlig kupong på 8 %. Investeraren vill, eller får inte sälja obligationen, men vill att marknadsrisken skall vara så låg som möjligt. Därför använder han sig av en asset swap med en annan motpart. Se figuren nedan.



FX effekten ovan tillkommer om obligationen och swapen är i olika valutor. I detta fallet hart vi en currency asset swap. Obligationens fixa kupong betalas till banken som i sin tur ger tillbaka en flytande kupong, vilken exempelvis kan vara LIBOR plus spread. Denna spread refereras som en *asset swap spread*.

Kassaflödet för en asset swap kan vi representera på följande vis:



Detta innebär att man köper obligationen till dess marknadspris (Premium). Sedan skapar man en assetswap enligt ovan. Priset (Off Par Premium) är det belopp (positivt eller negativt) som skiljer sig från par. Om priset är 102 så är Off-Par-Priser 2.

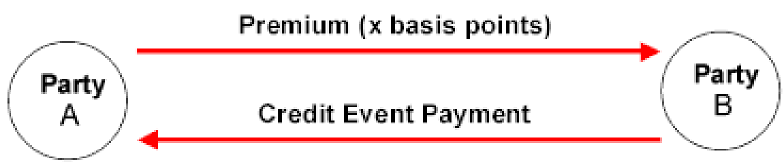
CDS - Credit Default Swap

En Credit Default Swap (CDS) är ett kreditderivat där den ena parten betalar den andre en periodisk avgift för att själv erhålla en variabel betalning betingat av en tredje parts kreditförluster på grund av konkurs. Den variabla betalningen är typiskt lika med den förlust man skulle gjort genom att inneha det underliggande värdepapperet. Utbetalningen är definierad som Par minus ett ”post-default” värde. Normalt äger den part som betalar den periodiska avgiften

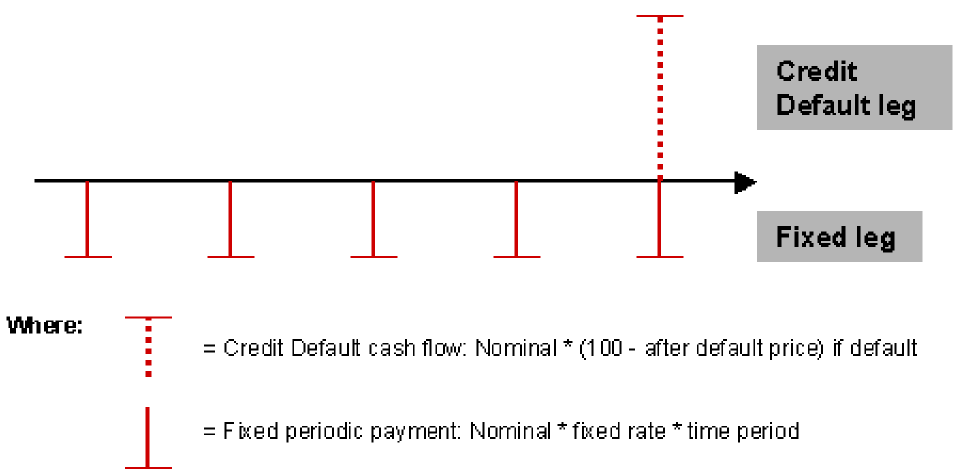
Vanligtvis, men inte alltid äger den parten som betalar en periodisk avgift (köparen som hedgar sig) underliggande. På så sätt kan han behålla denna.

Exempel:
Part A äger ett värdepapper som betalar en årlig kupong på 8%. A vill (eller får) inte sälja detta, men vill göra sig av med kreditrisken för en konkurs under en given tidsperiod. A köper därför en kreditgaranti av B i utbyte mot en regelbunden betalning.

- A betalar B: x baspunkter
- B betalar A: Om konkurs: par minus ett i förväg definierat värde.



På så sätt har A via en CDS flyttat risken för konkurs till B under swapens livstid. Kassaflödet kan representeras som i figuren nedan:



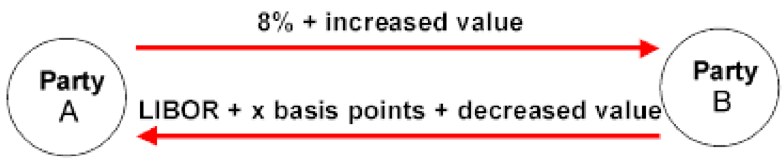
Det första benet (Credit Default leg) aktiveras bara i händelse av en konkurs av utgivaren av värdepapperet. Den andra benet är ett vanligt fixt ben.

En variant be den vanliga CDS'en är en så kallad A Basket Credit Default Swap där en hel korg av olika obligationer ingår.

TRS – Total Return Swap

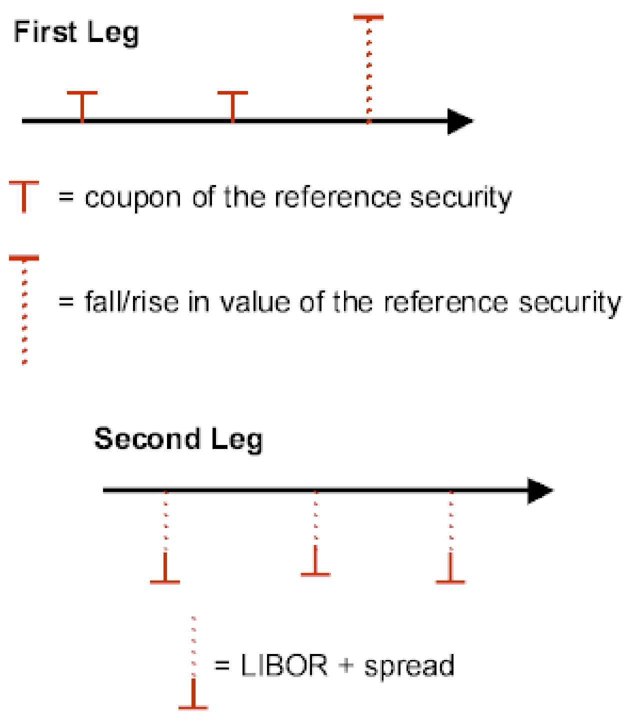
En Total Return Swap (TRS) är ett kreditderivat där den ena parten betalar den andre hela avkastningen av en kredit i utbyte mot en LIBOR-baserad betalning.

Exempel:
Part A äger ett värdepapper som betalar en årlig kupong på 8%. A vill (eller får) inte sälja detta, men vill göra sig av med kreditrisken under en given tidsperiod. A flyttar då hela risken och alla utbetalningar till B under en viss tidsperiod.



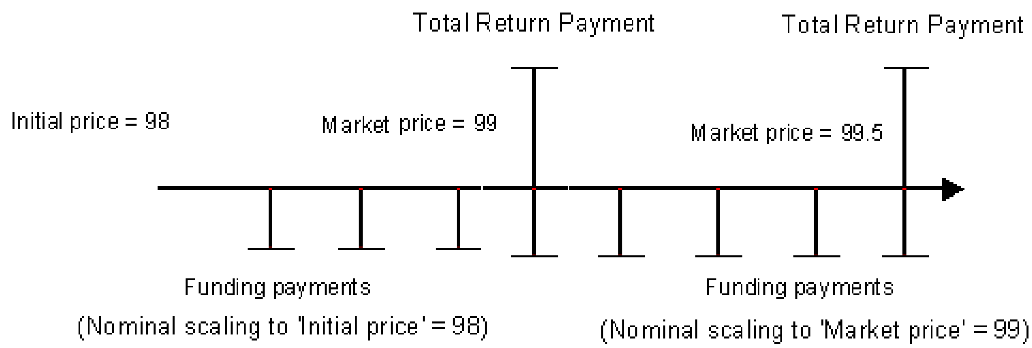
Med en TRS har A fört över all marknads- **och** kreditrisk av värdepapperet under swapens livstid.

Kassaflödet för en europeisk TRS kan representeras som i figuren nedan:



Det andra benet kallas ofta för den finansierande sidan av transaktionen. Detta ben är normalt ett flytande ben med normalt kassaflöde.

Total Return Swap av amerikansk typ
En amerikansk TRS kan replikeras genom en serie av europeiska TRS'er som successivt fortsätter utan överlapp. Kassaflödena för en amerikansk TRS bestående av två europeiska ses i figuren nedan:



Credit Default Swaption

En option på en Credit Default Swap (CDS) är genom definition ett kreditderivat. Det är en option på att köpa eller sälja en CDS till ett fördefinierat par-spread. En Credit Default Swaption är alltid av europeisk typ.

FINANSIELL TEORI

Vi kommer här att gå igenom de grundläggande begreppen, definitionerna och satserna i teorin för den finansiella analysen. Det är inte meningen att detta material på något sätt skall vara fullständigt. Därför utelämnar vi de flesta bevis mm. Avsikten är att ge en bild av teorin. För att om möjligt öka förståelsen presenterar vi en rad exempel. Alla nya begrepp i inledningen nedan, kommer att få en förklaring längre fram, men för att beskriva vår målsättning ger vi några definitioner (utan förklaring) redan nu.

Vi skall definiera en **finansiell marknad** och studera denna med dels binomialmodellen och dels med Black-Scholes modell. Marknaden vi skall studera består av två olika **värdepapper**, ett riskfritt papper, en obligation B och en aktie S. Obligationen beskrivs av en deterministisk process $B(t)$, som betalar en **ränta r** under tidsintervallet från $t = 0$ till $t = 1$.

$$\begin{cases} B(0) = b \\ B(1) = b \cdot (1 + r) = bR \end{cases}$$

Aktiepriset $S(t)$ beskrivs av en **stokastisk process**, och vi skall studera dynamiken för denna. När vi studerar den finansiella marknaden (B, S) kommer vi att göra detta genom en portfölj $h = (h^0, h^1)$, $h \in R^2$ där h^0 är antalet obligationer och h^1 antalet aktier. Om värdet på dessa är negativa innebär det att vi lånat pengar eller utfärdat aktier. Vi tillåter dem också vara ickeheltal. Vi antar vidare att vi inte har någon spridning mellan köp- och säljpriser och att inga transaktionskostnader förekommer. Vidare så betraktar vi marknaden som 100% likvid, d.v.s., det finns alltid papper att tillgå på marknaden i obegränsat antal.

Definition: **Värdeprocessen** av portföljen h definieras av

$$V(t) = h^0B(t) + h^1S(t)$$

Denna anger, som vi kan se, värdet av vår totala portfölj bestående av h^0 obligationer och h^1 aktier som funktion av tiden.

Definition: En portfölj h kallas **självfinansierad** om

$$dV(t) = h^0dB(t) + h^1dS(t)$$

Definition: En **arbitragestrategi** definieras av att: $V(0) = 0$ och $V(1) > 0$, med sannolikhet ett. Alternativt $V(1) > V(0)$.

Definition: Ett **betingat kontrakt** (contingent claim) är en stokastisk variabel X på formen: $X = \phi(Z)$ där Z är en stokastisk variabel som beskriver prisprocessen.

Vi uppfattar kontraktet X så att det genererar X kronor den dag då kontraktet förfaller. På slutdagen T, är priset av kontraktet lika med $\Pi(T; X)$ och vi kommer att söka $\Pi(0; X)$, d.v.s. priset på kontraktet den dag vi köper eller säljer det.

Definition: Ett betingat kontrakt sägs vara **uppnåeligt** om det existerar en portfölj h sådan att $V(h, T) = X$ med sannolikhet ett. Man säger att portföljen h **genererar** X.

Definition: Om varje kontrakt är uppnåeligt sägs marknaden vara **komplett**.

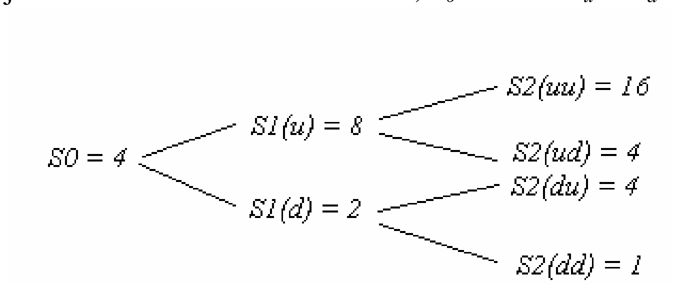
Sats: Om Binomialmodellen är arbitragefri så är den också komplett.

Vi har tidigare sett att i binomialmodellen existerar ett unikt pris på varje betingat kontrakt. Priset ges av värdet på den replikerade portföljen. Anledningen till att binomialmodellen är komplett är att vi har två finansiella instrument, obligationen och aktien, för att kunna lösa ekvationssystemet med de två obekanta (B och S). Detta kan enkelt generaliseras: En modell är komplett om antalet värdepapper är lika med antalet möjliga utfall. Att vi klarar flera perioder i ett binomialträd är att vi kan ha intermediär handel. Därför kan vi balanserar om portföljen i varje tidssteg beroende av utfallet.

Om marknaden är arbitragefri existerar ett eller flera riskneutrala sannolikhetsmått, så kallade **martingalmått**.

Sannolikhetsteori

Vi har tidigare studerat Binomialmodellen. I denna modell kan priset på underliggande aktie antingen gå upp med en faktor u eller ner med faktorn d. Vi kan likna detta med att singla slant, där myntet kan hamna med framsidan upp (u) eller ner (d). Detta avgör om priset går upp eller ner. Sannolikheten är lika i de båda fallen. Vi studerar således ett pristräd med följande data: $u = 2 \Rightarrow d = 1/u = 0.5$, $S_0 = 4$ och $P_u = P_d = ½$.



$$S_2(uu) = u^2 \cdot S_0, \quad S_2(ud) = u \cdot d \cdot S_0, ...$$

Om vi singlar slant en, två respektive tre gånger får vi följande **utfallsrum** (definition):

$\Omega = \{u, d\} = \{\omega_1\}$,
$\Omega = \{uu, ud, du, dd\} = \{\omega_2\}$,
$\Omega = \{uuu, uud, udu, duu, udd, dud, ddu, ddd\} = \{\omega_3\}$

Vi inför på följande vis **räntan** $\boldsymbol{r}$: $1\ kr \rightarrow (1 + r) \cdot 1\ kr = 1 \cdot R\ kr$. Faktorn R måste ligga i intervallet: $d \le R \le u$ ty om $R > u$ är det ointressant att köpa aktien, eftersom det då är bättre att ha pengarna på banken (med räntan r). Om $R < d$ fås en negativ ränta $r < 0$ vilket naturligtvis inte är realistiskt.

Påstående: Vi kan därmed påstå att modellen ovan är arbitragefri om och endast om:

$$d \le R \le u$$

Exempel: Studera en Europeisk köpoption som vid tiden $t = 1$ har lösenpriset K kr. Denna har på lösendagen värdet V_1.

$$V_1(\omega) = (S_1(\omega) - K)^+ = \max(S_1(\omega) - K, 0)$$

Sök det arbitragefria priset på denna. Vi har två möjliga utfall, u respektive d där värdet ges av

$$S_1(\omega) = \begin{cases} (uS_0 - K)^+ & om \quad \omega_1 = u \\ (dS_0 - K)^+ & om \quad \omega_1 = d \end{cases}$$

Vi hedgar en kort position av optionen genom att köpa Δ_0 aktier. Vi får då två möjliga värden på lösendagen:

$$V_1(u) = \Delta_0 \cdot S_1(u) + R \cdot (V_0 - \Delta_0 \cdot S_0)$$
$$V_1(d) = \Delta_0 \cdot S_1(d) + R \cdot (V_0 - \Delta_0 \cdot S_0)$$

Löser vi ut Δ_0 får vi

$$\Delta_0 = \frac{V_1(u) - V_1(d)}{S_1(u) - S_1(d)} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial S},$$

Värdet av optionen vid tiden $t = 0$ är då

$$V_0 = \frac{1}{R}\left\{\frac{R-d}{u-d}V_1(u) - \frac{R-u}{u-d}V_1(d)\right\} = \frac{1}{R}\{\tilde{p}\cdot V_1(u) + \tilde{q}\cdot V_1(d)\} = \frac{1}{R}E^Q[X]$$

Där $\tilde{p}$ och $\tilde{q}$ kallas de **riskneutrala sannolikheterna**:

$$\tilde{p} = \frac{R-d}{u-d} \text{ och } \tilde{q} = -\frac{R-u}{u-d}.$$

Som vi ser är summan av dessa lika med ett. Vidare låter vi

$$\Pi[X] = \frac{1}{R}E^Q[X]$$

beteckna det arbitragefria priset på optionen för det betingade kontraktet X med avseende på det riskneutrala sannolikhetsmåttet Q. Ofta kallas detta för martingalmåttet, vi återkommer med betydelsen av detta senare. Vi kan uttrycka oss som så att marknaden är arbitragefri om och endast om det existerar ett martingalmått.

På samma sätt får vi

$$V_1(u) = \frac{1}{R}\{\tilde{p}\cdot V_2(uu) - \tilde{q}\cdot V_2(ud)\}, \qquad \Delta_1(u) = \frac{V_2(uu) - V_2(ud)}{S_2(uu) - S_2(ud)}$$

$$V_1(d) = \frac{1}{R}\{\tilde{p}\cdot V_2(du) - \tilde{q}\cdot V_2(dd)\}, \qquad \Delta_1(d) = \frac{V_2(du) - V_2(dd)}{S_2(du) - S_2(dd)}$$

osv...

Ändliga sannolikhetsrum

Låt $\mathcal{F}$ vara en av alla delmängder till utfallsrummet Ω ($\emptyset$, *{ddd}, {uuu, uud, udu, ddd}*, Ω är exempel på några) där $\emptyset$ är den tomma mängden. Då definieras ett **sannolikhetsmått** P av en funktion som avbildar $\mathcal{F}$ på intervallet [0, 1] med $P(\Omega) = 1$, där

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

om A_1, A_2,... är distinkta mängder i $\mathcal{F}$.

Exempel: Sannolikheten för krona (= u) i första kastet då vi kastar tre gånger, där sannolikheterna ges av $P_u = 1/3$ och $P_d = 2/3$ är då:

$$P\{uuu, uud, udu, udd\} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

σ-algebror

Definition: En **σ-algebra** är en mängd $\mathcal{F}$ av Ω så att:

$$\begin{cases} \varnothing \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F} \\ A_1, A_2 .... \text{ sekvens av delmängder till } \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_k A_k \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Exempel: Viktiga σ-algebraor till Ω ovan är:

$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$
$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{uuu, uud, udu, udd\}, \{duu, dud, ddu, ddd\}\}$
$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{uuu, uud\}, \{udu, udd\}, \{duu, dud\}, \{ddu, ddd\}$ och alla unioner av dessa$\}$
$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}$ = mängden av alla delmängder till Ω

Vi säger att $\mathcal{F}_3$ är **finare** än $\mathcal{F}_2$ som i sin tur är finare än $\mathcal{F}_1$.

Om vi inför beteckningarna $A_u = \{uuu, uud, udu, udd\} = \{u{*}{*}\}$, $A_d = \{d{*}{*}\}$, $A_{uu} = \{uu{*}\}$ osv. kan vi skriva:

$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, A_u, A_d\}$
$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, A_u\, A_d, A_{uu}, A_{ud}, A_{du}, A_{dd}, A_{uu} \cup A_{du}, A_{uu} \cup A_{dd}, A_{ud} \cup A_{du}, A_{ud} \cup A_{dd}, A_{uu}^{\ c}, A_{ud}^{\ c}, A_{du}^{\ c}, A_{dd}^{\ c}\}$

Filtrationer

Definition: En **filtration** är en sekvens av σ-algebraor $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, ..., $\mathcal{F}_n$ så att $\mathcal{F}_t$ innehåller alla mängder i $\mathcal{F}_{t-1}$.

$$\begin{cases} \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall t \geq 0 \\ s \leq t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_s \in \mathcal{F}_t \\ \mathcal{F}_\infty = \bigcup\limits_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \end{cases}$$

Definition: En funktion $f: X \rightarrow \boldsymbol{R}$ sägs vara $\mathcal{F}$**–mätbar** om det för varje intervall I gäller att mängden $f^{-1}(I)$ är $\mathcal{F}$–mätbar, d.v.s. att

$$\{x \in X \mid f(x) \in I\} \in \mathcal{F}$$

Detta innebär att inversa punkter i I ligger kvar i $\mathcal{F}$.

Definition: En **stokastisk variabel** X är då en avbildning av Ω på R.

$X : \Omega \rightarrow R$ så att X är $\mathcal{F}$-mätbar

Exempel: Betrakta pristrädet ovan. En spegling under S_2 på [4, 27] ges av:

$$\{\omega = \Omega \mid S_2(\omega) \in [4,27]\} = \{\omega = \Omega \mid 4 \leq S_2(\omega) \leq 27\} = A_{dd}^c$$

Den kompletta listan av delmängder på Ω med spegling av mängder i R är $\emptyset$, Ω, A_{uu}, $A_{ud} \cup A_{du}$, A_{dd} + alla unioner av dessa. Detta bildar en **σ-algebra genererad av** $\boldsymbol{S_2}$. Denna namnges $\sigma(S_2)$.

Symbolen $\mathcal{F}_t^X$ betecknar informationen genererad av X på tidsintervallet $[0, t]$, alternativt, vad som händer med X under tiden $[0, t]$. Detta baseras på observation av trajektorian
$\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Om vi har möjlighet att avgöra om en given händelse A har inträffat eller ej så skriver vi detta som $A \in \mathcal{F}_t^X$. Om värdet av en given stokastisk variabel Z kan bestämmas genom att studera trajektoriorna till X skriver vi detta som $Z \in \mathcal{F}_t^X$. Vidare, om en stokastisk process Y, sådan att $Y \in \mathcal{F}_t^X$ säger vi att Y är **adapterad till filtrationen** $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$.

Stokastiska processer och variabler

Definition: En **stokastisk process** kan vara en diskret uppsättning tidsindexerade slumptalsvariabler $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ eller tidskontinuerlig mängd $\{X_t\}_{t>0}$. Ofta beskrivs dessa innehållande en **drift** μ och en **diffusion** σ:

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu[t, X(t)]\,\Delta t + \sigma\mu[t, X(t)]Z(t)$$

Definition: En stokastisk process $\{W(t);\ t \geq 0\}$ kallas för en **Wienerprocess** om:

(i) $W(0) = 0$
(ii) $(W(u) - W(t))$ *och* $(W(s) - W(r))$ är oberoende av varandra (d.v.s. W har oberoende inkrement) $r \leq s \leq t \leq u$.
(iii) $W(t) - W(s)$ är normalfördelad med $N\left[0, \sqrt{t-s}\right]$ $\forall s < t$.
(iv) W(t) har kontinuerliga trajektorior.

En viktig egenskap hos en Wienerprocess (eller Brownsk rörelse som den ofta kallas) är att
$(dW)^2 = dt$. Detta kommer vi ofta att använda oss av.

Definition: En **σ-algebra genererad av *X*** är den kompletta listan av alla delmängder på formen $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ där $A \subseteq R$. Låt $\mathcal{G}$ vara en del-σ-algebra av $\mathcal{F}$. Då säger vi att X är **$\mathcal{G}$-mätbar** om alla mängder i $\sigma(X) \in \mathcal{G}$

Definition: Givet $(\Omega, \mathcal{F}, P, X)$. Om $A \subseteq R$ definieras **fördelningsmåttet** av

$$\mu_X(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A)).$$

Exempel på inducerade mått:

$$\mu_{S_2}(\varnothing) = P(\varnothing) = 0, \qquad \mu_{S_2}(R) = P(\Omega) = 1$$
$$\mu_{S_2}[0,3] = P(S_2 = 1) = P(A_{dd}) = (2/3)^2$$

Det inducerade måttet av S_2 placerar således massan $(1/3)^2 = 1/9$ på $S_2 = 16$, massan $2*(1/3)*(2/3) = 4/9$ på $S_2 = 4$ och massan $(2/3)^2 = 4/9$ på $S_2 = 1$.

Vi har en därmed en **fördelningsfunktion** på S_2:

$$F_{S_2}(x) = P(S_2 \le x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 4/9 & 1 \le x < 4 \\ 8/9 & 4 \le x < 16 \\ 1 & 16 \le x \end{cases}$$

<u>OBS</u>! En stokastisk variabel kan ha flera fördelningar eftersom de beror på valen av P_u och P_d. På samma sätt kan olika slumptalsvariabler ha samma fördelningsfunktion.

<u>Definition</u>; 2^X definieras med hjälp av följande exempel $X = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$

$$2^X = \{\emptyset, X, \{1\},\{2\},\{3\},\{1, 2\},\{1, 3\},\{2, 3\}\}$$

<u>Definition</u>: En **partition** $\mathcal{P}$ av ett utfallsrum Ω, kan skrivas som $\mathcal{P} = \{A_i,\ i = 1, 2, ..., k\}$.

<u>Exempel:</u> $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{P}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\mathcal{P}_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$
$A1 = [0, 1/3)$, $A2 = [1/3, 1/2)$, $A3 = [1/2, 3/4)$, $A4 = [3/4, 1]$
$B1 = [0, 1/3)$, $B2 = [1/3, 3/4)$, $B3 = [3/4, 1]$

<u>Definition</u>: En partition $\mathcal{S}$ sägs vara **finare** än en annan partition $\mathcal{P}$ om varje komponent i $\mathcal{S}$ är en union av komponenter i $\mathcal{P}$.

<u>Definition</u>: Om $\mathcal{P}$ är en partition av Ω och $f : \Omega \to R$ är en given avbildning. Då säger vi att funktionen f är **$\mathcal{P}$–mätbar** om $\mathcal{P}$ är finare än $\mathcal{P}(f)$.

<u>Sats:</u> Om f är $\mathcal{P}$–mätbar så är f även $\sigma(\mathcal{P})$-mätbar.

Detta tolkar vi som att funktionen f är konstant på varje komponent av $\mathcal{P}$.

Vi har nu att:

i) $\mathcal{P}$ genererar en naturlig σ-algebra $\sigma(\mathcal{P})$.
ii) Givet $\sigma\{\mathcal{P}\}$ kan vi återskapa $\mathcal{P}$ via $A \in \mathcal{P}$ om och endast om $A \neq \emptyset$, och $A \in \sigma\{\mathcal{P}\}$ samt att ingen äkta delmängd av A ligger i $\sigma\{\mathcal{P}\}$.
iii) $\mathcal{S}$ är finare än $\mathcal{P} \Leftrightarrow \sigma\{\mathcal{P}\} \subseteq \sigma\{\mathcal{S}\}$.
iv) f $\mathcal{P}$-mätbar $\Leftrightarrow f$ $\sigma\{\mathcal{P}\}$-mätbar.

Vi tolkar $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ som att $\mathcal{G}$ innehåller mer information än $\mathcal{F}$.

Definition: $\sigma\{X\}$är den minsta σ-algebran så att X är $\mathcal{F}$–mätbar.

Definition: X är **$\mathcal{F}$-adapterad** om X_t är $\mathcal{F}$-mätbar $\forall\ t \geq 0$. (D.v.s. framtiden ät okänd).

Definition: Om en Wienerprocess W, är adapterad till en filtration $\mathcal{F}$ och om $W(t) - W(s)$ är oberoende av $\mathcal{F}_s$ kallas W för en **$\mathcal{F}$-Wienerprocess**.

Betrakta den stokastiska differentialekvationen

$$\begin{cases} dX(t) = \mu[t, X(t)]dt + \sigma[t, X(t)]dW(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

där $\mu(t, x)$ och $\sigma(t, x)$ är givna, kontinuerliga och Lipschitz i x. Lipschitsvillkoret säger att det existerar ett L = konstant sådant att för varje μ och σ gäller det att:

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq L|x - y| \qquad \forall\, t, x, y$$
$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y| \qquad \forall\, t, x, y$$

Vi kan lösa SDE:n med hjälp av integration. Vi får då:

$$X(t) = x + \int_o^t \mu[s, X(s)]ds + \int_o^t \sigma[s, X(s)]dW(s)$$

Där den sista integralen inte är någon Reiman-Stjeltsinintegral ty W har obegränsad variation.

Definition: **Väntevärdet** av X givet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ges av:

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P\{\omega\} = \int_\Omega X(\omega)dP\{\omega\}$$

För en ändlig mängd $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ har vi:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega = \{X_k = x_k)} X(\omega) \cdot P\{\omega\} = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{\omega} P\{\omega\} = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X_k = x_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \mu_X \{x_k\}$$

Därför kan vi välja att summera, antingen över Ω eller $\boldsymbol{R}$.

Exempel: Beräkna $E[S_2]$.

$$
\begin{aligned}
E[S_2] = {} & S_2(uuu)P\{uuu\} + S_2(uud)P\{uud\} + S_2(udu)P\{udu\} + S_2(udd)P\{udd\} + \\
& S_2(duu)P\{duu\} + S_2(ddu)P\{ddu\} + S_2(dud)P\{dud\} + S_2(ddd)P\{ddd\} = \\
= {} & 16 \cdot P(A_{uu}) + 4 \cdot P(A_{ud} \cup A_{du}) + P(A_{dd}) = \\
= {} & 16 \cdot P\{S_2 = 16\} + 4 \cdot P\{S_2 = 4\} + P\{S_2 = 1\} = \\
= {} & 16 \cdot \mu_{S_2}\{16\} + 4 \cdot \mu_{S_2}\{4\} + \mu_{S_2}\{1\} = \\
= {} & 16 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{36}{9} = 4
\end{aligned}
$$

Definition: **Variansen av X**:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}[X] = {} & \sum_{\omega = \Omega} \left(X(\omega) - E[X(\omega)]\right)^2 P\{\omega\} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - E[X(\omega)]\right)^2 \mu_X(x_k) = \\
= {} & E\left[\left(X(\omega) - E[X(\omega)]\right)^2\right] = E\left[X^2(\omega)\right] - \left(E[X(\omega)]\right)^2
\end{aligned}
$$

Något om integrationsteori

Definition: En **Borelalgebra** $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ definieras som den minsta σ-algebra som innehåller alla öppna intervall på $\boldsymbol{R}$. Delmängderna i $\mathcal{B}$ kallas **Borel-mängder**. Alla tänkbara och nedskrivbara delmängder på $\boldsymbol{R} \in \mathcal{B}$, exempelvis:

$$
\begin{aligned}
&(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a+n) && (-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a-n, a) \\
&[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, a+n] && (-\infty, a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a-n, a] \\
&(-\infty, a) \cup (b, \infty) && [a, b] = \left((-\infty, a) \cup (b, \infty)\right)^c \\
&(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty) && \{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

är Borel-mängder. Detta betyder bland annat att alla mängder innehållande oändligt många reella tal är en Borelmängd; om $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ är därmed

$$
A = \bigcup_{k=1}^{n} \{a_k\}
$$

Detta betyder också att alla irrationella tal är en Borelmängd eftersom dessa är komplementet till alla reella tal.

<u>Definition</u>: Ett mått på *(**R**, $\mathcal{B}$(**R**))* är en funktion μ som avbildar $\mathcal{B}$ på intervallet [0, ∞] med:

$$\begin{cases} \mu(\emptyset) = 0 \\ \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \end{cases}$$

<u>Definition:</u> En funktion f : $\boldsymbol{R} \rightarrow \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ kallas **Borelmätbar** om

$$\{x \in B \mid f(x) \in A\} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}).$$

<u>Definition</u>: En **indikatorfunktion** $g : R \rightarrow R$ definieras av:

$$g_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases} \qquad A = \{x \in R \mid g(x) = 1\}$$

A kallas **en mängd indikerad av** *g*.

<u>Definition</u>: En funktion *h* kallas **enkel** om den kan skrivas på formen

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x)$$

För att kunna definiera mått av oppräkneliga mängder måste man införa Lebesgue-integraler, men vi hänvisar här till litteraturen i integratioinsteori. Däremot kommer vi att behöva ett par definitioner som vi ger.

<u>Definition</u>: **Lebesgueintegraler**

$$\int_{\Re} g d\mu_0 = \mu_0(A)$$

$$\text{För en enkel funktion}: h(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x) \Rightarrow$$

$$\int_{\Re} h d\mu_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Re} g d\mu_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu_0(A)$$

$$\text{För en funktion}: h(x) \le f(x)\ \forall\ x \in R \Rightarrow$$

$$\int_{\Re} f d\mu_0 = \sup\left\{ \int_{\Re} h d\mu_0 \right\} \text{Om denna är} \neq \infty \text{ kallas } f \text{ integrabel.}$$

$$\int_{\Re} f d\mu_0 = \int_{\Re} f^+ d\mu_0 - \int_{\Re} f^- d\mu_0 \text{ Där } f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

$$\int_{A} f d\mu_0 = \int_{\Re} I_A f d\mu_0 \quad \text{Där } I_A \text{ är en indikatorfunktion till A.}$$

Sannolikhetsrum

Definition: Ett **sannolikhetsrum**: definieras av $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, där $P(A) = [0, 1]$ och $A \in \mathcal{F}$.

Exempel: $A_{uu} = \{\omega = \{\omega_1, \omega_2\} \mid \omega_1 = \omega_2 = u\}$.... o.s.v.

Sannolikheterna för u respektive d ges av p och $q = p - 1$

$P(A_{uu}) = p^2$, $P(A_{du}) = pq$...

Sannolikheten för u i kast nummer 2 är: $P(A) = P(A_{uu} \cup A_{du}) = p^2 + pq = p(p + q) = p$
Och sannolikheten för u i alla kast är gränsvärdet då $n \to 0$ av $p^n = 0$ (om $p < 1$).

Definition: Givet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och en stokastisk variabel X på detta. Om X är en indikatorfunktion (d.v.s. $X(\omega) = I_A(\omega) = 1$ om $\omega \in A$ och 0 för övrigt) gäller:

$$\int X dP = P(A).$$

Om X är enkel har vi:

$$\int_{\Omega} X dP = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Omega} I_{A_k} dP = \sum_{k=1}^{n} c_k P(A_k)$$

$$\int_A XdP = \int_\Omega X \cdot I_A dP$$

Definition; **Väntevärdet** för en stokastisk variabel ges av:

$$E[X] = \int_\Omega X \cdot I_A dP = \int_\Omega X(\omega) \cdot dP(\omega)$$

Sats: Om X är en positiv stokastisk variabel, då har vi att:

$$E[X] = \int_0^\infty P(X \geq t)dt$$

Definition: φ är en **täthetsfunktion** på $\boldsymbol{R}$ om $\varphi > 0$ och $\int_\Omega \varphi \cdot d\mu_0 = 1$. Denna har ett associerat sannolikhetsmått givet av:

$$P(A) = \int_A \varphi \cdot d\mu_0 \qquad \forall\ A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{R})$$

φ kallas också **Radon-Nikodym**-derivatan med avseende på μ_0:

$$\varphi = \frac{dP}{d\mu_0}$$

Vi återkommer till denna senare.

Oberoende

Definition: $A \in \mathcal{F}$ och $B \in \mathcal{F}$ är **oberoende** om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definition: $\mathcal{G}$ och $\mathcal{H}$ är **oberoende σ-algebraor** om $P(A \cap B) = P(A)P(B)\ \forall A \in \mathcal{G}$ och $B \in \mathcal{H}$.

Definition: X och Y är **oberoende stokastiska variabler** om de genererar oberoende σ-algebraor.

Exempel: $P\{HH\} = p^2$, $P\{HT\} = P\{TH\} = qp$, $P\{TT\} = q^2$

$A = \{HH, HT\}$, $B = \{HT, TH\} \Rightarrow A \cap B = \{HT\}$

A och B är oberoende om $P\{HT\} = P\{HH, HT\}P\{HT, TH\} \Rightarrow$

$qp = P(A)P(B) = (p^2 + qp)*2qp = p*2qp = 2qp^2 \Rightarrow p = q = ½.$

Exempel: $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, \{HH, HT\}, \{TH, TT\}\}$, $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega, \{HH, TH\}, \{HT, TT\}\}$

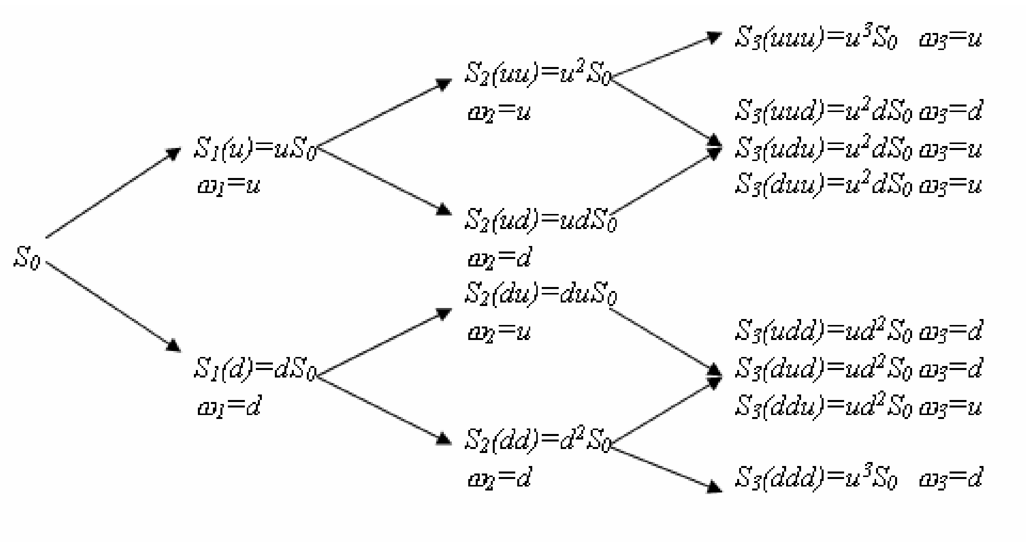
Låt $A = \{HH, HT\}$ och $B = \{HH, TH\}$

$P(A)P(B) = (p^2 + qp)(p^2 + qp) = p^2$, $P(A \cap B) = P\{HH\} = p^2$

Det spelar ingen roll hur vi väljer A och B!!!

Betingade väntevärden

Vi skall nu åter studera Binomialmodellen:



Varje S_k är en stokastisk process på $\Omega=\{uuu, uud, udu, duu, duu, dud, ddu, ddd\}$.
$\mathcal{F} = P(\Omega)$ är en σ-algebra och $(\Omega,\mathcal{F})$ ett mätbart rum. Varje S_k är då en mätbar funktion $\Omega \rightarrow R$ och S_k^{-1} en funktion $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}$ där $\mathcal{B}$ är Borel-σ-algebran på R.

Definition: Det **betingade väntevärdet** av A givet B definieras av:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definition: Antag att vi vet utfallet $\omega \in B$ där B är mätbar och $P(B) > 0$ då kan vi definiera väntevärdet av X betingat B som

$$E[X \mid B] = \frac{1}{P(B)} \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

Exempel: Låt oss beräkna S_1 givet $S_2 : E[S_1 \mid S_2]$
Vi vet att detta är en stokastisk variabel $Y: Y(\omega) = E[S_1 \mid S_2 = y]$ där $y = S_2(\omega)$.

Egenskaper till $E[S_1 \mid S_2]$:

- Beroende av ω.
- S_2 känd $\Rightarrow E[S_1 \mid S_2]$ känd. Speciellt:
  - Om $\omega = uuu$ eller $\omega = uud \Rightarrow S_2(\omega)=u^2S_0 \Rightarrow$ utan att veta ω vet vi att $S_1(\omega)=uS_0$

    $$E[S_1 \mid S_2](uuu) = E[S_1 \mid S_2](uud) = uS_0$$

  - På samma sätt om $\omega = dd*$ får vi

    $$E[S_1 \mid S_2](ddd) = E[S_1 \mid S_2](ddu) = dS_0$$

  - Om $\omega = A = \{udu, udd, duu, dud\} \Rightarrow S_2(\omega)=u^dS_0 \Rightarrow$ men vi vet inte om $S_1(\omega)=uS_0$ eller $S_1(\omega)=dS_0$. Tag därför ett viktat medelvärde:

    $$P(A) = p^2q + pq^2 + p^2q + pq^2 = \{p + q = 1\} = 2pq.$$

Vidare har vi:

$$\int_A S_1 dP = p^2quS_0 + pq^2\, uS_0 + p^2q\, dS_0 + pq^2\, dS_0 = pq(u + d)S_0.$$

För $\omega \in A$ definierar vi:

$$E[S_1 \mid S_2](\omega) = \frac{\int_A S_1 dP}{P(A)} = \frac{1}{2}(u + d) \cdot S_0$$

Då har vi:

$$\int_A E[S_1 \mid S_2]dP = \int_A S_1 dP$$

Sammanfattningsvis kan vi skriva:

$$E[S_1 \mid S_2](\omega) = g(S_2(\omega))$$

där

$$g(x) = \begin{cases} u \cdot S_0 & \text{om } x = u^2 S_0 \\ \frac{1}{2}(u+d) \cdot S_0 & \text{om } x = udS_0 \\ d \cdot S_0 & \text{om } x = d^2 S_0 \end{cases}$$

Med andra ord så är $E[S_1 \mid S_2]$ slumpvis endast i beroendet av S_2. Vi kan också skriva: $E[S_1 \mid S_2 = x] = g(x)$, där g är funktionen definierad ovan. Slumptalsvariabeln $E[S_1 \mid S_2]$ har två fundamentala egenskaper:

- $E[S_1 \mid S_2]$ är $\sigma(S_2)$-mätbar
- För alla mängder $A \in \sigma(S_2)$ gäller

$$\int_A E[S_1 \mid S_2]dP = \int_A S_1 dP$$

Egenskaper:

$$E[E[X \mid G]] = E[X]$$

$$E[X \mid G] = X \qquad \text{Om } X \text{ är } G\text{-mätbar}$$

$$E[X \mid G] \geq 0 \qquad \text{Om } X \geq 0$$

$$E[a_1 X_1 + a_2 X_2 \mid G] = a_1 E[X_1 \mid G] + a_2 E[X_2 \mid G]$$

$$E[\phi(X) \mid G] \geq \phi(E[X \mid G]) \quad \phi : R \to R, \quad E|\phi(X)| \leq \infty \quad \text{Jensens olikhet}$$

$$E[E[X \mid G] \mid H] = E[X \mid H] \quad H \text{ del-}\sigma\text{-algebra på } G.$$

$$E[ZX \mid G] = ZE[X \mid G] \qquad \text{Om } Z \text{ är } G\text{-mätbar.}$$

$$E[X \mid G] = E[X] \qquad \text{Om } X \text{ är oberoende av } G.$$

Martingaler

En martingal beskriver ett rättvist spel där vinsten i genomsnitt blir noll, även om spelaren får utnyttja tidigare resultat vid insats. En stokastiska process $\{X_t\}$ utgör en martingal om för $s < t$ det betingade väntevärdet av X_t ges av: $E[X_t \mid X_u \,;\, u \leq s] = X_s$.

Ingredienser:
- Ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- En filtration, d.v.s. sekvens av σ-algebraor $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$.
- En stokastisk process $X = \{x_k\}$ med slumptalsvariabler $x_0, x_1, \ldots$.

Definition: Processen X är en **martingal** (MG) om:

(i) X är $\underline{\mathcal{F}}$–adapterad.
(ii) $E[|X(t)|] < \infty \ \forall t \geq 0$.
(iii) $E[X(t) \mid \mathcal{F}_s] = X(s) \ \ \forall s \leq t$ (martingalegenskapen)

Att X är $\underline{\mathcal{F}}$–adapterad innebär att varje x_k är $\mathcal{F}_k$-mätbar. D.v.s. om man vet informationen i $\mathcal{F}_k$ så vet man värdet på x_k. Om likheten i (iii) byts mot ≤ eller ≥ säger vi att vi har en **super**- respektive **submartingal**.

Lemma: Om X martingal så gäller

$$E[\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0 \ \ \forall n > 0, \ \ \Delta X_n = X_n - X_{n-1}.$$

Exempel: Låt Y vara en $\mathcal{F}$-mätbar stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P, \underline{\mathcal{F}})$ och definiera $X : X_t = E[Y \mid \mathcal{F}_t]$, $t \geq 0$. Då är X martingal ty:

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = E[E[Y \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] = E[Y \mid \mathcal{F}_s] = X_s$$

Sats: Under det riskneutrala måttet $Q\ (\tilde{p}, \tilde{q})$ är det i Binomialmodellen diskonterade aktiepriset $\{(1+r)^{-k} S_k, \mathcal{F}_k\}_{k=0}^{n}$ martingal.

Bevis:

$$E^Q\left[(1+r)^{-(k+1)} S_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] = (1+r)^{-(k+1)}(\tilde{p} \cdot u + \tilde{q} \cdot d) S_k =$$

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^{k+1}\left(\frac{u \cdot (1+r-d)}{u-d} + \frac{d \cdot (u-1-r)}{u-d}\right) S_k = \left(\frac{1}{1+r}\right)^{k+1} \frac{(1+r)(u-d)}{u-d} S_k =$$

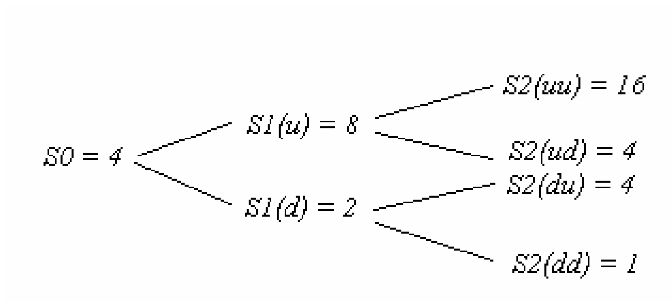
$$(1+r)^{-k} S_k$$

Definition: En martingal sägs vara **kvadratintegrabel** om: $\sup_{0 \le t \le \infty} E\left[X^2(t)\right] < \infty$. Klassen av dessa betecknas med $M^2(\Omega, \mathcal{F}, P, \underline{\mathcal{F}})$.

Markovprocesser och dess egenskaper

Vi börjar med att studera ett par enkla exempel.

Exempel: En Europeisk lookback option med värdena $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = ½$, $p = q = ½$ och $r = ¼$ samt med ett lösenpris på $X = 5$ kr. Vi studerar denna under två perioder i Binomialmodellen.



En lockback-options värde ges av:

$$V_2 = \max_{0 \le k \le 2}\left(S_k - 5\right)^+$$

Vi studerar således utvecklingen bakåt då vi sätter dess värde, därav namnet lockback. Vi har då: $V_{uu} = 11$, $V_{ud} = 3$, $V_{du} = 0$ och $V_{dd} = 0$. (Observera att $V_{ud} \neq V_{du}$).

Går vi nu bakåt i trädet får vi:

$$V_u = \frac{1}{1+r}\left[pV_{uu} + qV_{ud}\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 11 + \frac{1}{2}\cdot 3\right] = 5.60$$
$$V_d = 0$$
$$V = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5.60 = 2.24$$

med

$$\Delta_{k-1} = \frac{V_k(u) - V_k(d)}{S_k(u) - S_k(d)}$$

får vi $\Delta_0 = 0.93$, $\Delta_1(u) = 0.67$ och $\Delta_1(d) = 0$. Går vi nu framåt i trädet får vi:

$$X_1(u) = \Delta_0 S_1(u) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 5.59; \quad V_1(u) = 5.60$$
$$X_1(d) = \Delta_0 S_1(d) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 0.01; \quad V_1(d) = 0$$
$$X_2(uu) = \Delta_1(u) S_2(uu) + (1+r)(X_1(u) - \Delta_1(u) S_1(u)) = 11.01; \quad V_2(uu) = 11$$

osv...

<u>Exempel</u>: En vanlig Europeisk option med samma data som lookback-optionen ovan.

$$V_2 = (S_k - 5)^+$$

Vi har då: $V_{uu} = 11$, $V_{ud} = V_{du} = 0$ och $V_{dd} = 0$. (Observera att $V_{ud} \neq V_{du}$). Går vi nu bakåt i trädet får vi:

$$V_u = \frac{1}{1+r}\left[pV_{uu} + qV_{ud}\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 11 + \frac{1}{2}\cdot 0\right] = 4.40$$
$$V_d = 0$$
$$V = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4.40 = 1.76$$

<u>Problem</u>:
För en modell med n perioder har Ω 2^n element, vilket ger 2^n ekvationer. Detta betyder för en tre månads option med 66 handelsdagar och periodlängd en dag $2^{66} \approx 7*10^{19}$ ekvationer.

Lösning:
Vi kan lösa detta på tre olika sätt:

1.) Med simulering. Gör många simuleringar och medelvärdesbilda.
2.) Approximera med kontinuerlig tid. Vi får då en PDE-teori.
3.) Leta efter en Markovstruktur.

Det är 3.) vi gör ovan. I stället för fyra olika värden för $n = 2$ (V_{uu}, V_{ud}, V_{du} och V_{dd}) har vi tre eftersom $V_{ud} = V_{du}$. Detta leder till $n + 1$ ekvationer i stället för 2^n!

Definition: Låt (Ω, $\mathcal{F}$, P) vara ett sannolikhetsrum, $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ en filtration under $\mathcal{F}$ och $\{X_k\}_{k=0}^n$ en stokastisk process på (Ω, $\mathcal{F}$, P). Denna process kallas **Markovprocess** om

- $\{X_k\}_{k=0}^n$ är adapterad till $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^n$ och
- X_{k+1} betingat på $\mathcal{F}_{k+1}$ är samma som X_{k+1} betingat på X_k (Markovegenskapen)

Vi kan också formulera Markovegenskapen på följande vis:

Givet $0 \le t_0 \le t_1$ och $h(y)$. Beteckna väntevärdet av $h(X(t_1))$ med $E^{t0,x}[h(X(t_1))]$, givet att $X(t_0) = x$. Låt nu $X(0) = \xi$. Markovegenskapen säger då att:

$$E^{0,\xi}\left[h(X(t_1)) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] = E^{t_0,X(t_0)}\left[h(X(t_1))\right]$$

Med ord kan vi säga att om man studerar en väg (path) av Geometrisk Brownsk Rörelse (GBM) från 0 till t_0 och på basis av detta vill uppskatta $h(X(t_1))$ så är den enda relevanta informationen värdet av $X(t_0)$.

Exempel: Aktieprisets process i Binomialmodellen är en Markovprocess.

Stopptider och Amerikanska optioner

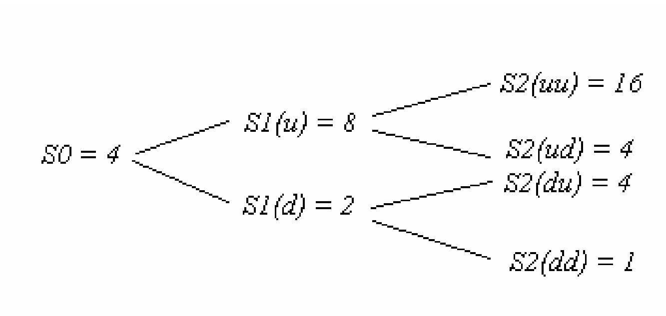
Vi skall nu studera Binomialmodellen för amerikanska kontrakt. I varje period k kan då innehavaren av kontraktet utnyttja optionen och erhålla $g(S_k)$ kronor. Därför skapar portföljen en värdeprocess som satisfierar

$$X_k \ge g(S_k) \;\; \forall k$$

Vi får då

$$V_n(x) = g(x)$$
$$V_k(x) = \max\left\{\frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}V_{k+1}(ux) + \tilde{q}V_{k+1}(dx)\right), g(x)\right\}$$

<u>Exempel</u>: En Amerikansk säljoption med värdena $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = ½$, $p = q = ½$ och $r = ¼$ samt med ett lösenpris på $X = 5$ kr. Vi studerar denna under två perioder i Binomialmodellen.



Värde på slutdagen ges av:

$$V_2 = (S_k - 5)^+$$

Vi har då: $V_{uu} = 0$, $V_{ud} = V_{du} = 1$ och $V_{dd} = 4$. Går vi nu bakåt i trädet får vi:

$$V_u = \max\left\{\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{uu} + \tilde{q}V_{ud}\right], (5-8)^+\right\} = \max\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\right], 0\right\} = 0.40$$
$$V_d = \max\left\{\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{ud} + \tilde{q}V_{dd}\right], (5-2)^+\right\} = \max\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 4\right], 3\right\} = 3$$
$$V = \frac{4}{5}\max\left\{\frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_u + \tilde{q}V_d\right], (5-4)^+\right\} = \max\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 0{,}4 + \frac{1}{2}\cdot 3\right], 1\right\} = 1{,}36$$

med

$$\Delta_{k-1} = \frac{V_k(u) - V_k(d)}{S_k(u) - S_k(d)}$$

får vi $\Delta_0 = -0.43$ men för $k = 1$ kan vi få två olika värden!!!

$$1 = V_{dd} = S_2(du)\Delta_1(d) + (1+r)(X_1(d) - \Delta_1(d)S_1(d)) \quad \Rightarrow \quad \Delta_1(d) = -1.83$$
$$4 = V_{du} = S_2(dd)\Delta_1(d) + (1+r)(X_1(d) - \Delta_1(d)S_1(d)) \quad \Rightarrow \quad \Delta_1(d) = -0.16$$

Om det vore en Europeisk option skulle $X_1(d) = S_1(d) = 2$ och Δ_0 skulle bli lika (= -1) i båda fallen.

Värdet av en hedgad portfölj med en Amerikansk option ges av:

$$X_{k+1} = S_{k+1}\Delta_k + (1+r)(X_k - \Delta_k S_k - C_k)$$

där C_k är delen konsumerad vid tiden $t = k$.

Egenskaper:

- Det diskonterade portföljvärdet är en supermartingal.
- Värdet satisfierar $X_k \geq g(S_k),\ k = 0, 1, ..., n$.
- Värdeprocessen är den minsta process med dessa egenskaper.

Fråga: När konsumerar vi?

Svar: Om:

$$E\left[(1+r)^{-(k+1)} V_{k+1}(S_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right] < (1+r)^{-k} V_k(S_k)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+r} E\left[V_{k+1}(S_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k\right] < V_k(S_k)$$

och innehavaren inte begär lösen kan vi som utfärdat optionen konsumera mellanskillnaden för att på så sätt ”stänga gapet”. I föregående exempel kunde vi konsumera en krona då
$V_d = 3$ och

$$\frac{1}{1+r} E\left[V_2(S_2) \mid \mathcal{F}_1\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 4\right] = 2$$

Vi kan också uttrycka detta som att det för en innehavare av optionen är optimalt att slå till då $V_k(S_k) = g(S_k)$.

Definition: Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vara ett sannolikhetsrum, $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{n}$ en filtration under $\mathcal{F}$. En **stopptid** definieras då som en stokastisk variabel $\tau: \Omega \rightarrow \{0, 1, ..., n\} \cup \{\infty\}$ så att

$$\{\omega \in \Omega;\ \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k \quad \forall k = 0, 1, ..., n, \infty$$

Exempel: I exemplet ovan definierar vi

$$\tau(\omega) = min\{k \mid V_k(S_k) = (5 - S_k)^+\}$$

Denna stopptid motsvarar första gången optionens värde är lika med momentanvärdet. Detta är en optimal tillslagstid. En stopptid karakteriseras av att man vid varje tidpunkt $t < \tau$ kan avgöra huruvida τ har inträffat eller ej på basis av den information man faktiskt har vid tiden t. Vi noterar att:

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } \omega = A_d \\ 2 & \text{om } \omega = A_u \end{cases} \qquad \begin{aligned} \{\omega : \tau(\omega) = 0\} &= \emptyset \in \mathcal{F}_0 \\ \{\omega : \tau(\omega) = 1\} &= A_d \in \mathcal{F}_1 \\ \{\omega : \tau(\omega) = 2\} &= A_u \in \mathcal{F}_2 \end{aligned}$$

Radon-Nikodym

Sats: Låt P och Q vara två sannolikhetsmått på $(\Omega, \mathcal{F})$. Antag att för varje $A \in \mathcal{F}$ med $P(A) = 0$, också $Q(A) = 0$, då säger vi att Q är absolutkontinuerlig med avseende på P. Då existerar en stokastisk variabel Z (≥ 0) så att:

$$Q(A) = \int_{\Omega} Z dP(A)$$

Vi kallar Z för Radon-Nikodym-derivatan av Q med avseende på P. Om även P är absolutkontinuerlig med avseende på Q säger vi att P och Q är ekvivalenta. D.v.s. om och endast om $Q(A) = 0$ exakt då $P(A) = 0$ har vi

$$E^Q[X] = E^P[XZ] \quad \forall X$$
$$E^P[Y] = E^Q\left[Y \frac{1}{Z}\right] \quad \forall Y$$

Exempel: Låt $\Omega = \{uu, ud, du, dd\}$, $P(u) = 1/3$, $P(d) = 2/3$ och $Q(u) = Q(d) = 1/2$. Definiera $Z(\omega)$ som $Q(\omega)/P(\omega)$ då har vi:

$$Z(uu) = (1/2)^2/(1/3)^2 = 9/4,\ Z(ud) = 9/8,\ Z(du) = 9/8 \text{ och } Z(dd) = 9/16$$

Radon-Nikodym används inom den finansiella analysen till att byta mått. Om vi har ett utfallsrum Ω, med marknadens sannolikheter P och låter Q vara den riskneutrala sannolikhetsfördelningen kan vi finna transformationen mellan dessa med hjälp av Radon-Nikodymderivatan. Om $P(\omega) > 0$ och $Q(\omega) > 0$ för alla $\omega \in \Omega$ har vi att P och Q

är ekvivalenta. Vi skriver detta som $Q \sim P$. Om P och Q är absolutkontinuerliga skriver vi detta som $Q << P$.

Ett annat sätt att formulera Radon-Nikodym är att använda sig av mått μ och ν på (Ω, X). Absolutkontinuitet $\Leftrightarrow$ $\mu << \nu$ och ekvivalens $\mu \sim \nu$ (om det även gäller att $\nu << \mu$, d.v.s. att de har exakt samma tomma mängd, Ø). Vi skriver då Radon-Nikodymderivatan som:

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \Leftrightarrow \quad d\nu(x) = f(x) \cdot d\mu(x)$$

Observera att, om man förfina en σ-algebra kan man tappa absolutkontinuitet. På filtrerade sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, med en filtration $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}\}$ på $[0, T]$ och där $L_T \geq 0$ är en $\mathcal{F}$-mätbar stokastisk variabel, kan vi finna ett nytt mått Q på $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ via:

$$dQ = L_T dP$$

Q blir ett sannolikhetsmått om $E^P[L_T] = 1$:

$$\int_{\Omega} dQ = \int_{\Omega} L_T dP = E^P[L_T] = 1$$

<u>Definition</u>: Z_k sägs vara P-martingal om

$$Z_k = E^P[Z \mid \mathcal{F}_k] \quad k = 0,1,\ldots,n$$
$$E^P[Z_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] = E^P\left[E^P[Z \mid \mathcal{F}_{k+1}] \mid \mathcal{F}_k\right] = E^P[Z \mid \mathcal{F}_k] = Z_k$$

<u>Lemma</u>: Om X är $\mathcal{F}_k$-mätbar och $0 \leq j \leq k$ så gäller

$$E^Q[X \mid \mathcal{F}_j] = \frac{1}{Z_j} E^P[XZ_k \mid \mathcal{F}_j]$$

<u>Sats</u>: L (ovan) är en $(\underline{\mathcal{F}}, P)$-martingal.

<u>Bevis</u>: Vi skall alltså visa att $L_t = E^P[L_T \mid \mathcal{F}_t]$ för alla $t \leq T$ eller

$$\int_F L_t dP = \int_F L_T dP \qquad \text{för alla } F \in \mathcal{F}_t$$

$$\int_F L_t dP = \{F \in \mathcal{F}_t\} = Q_t(F) = Q_T(F) = \{F \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T\} = \int_F L_T dP$$

Sats: Givet ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Låt Q vara ett sannolikhetsmått på $(\Omega, \mathcal{F})$. $Q << P$ och $L = \frac{dQ}{dP}$. Antag nu att $\mathcal{G}$ är en σ-algebra sådan att $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Då gäller:

$$E^Q[X \mid \mathcal{G}] = \frac{E^P[LX \mid \mathcal{G}]}{E^P[L \mid \mathcal{G}]}$$

Itôs lemma

I den finansiella analysen behöver man ofta differentiera funktioner av stokastiska processer. Därför måste vi via kjedjereglen härleda uttrycket på differentialen för sådana funktioner. Vi utgår ifrån Taylors formel på *F(t, X)*:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(dX)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial X}dtdX + ...$$

där X är en stokastisk process som ges av

$$dX = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW$$

W är en Weinerprocess, för vilken det gäller att $(dW)^2 = dt$. Därför har vi:

$$(dX)^2 = \mu^2 \cdot (dt)^2 + \sigma^2 \cdot (dW)^2 + 2 \cdot \mu \cdot \sigma \cdot dt \cdot dW \rightarrow \sigma^2 \cdot dt$$

Vi får då till lägsta ordningen

$$\boxed{dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial F}{\partial X} dW}$$

vilket är Itô:s formel.

Exempel: Brownsk rörelse.

Brownsk rörelse beskrivs av följande stokastiska differentialekvation:

$$\begin{cases} dX(t) = \alpha \cdot X(t) \cdot dt + \sigma \cdot X(t) \cdot dW \\ X(0) = x \end{cases}$$

För att lösa denna sätter vi $Z(t)$ = ln$\{X(t)\}$ och använder oss av Itô:s lemma

$$
\begin{aligned}
dZ(t) &= \frac{1}{X(t)}dX(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2(t)}\left(dX(t)\right)^2 = \\
&= \frac{1}{X(t)}\left(\alpha \cdot X(t)\cdot dt + \sigma \cdot X(t) \cdot dW/t)\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2(t)}\sigma^2 X^2(t)dt = \\
&= \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma \cdot dW(t) \\
Z(0) &= \ln(x)
\end{aligned}
$$

Integration ger nu

$$
Z(t) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma \cdot W/t)
$$

Så att

$$
X(t) = x \cdot e^{\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma \cdot W(t)\right\}}
$$

Itôs formel måste också användas då vi skall integrera stokastiska processer. Denna integral kallas **Itô-integralen**. En Weinertrajektoria är en kontinuerlig funktion av tiden som inte är deriverbar i någon punkt. För att beräkna integraler gör vi därför följande försök:

(i) Dela in intervallet [0, t] i lika delar $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$.
(ii) Definiera för varje utfall ω: $I_n(\omega) = \Sigma g(\xi_k)[W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega)]$.
(iii) Summera och låt n $\rightarrow \infty$ och hoppas att $I_n \rightarrow I$.

<u>Exempel</u>: Beräkna integralen $\int_0^t W(s)dW(s)$ där W är en Weinerprocess.

Om vi sätter $Z(t) = W^2(t)$ så ger Itô:

$$
dZ(t) = 2 \cdot W(t) \cdot dW(t) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(dW(t)\right)^2 = 2 \cdot W(t) \cdot dW(t) + dt
$$

Integrerar vi denna erhåller vi: $W^2(t) = t + 2 \cdot \int_0^t W(s)dW(s)$.

Alltså:

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{t}{2}$$

Exempel: Beräkna väntevärdet $E[W^4(t)]$.

Sätt $Z(t) = W^4(t)$ och låt $X(t) = W(t)$ d.v.s. $dX(t) = dW(t)$ (ingen drift, bara diffusion = 1)

$$dZ = d(W^4) = 4 \cdot W^3 dW + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot W^2 (dW)^2 = 6 \cdot W^2 dt + 4 \cdot W^3 dW$$

Integrerar vi denna får vi

$$W^4(T) = 6\int_0^T W^2(s)ds + 4\int_0^T W^3(s)dW(s)$$

Tar vi därefter väntevärdet får vi

$$E\left[W^4(T)\right] = 6\int_0^T E\left[W^2(s)\right]ds + 4 \cdot E\left[\int_0^T W^3(s)dW(s)\right] = 6\int_0^T s^2 ds = 3 \cdot T^2$$

eftersom väntevärdet av den stokastiska integralen är definitionsmässigt lika med noll.

Studera åter integralen $\int W(s)dW(s)$ genom att definiera A_n och B_n:

$$\begin{cases} A_n = \sum W(t_k)\left[W(t_{k+1}) - W(t_k)\right] & \xi_k = t_k \\ B_n = \sum W(t_{k+1})\left[W(t_{k+1}) - W(t_k)\right] & \xi_k = t_{k+1} \end{cases}$$

Vi får då att

$$\begin{cases} A_n + B_n = W^2(t) \\ B_n - A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta W_k)^2 = S_n \end{cases}$$

Låt nu $B_n - A_n \rightarrow t \Rightarrow A_n \rightarrow A$ och $B_n \rightarrow B$ där

$$\begin{cases} A = \frac{W^2(t)}{2} - \frac{1}{2} \\ B = \frac{W^2(t)}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vi ser att ξ_k påverkar integralbegreppet och att

$$\begin{cases} \int_0^t W(s)dW(s) = \frac{W^2(t)}{2} - \frac{1}{2} & \text{Denna kallas Itô - integralen och} \\ \int_0^t W(s)dW(s) = \frac{W^2(t)}{2} + \frac{1}{2} & \text{denna bakåt - integralen} \end{cases}$$

Definition: Med $\mathcal{L}^2[a, b]$ menas klassen av processer g som satisfierar:

- g är $\underline{F}$-adapterad och
- $\int_0^t E\{[g(s)]^2\}ds < \infty$

För varje val av $a \le b$ vill vi nu definiera $\int_a^b g(s)dW(s)$ för godtyckliga val av g i $\mathcal{L}^2[a, b]$. Vi gör detta i två steg:

Steg I: Antag först att g är enkel. Då existerar $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ och

$$g(s) = g(t_k) \quad \forall s \in [t_k, t_{k+1})$$
$$g(t_k) \in \mathcal{F}_{tk} \quad k = 0, 1, ..., n$$

Då

$$\int_a^b g(s)dW(s) = \sum_k g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$$

Observera att vi har framåtdifferenser.

Sats: Låt g och h vara enkla processer, $\mathcal{F}$-adapterade och kvadratintegrabla, samt $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

Då

$$E\left[\int_a^b g(s)dW(s)\right]=0$$

$$E\left[\left(\int_a^b g(s)dW(s)\right)^2\right]=\int_a^b E\left[g^2(s)\right]ds$$

$$E\left[\left(\int_a^b g(s)dW(s)\right)\left(\int_a^b h(s)dW(s)\right)\right]=\int_a^b E\left[g(s)h(s)\right]ds$$

$\int_a^b g(s)dW(s)$ är $\mathcal{F}_t$-mätbar

$$E\left[\int_a^b g(s)dW(s)\,|\,\mathcal{F}_a\right]=0$$

$$\int_a^b \left[\alpha g(s)+\beta h(s)\right]dW(s)=\alpha\int_a^b g(s)dW(s)+\beta\int_a^b h(s)dW(s)$$

<u>Steg II</u>: I det allmänna fallet då g inte är en enkel funktion gör vi på följande vis.

A.) Vi har en avbildning I : $\mathcal{L}^{2,e} \to L^2[\Omega,\mathcal{F}_b, P]$ där $\mathcal{L}^{2,e}$ betecknar alla enkla processer i $\mathcal{L}^2$ och I av

$$I(s)=\int_a^b g(s)dW(s)$$

Då är $\mathcal{L}^2$ ett vektorrum med inre produkt

$$(g,h)=E\left[\int_a^b g(s)h(s)ds\right]$$

$$\|g\|_{L^2}=\left(E\left[\int_a^b g^2(s)ds\right]\right)^{1/2}=\|I(g)\|_{L^2}$$

B.) Låt g vara en godtycklig process i L^2. Man kan visa att det existerar en följd $\{g_n\}$ av processer i $L^{2,e}$ sådana att $\|g_n - g\|_{L^2} \to 0$. Därmed är $\{g_n\}$ en Cauchysvit i $L^2[\Omega, \mathcal{F}_b, P]$. Eftersom L^2 är komplett konvergerar $I(g_n)$ mot något gränselement.

C.) Definiera

$$\int_a^b g(s)dW(s) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g^n(s)dW(s)$$

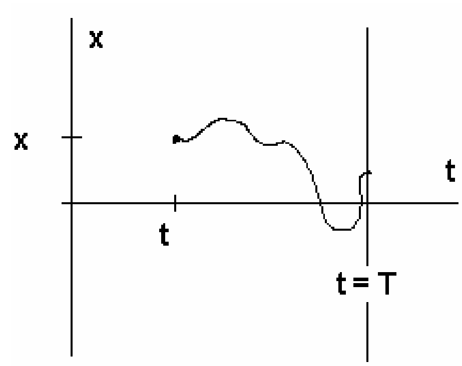
Vi erhåller då satsen ovan för g och h i L^2.

Partiella paraboliska differentialekvationer och Feynman-Kac

Betrakta följande Cauchyproblem på intervallet *[0, T]*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\dfrac{\partial F}{\partial X}(t,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = 0 \\ F(T,x) = \phi(x) \end{cases}$$

I stället för att angripa denna analytiskt skall vi finna *F(t, x)* i termer av en associerad diffusionsprocess. Antag därför att det existerar en lösning.



Fixera t och x, och låt $X(t)$ lösa den stokastiska differentialekvationen:

$$\begin{cases} dX(s) = \mu(s, X(s))ds + \sigma(s, X(s))dW(s) \\ X(t) = x \end{cases}$$

Använd Itô på *F(t, X)*:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial F}{\partial x} dW = \sigma \frac{\partial F}{\partial x} dW$$

Integration ger nu

$$\phi(x) = F(T, X(t)) = F(t, X(t)) + \int_t^T \sigma(s, X(s)) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s)) dW(s)$$

Därefter tar vi väntevärdet av denna, och sätter $X = x$, då erhåller vi (eftersom den stokastiska integralen alltid försvinner):

$$F(t, x) = E_{t,x}^{Q}\left[\phi(X(T))\right]$$

Exempel: Värmeledningsekvationen

Vi skall lösa diffusionsekvationen

$$\begin{cases} F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx} = 0 \\ F(T, x) = x^2 \end{cases} \quad \text{så} \quad \begin{matrix} \mu(t, x) = 0 \\ \sigma(t, x) = \sigma \end{matrix} \quad \text{och} \quad \phi(x) = x^2 \qquad dX = \sigma \cdot dW$$

Feynman-Kac ger då att

$$F(t, x) = E_{t,x}^{Q}\left[X_T^2\right]$$

Först sätter vi $Z_t = X_t^2$ och differentierar enligt Itô

$$dZ = 2 \cdot X_t dX + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (dX)^2 = \sigma^2 dt + 2 \cdot \sigma \cdot X dW$$

Integration ger sedan

$$Z_t = x^2 + \int_t^T \sigma^2 ds + \int_t^T 2 \cdot \sigma \cdot X dW = x^2 + \sigma^2 (T - t) + 2 \cdot \sigma \int_t^T X dW$$

Därefter tar vi väntevärde och får:

$$F(t,x) = x^2 + \sigma^2 (T-t)$$

Allmänt kan vi lösa följande partiella differentialekvation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\dfrac{\partial F}{\partial X}(t,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = rF(t,x) \\ F(T,x) = \phi(x) \end{cases}$$

med ansatsen $Z(s) = e^{-r \cdot s} F(s, X(S)), \quad dX(s) = \mu \cdot ds + \sigma \cdot dW$. Detta ger oss

$$F(t,x) = e^{-r\cdot(T-t)} F(s, X(S))$$

<u>Definition</u>: Ett **betingat kontrakt** är en $\mathcal{F}$–mätbar stokastisk variabel. Detta ger innehavaren vid iden $t = T$, X kronor. Mätbarhetskravet ger att vi på grundval av informationen vid tiden $t = T$ kan avgöra hur mycket som skall betalas ut. Lösningen bestäms av **Feynman-Kac**:

$$F(t,x) = e^{-r\cdot(T-t)} E_{t,x}\left[\phi(X(T)\right]$$

Lösningen är **<u>inte</u>** unik, men vi är bara intresserade av tillräckligt integrabla lösningar.

<u>Definition</u>: Det betingade kontraktet X kallas **uppnåeligt** om det existerar en självfinansierad portfölj $h = (h^0, h^1)$ så att $V(T) = X$. V kallas kontraktets **värdeprocess**.

$$V(t) = h^0(t)B(t) + h^1(t)S(t)$$

$\Rightarrow$

$$dV(t) = h^0(t)dB(t) + h^1(t)dS(t)$$
$$V(t) = X$$

<u>Exempel</u>: Lös följande partiella differentialekvation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = 0 \\ F(T,x) = x^2 \end{cases}$$

Vi antar därför att $F(t,X)$ löser denna där $dX = \sigma X dW$ och $X(0) = x$.

Differentiering ger då:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(dX)^2 = \sigma\frac{\partial F}{\partial X}dW$$

Integration ger nu

$$X^2 = F(T, X(t)) = F(t, X(t)) + \sigma\int_t^T \frac{\partial F}{\partial X}dW(s)$$

Tar vi då väntevärde får vi

$$F(t,x) = E_{t,x}^{Q}\left[X_T^2\right]$$

Vi behöver då dynamiken till Z = X^2. Itô ger:

$$\begin{cases} dZ = 2\cdot X_t dX + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (dX)^2 = 2\sigma^2\cdot X^2 dt + 2\sigma\cdot X^2 dW = 2\sigma^2\cdot Zdt + 2\sigma\cdot ZdW \\ Z(0) = X^2(0) = x^2 \end{cases}$$

Integration ger sedan

$$Z(t) = Z(0) + 2\sigma^2\int_t^T Zds + 2\sigma\int_t^T ZdW$$

Vi då väntevärde och får:

$$E[Z] = x^2 + 2\sigma^2\int_t^T E[Z]ds$$

Derivera och sätt *E[Z] = m*

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = 2\sigma^2 m \\ m(0) = x^2 \end{cases}$$

Vilket ger oss lösningen till den partiella differentialekvationen:

$$F(t,x) = m = x^2 e^{2\sigma^2 (T-t)}$$

<u>Exempel</u>: Studera den partiella differentialekvation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\dfrac{\partial F}{\partial X}(t,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - r(t)F(t,x) + k(t,x) = 0 \\ F(T,x) = \Phi(x) \end{cases}$$

Antag nu som vanligt att *F(t, X)* löser denna där:

$$\begin{cases} dX(s) = \mu(s, X(s))ds + \sigma(s, X(s))dW(s) \\ X(t) = x \end{cases}$$

Använd Itô på *F(t, X)*:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial F}{\partial x}dW = r(t)F(t,X) - k(t,X) + \sigma\frac{\partial F}{\partial x}(t,X)dW$$

Tag väntevärde och integrera

$$F(t, X(t)) = E_{t,x}^{Q}\left[\Phi(X_T)\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\} + \int_t^T \exp\left\{-\int_t^s r(u)du\right\}k(s, X(s)ds\right]$$

Vi skall nu ta fram ett klassiskt resultat, övergångssannolikheterna till den stokastiska differentialekvationen. Låt X vara lösningen till

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

Definiera *A* via

$$(Af)(s,y) = \mu(s,y)\frac{\partial f}{\partial y}(s,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,y)$$

och betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + Au\right)(s, y) = 0 & (s, y) \in (0, T) \times R \\ u(T, y) = I_B(y) \end{cases}$$

Där indikatorfunktionen $I_B(y)$ definieras så att, den är ett om $y \in B$ och noll annars. Vi får då:

$$u(s, y) = E_{s,y}\left[I_B(X_T)\right] = P(X_T \in B \mid X_s = y)$$

Vi kan då formulera följande sats:

<u>Sats</u>: **Övergångssannolikheterna** $P(s, y; t, B) = P(X_T \in B| X_s = y)$ ges av lösningen till **Kolmogorovs bakåtekvation**:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + Au\right)(s, y) = 0 & (s, y) \in (0, T) \times R \\ u(T, y) = I_B(y) \end{cases}$$

<u>Sats</u>: Antag att $P(s, y; t, dx)$ har tätheten $p(s, y; t, x)dx$ då

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial s} + A\right)p(s, y; t, x) = 0 & (s, y) \in (0, T) \times R \\ p(s, y; t, x) \to \delta_X \quad \text{då } s \to t \end{cases}$$

Bakåtekvationen kommer av att A verkar på bakåtvariablerna (s, y). Vi skall nu härleda en frmåtekvation. Betrakta en godtycklig oändligt deriverbar "test-funktion" på $(s, T) \times R$. Använd Itô:

$$h(T, X_T) = h(s, X_s) + \int_s^T \left(\frac{\partial h}{\partial t} + Ah\right)(t, X_t)dt + \int_s^T \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t)dW_t$$

Tag nu väntevärde och antag att vi har ett kompakt stöd $h(T, x) = h(s, x) = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_s^T p(s, y; t, x)\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)h(t, x)dxdt = 0$$

Partiell integration i x och t ger nu:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{s}^{T} h(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial t} - A^*\right)p(s,y;t,x)dxdt = 0$$

där

$$\left(A^* f\right)(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(t,x)f(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sigma^2(t,x)f(t,x)\right]$$

Vilket ger oss **Fokker-Plancks** ekvation

$$\begin{cases} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^*\right)p(s,y;t,x) = 0 & (s,y) \in (0,T) \times R \\ p(s,y;t,x) \to \delta_y \quad \text{då } s \downarrow t \end{cases}$$

Martingalrepresentation

<u>Sats</u>: Låt *W* vara en Weinerprocess på [0, 1] och *M* en martingal sådan att:

(i) *M* är F_t^W-adapterad
(ii) *E[M2(t)] < ∞ ∀ t ∈ [0, T]*

Då existerar det en F_t^W-adapterad process *g* sådan att:

(1) $E\left[\int_0^T g(s)dW(s)\right] < \infty$

(2) $M(T) = M(0) + \int_0^T g(s)dW(s)$

Girsanovtransformation

Lemma: Låt g vara en $\mathcal{F}$-adapterad process med

$$P\left(\int_0^T g^2(t)dt < \infty\right) = 1$$

då har

$$dL(t) = g(t)L(t)dX(t)$$
$$L(0)=1$$

En unik lösning $L > 0$:

$$L(t) = \exp\left\{\int_0^t g(s)dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds\right\}$$

Bevis: Övning (använd Itô:s formel).

Girsanovs teorem: Låt X vara en $(\mathcal{F}, P)$-Weinerprocess samt L och g som ovan. Antag vidare att $E[L(T)] = 1$ och definiera Q via $dQ = L(T)dP$ på $\mathcal{F}_t$. Då är processen:

$$W(t) = X(t) + \int_0^T g(s)ds$$

en $(\mathcal{F}, Q)$-Weinerprocess.

Tolkning: X är en Q-Weinerprocess med driften g.

Omvändningen av Girsanovs teorem: Givet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X och antag att $Q << P$ på $\mathcal{F}_T^X$, då existerar en unik $\{\mathcal{F}_t^X\}$-adapterad process g sådan att:

$$DQ(t) = L(t)dP(t)$$

där L ges av

$$dL(t) = g(t)L(t)dX(t)$$
$$L(0)=1$$

I många sammanhang är det praktiskt att byta mått. Man kan då göra en måttransformation och transformera beroende processer till oberoende.

Black and Scholes modell

Antag att vi har två papper, ett säkert, en obligation B som betalar en konstant ränta r och en aktie S. Aktien karakteriseras av en konstant drift α och en stokastisk term σdW. Den stokastiska termen är en geometrisk Brownsk rörelse, (en Weinerprocess) där σ kallas **volatiliteten**. Vi har således:

$$\begin{cases} dB(t) = r \cdot B(t)dt \\ B(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(t) = e^{rt}$$

$$\begin{cases} dS(t) = \alpha \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dW(t) \\ S(0) = s \end{cases}$$

Begynnelsevärdena innebär att obligationen från början har värdet *1* krona och aktien s kronor. Weinerprocessen är normalfördelad med $(dW(t))^2 = dt$. Vi bildar nu en portfölj av dessa: $h = (h^0, h^1)$, där h beskriver antalet obligationer respektive antalet aktier. h är då en stokastisk process och portföljens värdeprocess definieras av:

$$V(t) = h^0(t) \cdot B(t) + h^1(t) \cdot S(t)$$

Portföljen är självfinansierad om

$$\begin{aligned} dV(t) &= h^0(t) \cdot dB(t) + h^1(t) \cdot dS(t) = \\ &= h^0(t) \cdot r \cdot B(t)dt + h^1(t) \cdot \alpha \cdot S(t)dt + h^1(t) \cdot \sigma \cdot S(t)dW(t) = \\ &= \left\{ h^0(t) \cdot r \cdot B(t) + h^1(t) \cdot \alpha \cdot S(t) \right\} dt + h^1(t) \cdot \sigma \cdot S(t)dW(t) \end{aligned}$$

Bilda relativportföljen $u = (u^0, u^1)$

$$u^0(t) = \frac{h^0(t) \cdot B(t)}{V(t)}, \quad u^1(t) = \frac{h^1(t) \cdot S(t)}{V(t)}, \quad u^0(t) + u^1(t) = 1$$

Värdeprocessen kan då skrivas

$$dV(t) = V(t) \cdot \left\{ r \cdot u^0(t) + \alpha \cdot u^1(t) \right\} dt + V(t) \cdot \sigma \cdot u^1(t)dW(t)$$

Antag nu att *V(t) = F(t, S(t))*. Itô:s lemma ger då

$$
\begin{aligned}
dF &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(dS)^2 = \\
&= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}\big(\alpha \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dW(t)\big) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}dt = \\
&= \left\{\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha \cdot S(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right\}dt + \sigma \cdot S(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial S}dW(t)
\end{aligned}
$$

För att likna *dV(t)* multiplicerar vi med *V(t)* och sätter $\frac{\partial F}{\partial t} = F_t$, $\frac{\partial F}{\partial S} = F_s$ etc...

$$
dV(t) = V\left\{\frac{F_t + \alpha \cdot S \cdot F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot F_{ss}}{V}\right\}dt + V\frac{\sigma \cdot S \cdot F_s}{V}dW
$$

Vi ser då att

$$
u^1 = \frac{S \cdot F_s}{V}
$$

Vi har då

$$
dV(t) = V\left\{\frac{F_t + + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot F_{ss}}{V \cdot r} \cdot r + \alpha \cdot u^1\right\}dt + V \cdot \sigma \cdot u^1 dW
$$

Alltså

$$
u^0 = \frac{F_t + + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot F_{ss}}{F \cdot r}
$$

Eftersom $u^0(t) + u^1(t) = 1$ får vi slutligen

$$
\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - r \cdot F = 0}
$$

Detta är Black-Scholes differentialekvation. Observera att denna är <u>oberoende av α</u>.

Alternativ härledning: En investerare startar med en förmögenhet X_0 och erhåller vid varje t, $\Delta(t)$ andelar av en aktie modellerad av en geometrisk Brownsk rörelse:

$$dS(t) = \mu \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dB(t)$$

Investeraren finansierar investeringen med ett lån till räntan r. Förmögenheten vid tiden t ges av

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)dS(t) + r[X(t) - \Delta(t)S(t)]dt = \\ &= \Delta(t)[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)] + r[X(t) - \Delta(t)S(t)]dt = \\ &= rX(t) + (\mu - r)\Delta(t)S(t) + \sigma\Delta(t)S(t)dB(t) \end{aligned}$$

Faktorn (μ - r) kallas risk-premium. Betrakta nu en Europeisk option som betalar $g(S(T))$ vid tiden T och låt $\underline{F(t, S(t))}$ beteckna värdet vid tiden t. Då fås:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(dS)^2 = \\ &= \left\{F_t + \mu \cdot S \cdot F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 F_{ss}\right\}dt + \sigma \cdot S \cdot F_s dW \end{aligned}$$

Om nu $X(t) = F(T, S(t))$ får vi delta-hedgeregeln $\Delta(t) = F_s(t, S(t))$. Vidare

$$F_t + \mu S F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss} = rX + \Delta(\mu - r)S$$

Så μ försvinner och

$$\begin{cases} F_t + rSF_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss} - rF = 0 \\ F_T = g(S(T)) \end{cases}$$

Lösning till Black-Scholes

Vi ska nu lösa Black-Scholes ekvation för en Europeisk köpoption med lösenpris *K*:

$$\begin{cases} F_t + rSF_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss} - rF = 0 \\ F_T = \max(S_T - K, 0) \end{cases}$$

Vi antar att $F(t, S_t)$ löser Black-Scholes ekvation ovan, där

$$\begin{cases} dS = \alpha \cdot Sdt + \sigma \cdot SdW \\ S(0) = s \end{cases}$$

Itô ger då, med $\alpha = r$:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(dS)^2 = \\ &= F_t dt + Fs(\alpha \cdot Sdt + \sigma \cdot SdW) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 F_{ss}(dW)^2 = \\ &= \left\{F_t + \alpha \cdot S(t) \cdot F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 F_{ss}\right\}dt + \sigma \cdot S \cdot F_s dW = \\ &= rFdt + \sigma \cdot S \cdot F_s dW \end{aligned}$$

Integrera nu och tag väntevärde. Då försvinner den stokastiska delen och vi får:

$$F(t, S) = e^{-r(T-t)}E_{t,s}^{Q}\left[\max\{S_T - K, 0\}\right]$$

där vi fixerat *t* och *s*.
Vi behöver nu S_T som ges av den stokastiska differentialekvationen:

$$\begin{cases} dS(t) = r \cdot S(t) \cdot dt + \sigma \cdot S(t) \cdot dW \\ S(T) = s \end{cases}$$

För att lösa denna sätter vi $Z(t) = \ln\{S(t)\}$. Itô:s lemma ger då

$$
\begin{aligned}
dZ &= \frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{\partial Z}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial S^2}(dS)^2 = \\
&= \frac{1}{S}\left(r \cdot Sdt + \sigma \cdot SdW\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 \cdot S^2 dt = \\
&= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma \cdot dW
\end{aligned}
$$

Integration ger nu

$$
Z(t) = \ln s + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W_T - W_t\right)
$$

D.v.s.

$$
S(t) = s \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W_T - W_t\right)\right\} = s \cdot e^y
$$

Vi skall alltså beräkna priset på optionen med

$$
\Pi[X \mid F] = e^{-r(T-t)} E_{t,s}^{Q}\left[\max\{S_T - K, 0\}\right]
$$

Vi börjar med att införa följande beteckningar:

$$
\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \qquad \tau = T - t \qquad v = W_T - W_t = \sqrt{\tau}z
$$

Vi kan då skriva

$$
\begin{aligned}
&\Pi = e^{-r\cdot\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\max\{s \cdot e^y - K, 0\}\varphi(y)dy \\
&\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} \\
&s \cdot e^y - K = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln\left\{\frac{K}{S}\right\} \\
&y = \tilde{r} \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau}z \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{\ln\{K/S\} - \tilde{r} \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}
\end{aligned}
$$

Alltså

$$\Pi = e^{-r\cdot\tau}\int_{z_0}^{\infty}\left(s\cdot e^{\tilde{r}\cdot\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}z} - K\right)\varphi(z)dz =$$

$$= s\cdot e^{-r\cdot\tau}\int_{z_0}^{\infty} e^{\tilde{r}\cdot\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}z}\varphi(z)dz - K\cdot e^{-r\cdot\tau}\int_{z_0}^{\infty}\varphi(z)dz = A - B$$

$$B = K\cdot e^{-r\cdot\tau}N\left[-z_0\right]$$

$$A = \frac{s\cdot e^{-r\cdot\tau}}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{r\cdot\tau}\int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}z-a^2/2}dz = \frac{s}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{\infty} e^{-\left(z-\sigma\cdot\sqrt{\tau}\right)^2/2}dz = s\cdot N\left[-z_0+\sigma\cdot\sqrt{\tau}\right]$$

Slutligen får vi då

$$\Pi = s\cdot N\left[z_0-\sigma\cdot\sqrt{T-t}\right] - K\cdot e^{-r\cdot(T-t)}N\left[z_0\right] =$$
$$= s\cdot N\left[d_1\right] - K\cdot e^{-r\cdot(T-t)}N\left[d_2\right]$$

där

$$d_1 = \frac{\ln\{K/S\} - (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\cdot\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\cdot\sqrt{T-t}$$

<u>Exempel</u>: Vi skall konstruera en exotisk (europeisk) option, en medelvärdsoption. Innehavaren av denna erhåller på lösendagen T_2:

$$X = \frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2} S(u)du$$

där T_1 är en fix tid < T_2. Vår uppgift är att beräkna det arbitragefria priset för en sådan option.

Vi vet att

$$\begin{cases} dS(t) = r\cdot S(t)\cdot dt + \sigma\cdot S(t)\cdot dW \\ S(T) = s \end{cases}$$

Så att

$$S(t) = s + r\int_0^t S(u)\cdot du + \sigma\int_0^t S(u)\cdot dW(u)$$

Priset på optionen ges av

$$\Pi[X \mid F] = e^{-r(T_2-t)} E_{t,s}^{Q}\left[\frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} S(u)du\right] = \frac{e^{-r(T_2-t)}}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} E_{t,s}^{Q}[S(u)]du$$

Tar vi nu väntevärdet av S(t) får vi:

$$E[S(t)] = s + r\int_0^t E[S(u)]\cdot du + 0$$

Sätt *E[S(t)] = m* och derivera

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = t\cdot m(t) \\ m(0) = s \end{cases}$$

Denna läser vi enkelt och får

$$m(t) = E[S(t)] = se^{rt}$$

Så att

$$\Pi[X \mid F] = \frac{s\cdot e^{-r(T_2-t)}}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} e^{r(u-t)}du = \frac{s/r}{T_2 - T_1}\cdot\left(1 - e^{-r(T_2-T_1)}\right)$$

Härledning av delta för en Europeisk köpoption

För att beräkna hedge-parametrarna behöver vi kunna derivera integraler där integranden ingår i ena gränsen. Då har vi:

$$\frac{d}{dx}\int_o^{f(x)} g(y)dy = \frac{d}{dx}[G(y)]_0^{f(x)} = \frac{df(x)}{dx}\cdot g(f(x))$$

Black-Scholes formel för en köpoption ges av (då $q = 0$):

$$P = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

Alltså

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left[S \cdot N(d_1)\right] - X \cdot e^{-rT} \cdot \frac{\partial}{\partial S} N(d_2) = \\
&= N(d_1) + S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} - X \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_2) \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} = \\
&= N(d_1) + S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{1}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} - X \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_2) \cdot \frac{1}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} = \\
&= N(d_1) + \frac{1}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}}\left[S \cdot N'(d_1) - X \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_2)\right]
\end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned}
X \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_2) &= X \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}) = \\
&= X \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_1) \cdot e^{d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot e^{-\sigma^2 \cdot T/2} = \\
&= X \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_1) \cdot e^{-\sigma^2 \cdot T/2} \cdot \frac{S}{X} \cdot e^{rT} \cdot e^{-\sigma^2 \cdot T/2} = \\
&= S \cdot N'(d_1)
\end{aligned}$$

Alltså får vi tillsist

$$\Delta = N(d_1)$$

Övriga hedge-parametrar beräknas på liknande sätt.

Paritetsrelationer

För att studera paritetsrelationer inför vi följande notation:

$c(t, S, K, T, r, \sigma)$	optionspriser för en Europeisk köpoption.
$p(t, S, K, T, r, \sigma)$	optionspriser för en Europeisk säljoption.
$\Phi_S(x) = x$	värdet på en aktie.
$\Phi_B(x) = 1$	värdet på en krona (obligation).
$\Phi_{C,K}(x) = (x-K)^+$	värdet på en option.

Fixera slutdagen T och betrakta olika T-kontrakt X på formen $\Phi(S) = X$. Om

$$\Phi = \alpha \cdot \Phi_S + \beta \cdot \Phi_B + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \Phi_{C,K_i}$$

då ges priset av:

$$\Pi_t[\Phi] = \alpha \cdot \Pi_t[\Phi_S] + \beta \cdot \Pi_t[\Phi_B] + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot \Pi_t[\Phi_{C,K_i}] =$$
$$= \alpha \cdot S_t + \beta \cdot e^{-r(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot c(t, S_t, K_i, T, r, \sigma)$$

För ett sådant Φ kan vi således bilda en replikerande portfölj med konstanta andelar över tiden. Vi måste förstås låta optionen ingå. Resultatet är bara intressant om det finns en rimligt stor klass av kontraktsfunktioner Φ som kan skrivas som linjärkombination av basfunktionerna ovan. Så är i verkligheten fallet.

Exempel: En europeisk säljoption:

$$\Phi(x) = \Phi_{P,K}(x) = max[K-x, 0]$$

så

$$\Phi_{P,K} = K\Phi_B + \Phi_{C,K} - \Phi_S$$

Detta kallas put-call-paritet och kan skrivas som:

$$p(t, S) = Ke^{-r(T-t)} + c(t, S) - S$$

Diffusionsmodeller

Givet (Ω, $\mathcal{F}$, P, W, $\underline{\mathcal{F}}$), fixera T^* och låt $\underline{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_t;\ 0 \le t \le T^*\}$ vara den naturliga filtrationen,
$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s\ ;\ s \le t\}$. För Black-Scholes har vi:

$$\begin{cases} dB(t) = r \cdot B(t)dt \\ B(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(t) = e^{rt}$$

$$\begin{cases} dS(t) = \alpha \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)dW(t) \\ S(0) = s \end{cases}$$

där r, α, och σ är konstanter, $\sigma > 0$.

<u>Lemma</u>: X är martingal om och endast om $dX(t) = g(t)dW(t)$.

Vi vill nu byta mått så att Black-Scholes är martingal. Inför därför $Z(t) = (Z^0(t), Z^1(t))$ så att

$$Z(t) = \frac{1}{B(t)}\big(B(t), S(t)\big) = \left(1, \frac{S(t)}{B(t)}\right)$$

är martingal, men är $S(t)/B(t) \equiv e^{-rt}S(t)$ martingal? Vi söker därför dynamiken till Z^1. Itô ger:

$$dZ^1(t) = -r \cdot e^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) = (\alpha - r)Z^1(t)dt + \sigma Z^1(t)dW(t)$$

Vi söker nu en Girsanovtransformation så att $dZ^1(t)$ är martingal. Låt $dQ = L_T dP$ på $\mathcal{F}_{T^*}$, L_T kallas för en likelihoodprocess. Vi har att:

$$dL(t) = g(t)L(t)dW(t)$$
$$L(0) = 0$$

Girsanovs teorem ger då att

$$dW(t) = g(t)dt + dv(t)$$

där $v(t)$ är en Q-Weinerprocess. Q-dynamiken för $Z^1(t)$ ges då av

$$\begin{aligned} dZ^1(t) &= (\alpha - r)Z^1(t)dt + \sigma Z^1(t)\big(g(t)dt + d\nu(t)\big) = \\ &= (\alpha - r + \sigma g(t))Z^1(t)dt + \sigma Z^1(t)d\nu(t) \end{aligned}$$

Denna är martingal om $(\alpha - r + \sigma g(t)) = 0$, d.v.s. $g(t) = (\alpha - r)/\sigma$. $g(t)$ kallas Girsanovkärnan. Sammanfattningsvis har vi att, under martingalmåttet Q har Z-ekonomin dynamiken:

$$\begin{cases} dZ^0(t) = 0 \\ dZ^1(t) = \sigma Z^1(t)d\nu(t) \end{cases}$$

$$Z^1(t) = e^{-rt}S(t) \quad \Rightarrow \quad dS(t) = r \cdot S(t)dt + \sigma S(t)d\nu(t)$$

Oberoende av α som vi sett tidigare.

<u>Definition</u>: En **portföljstrategi** är en stokastisk process $h = (h^0, h^1)$ sådan att h är $\{\mathcal{F}_t\}$-adapterad och integrabel.

<u>Definition</u>: ***S*-värdeprocessen**: $V^s(t) = h^0(t)B(t) + h^1(t)S(t)$.

<u>Definition</u>: **Z-värdeprocessen**: $V^z(t) = h^0(t)Z^0(t) + h^1(t)Z^1(t)$.

<u>Definition</u>: ***S*-självfinansierad**: $dV^s(t) = h^0(t)dB(t) + h^1(t)dS(t)$.

<u>Definition</u>: **Z-självfinansierad**: $dV^z(t) = h^1(t)dZ^1(t)$.

<u>Definition</u>: Ett **betingat *T*-kontrakt** är en stokastisk variabel X som är $\mathcal{F}_t$-mätbar och integrabel.

<u>Definition</u>: ***S*-uppnåelig**: $dV^s(t, h) = X$, *P nästan säkert*.

<u>Definition</u>: **Z-uppnåelig**: $dV^z(t, h) = X$, *Q nästan säkert*.

<u>Sats</u>: Black-Scholes är arbitragefri.

<u>Bevis</u>: Antag att det existerar en arbitragestrategi h. Då existerar $X \in K^+$ nämligen $X = e^{-rt}V^s(t, h)$ så att

$$V^z(0, h) = e^{-r0}V^s(0, h) = 0$$
$$V^z(T, h) = e^{-rT}V^s(T, h)$$

Om nu h är självfinansierad följer

$$X = V^z(0,h) = \int_0^T h^1(t)dZ^1(t) = 0 + \int_0^T h^1(t)\cdot\sigma\cdot Z^1(t)d\nu(t)$$
$$E^Q[X] = E^Q\left[\int_0^T h^1(t)\cdot\sigma\cdot Z^1(t)d\nu(t)\right] = 0 \quad \text{ty } \nu(t) \text{ är } Q\text{ - martingal}$$

Men $X \in \mathcal{K}^+ \Rightarrow \{P \sim Q\} \Rightarrow Q(X \geq 0) = 1$ och $Q(X > 0) > 0 \Rightarrow E^Q[X] > 0 \Rightarrow$ motsägelse.
Sats: Black-Scholes är komplett, d.v.s. alla betingade kontrakt är uppnåeliga.

Bevis: Det räcker att visa detta i Z-ekonomin.

Fixera ett $X \in \mathcal{K}$ och visa att det existerar en portfölj h sådan att

$$V^z(T) = h^0(T) + h^1(T)Z^1(T) = X$$
$$dV^z(t) = h^1(t)dZ^1(t) = h^1(t)\cdot\sigma\cdot Z^1(t)d\nu(t)$$

på sannolikhatsmåttet Q och där $\nu(t)$ är en Q-Weinerprocess. Vi vet att om en sådan portfölj existerar är värdeprocessen ovan Q-martingal. Definiera processen M via $M(t) = E^Q[X \mid \mathcal{F}_t]$.

Vi får då:

$$E^Q[M_t \mid \mathcal{F}_s] = E^Q\left[E^Q[X \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s\right] = \{\mathcal{F}_t \text{ är finare än } \mathcal{F}_s\} = E^Q[X \mid \mathcal{F}_s] = M_s$$

Då är M $\mathcal{F}$-martingal. Nu använder vi oss av martingalrepresentationssatsen och får

$$M(t) = M(0) + \int_0^t g(s)dW(s) \quad \Rightarrow \quad dM(t) = g(t)d\nu(t)$$

Förslag: Om vi låter

$$\begin{cases} h^0(t) = M(t) - h^1(t)Z(t) \\ h^1(t) = \dfrac{g(t)}{\sigma\cdot Z(t)} \end{cases}$$

får vi att $M = V^Z(h)$ och

$$V^Z(t) = M(T) - h^1(T)Z(t) - h^1(T)Z(t) = M(T) = X$$
$$dV^Z(t) = \frac{g(t)}{\sigma \cdot Z(t)} \cdot \sigma \cdot Z(t) d\nu(t) = g(t) d\nu(t)$$

Alltså är portföljen självfinansierad och X Z-uppnåelig vilket medföljer att modellen är komplett.

Sats: I Black-Scholes modell karakteriseras martingalmåyyet Q av att $Q \sim P$ och ett av följande ekvivalenta villkor: Under Q har varje prisprocess underliggande som derivatpris:

1.) Riskneutrala värderingsegenskaper

$$\Pi(t) = e^{-r\cdot(T-t)} E^Q_{r,t}\left[\Pi(T) \mid F_t\right]$$

2.) Q-dynamikan har för alla prisprocesser

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt + \sigma_\Pi \Pi_t d\nu_t$$

där ν_t är Q-martingal

3.) Egenskapen att $\frac{\Pi(t)}{B(t)}$ är martingal.

Metateoremet:

Låt N vara antal underliggande papper som handlas på marknaden, inklusive säkra och K antalet slumpkällor. Då gäller:

(1) Marknaden är arbitragefri om $N \leq K$.
(2) Marknaden är komplett om $N \geq K$.
(3) Marknaden är komplett och arbitragefri om $N = K$.

Något om aktier

Vi skall här mycket kortfattat nämna något om aktier och hur engelska aktieprodukter skiljer sig från de från svenska. Engelska aktier kan delas upp i två slag, vanliga och preferensaktier. Dessa preferensaktier skiljer sig från de vanliga i följande punkter:

- Ägare till preferensaktier har ingen rösträtt på bolagsstämman.
- Utdelningarna är fixerade i förväg.
- Ägare till preferensaktier får sin utdelning innan de vanliga aktieinnehavarna.

Ägare till preferensaktier har dock en möjlighet att konvertera sina aktier till vanliga. Rösträtt kan ges om ingen av den fixa utdelningen har utbetalts på tre år.

Aktier kan värderas på några olika vis två av dessa är med hjälp av:

- Diskonterade kassaflöden (som om de vore obligationer)
- Relativa mått (ratio analysis)

Man definierar en tillväxtfaktor (g) för företaget som definieras som (1 – utdelningarna) x vinsten per aktie. Denna används sedan i Gordons tillväxtmodell:

$$V = \frac{D}{r - g}$$

där

V är värdet av aktien före utdelning
D är nästkommande utdelning
r är investerarens förväntade avkastning
g är den årliga ökningen av företagets utdelningar

Formeln härleds genom att nuvärdesdiskontera utdelningarna.

Genom att studera företagets balansräkningar kan man få en bild över hur det går för företaget. Viktigt är hur företaget fått sin vinst. Om exempelvis ett flygbolag mellan två år fått en stor vins p g a att man omvärderat livslängden på sina plan från 15 till 30 år har ju företaget inte gjort något konstruktivt för att skapa en vinst.

Andra ofta förekommande mätetal är:

- EPS, vinst per aktie (earnings per share)
- P/E, (PER) price earning ratio: marknadspris per aktier / EPS
- Utdelningar mätta i yield
- PEG = P/E talet delat med g (price / earnings to growth rate ratio)
- DPS, utdelning per aktie (dividend per share)
- DC = EPS/DPS (dividend cover)
- PR = DPS/EPS = 1/DC (payout ratio)

P/E talet kan tolkas som antalet år det tar att fördubbla värdet på en investering i företaget. Om PEG är mindre än ett är aktien billig.

Risken i en aktieportfölj beskrivs av en konstant, beta. Om betavärdet är ett följer priset på en aktie marknadsindex. Om däremot betavärdet är större än ett är aktien känslig för marknadsförändringar och har därmed stor risk. Är betavärdet mindre än ett är aktien bara svagt beroende av övriga marknaden.

Prismodeller för aktier

Det finns ett antal modeller för att värdera aktier. Observera att dessa modeller nytta skiljer sig från modellerna för optioner och ränteinstrument. Modeller för optioner baserar sig på matematiska villkor som måste uppfyllas för att exempelvis marknaden skall vara arbitragefri. Sådana villkor kan man inte ställa upp för aktier utan dessa modeller är mer att ”tycka” att så här borde det vara.

Utdelning och diskonteringsmodeller

DDM (Dividens Discount Model) värderar en aktie som summan av de diskonterade förväntade kassaflödena. Denna modell är helt ekvivalent med modellen för att värdera obligationer. Skillnaden är att vi använder oss av förväntade kassaflöden, utdelningar (motsvarande obligationens kuponger) och en försäljning av aktien (det framtida förväntade värdet på aktien).

$$P = \sum_i \frac{D_i}{(1+R)^{t_i}} + \frac{P_n}{(1+R)^{t_n}}$$

där

D_i är förväntade utdelningar vid tiderna t_i, $i = 1, 2, ..., n$
R den förväntade avkastningen och
P_n Aktiens pris efter n år.

Då det givetvis är omöjligt att ”förvänta” sig specifika utdelningar är modellen mycket osäker. Låter vi tiden → ∞. Kan vi skriva denna som

$$P = \sum_i \frac{D_0 \left(1+g\right)^i}{(1+R)^i}$$

där

D_0	är den historiska genomsnittsutdelningen
g	en tillväxtkonstant för utdelningen och
R	den förväntade avkastningen.

Med lite algebra kan vi skriva denna som:

$$P = \frac{D_1}{R-g}, \quad D_1 = D_0 \left(1+g\right)$$

om $R > g$. Om företagets PR (payout ratio, se ovan) är p och vinsten per aktie är E_1 så $D_1 = p \cdot E_1$ har vi:

$$P = \frac{p \cdot E_1}{R-g}$$

<u>Tillgångsbaserade modeller</u>

Om vi utgår från modellen ovan och låter

b	$= (1 - p)$,
A	= nettovärdet på aktien och
r	= avkastningen på nettovärdet = E_1/A så att $E_1 = r \cdot A$

Då kan vi skriva $g = b \cdot r$ vilket ger oss:

$$P = \frac{\left(1-b\right) \cdot r \cdot A}{R - b \cdot r}$$

Nettovärdet av aktien är det mest kritiska i modellen ovan. Vi illustrerar detta med ett exempel:

Betrakta följande företag:

Förhållande mellan vinst och behållning	85.0%
Antal utgivna aktier	10 miljoner
Nettovinst	9.0 miljoner
Bokfört värde av tillgångar	33.0 miljoner
Nettotillägg till bokföringsvärde	21.5 miljoner

Hur mycket skall en investerare betala per aktie med en förväntad vinst på 15%?

Nettovärde	= 33.0 + 21.5	= 54.5 miljoner
Nettovärde per aktie	= 54.5 / 10	= 5.45
Vinst per nettovärde	= 9.0 / 54.5	= 0.165 eller 16.5%

$$P = \frac{(1-0.85)\cdot 0.165\cdot 5.45}{0.15-0.85\cdot 0.165} = 13.83$$

Denna beräkning baserad på företagets nettovärde kan användas för att besluta om man skall investera:

- Om aktiepriset på marknaden < P: Köp
- Om aktiepriset på marknaden > P: Sälj

<u>Q-förhållandet</u>

Om vi skriver om prisformeln baserad på nettovinsten:

$$P / A = \frac{(1-b)\cdot r}{R-b\cdot r}$$

Detta förhållande P/A, kallat Q (Q ratio = aktiepriset / nettovärde per aktie) används ofta som ett nyckelvärde vid mätningar investeringsvärdet.

Investeringsbeslut:

- Verkligt Q < P/A: Köp
- Verkligt Q > P/A: Sälj

Inkomsbaserade modeller

Om ett företag inte har utdelningar blir modeller baserade på utdelningar meningslösa. I stället kan en analytiker då utgå ifrån modeller baserade på framtida vinst per aktie (EPS):

$$P = \frac{E}{R - g} = \frac{r \cdot A}{R - b \cdot r} = Q \cdot A$$

Investeringsbeslut:

- Om aktiepriset på marknaden < P: Köp
- Om aktiepriset på marknaden > P: Sälj

Implicit avkastning

Tidigare modeller är baserade på utdelning per aktie eller vinst per aktie. Detta leder till frågan, *vad bör den förväntade vinsten vara för en aktie?*

Ett sätt att besvara frågan är att vända på DDM och beräkna den implicita avkastningen:

$$R = \frac{D_1}{P} + g$$

<u>Exempel:</u> Betrakta följande företag:

Utdelning förra året	1.00
Utdelningstillväxt	10%
Aktiepris	20.00

Beräkna den implicita avkastningen:

$$R = \frac{D_1}{P} + g = \frac{D_0 \cdot (1 + g)}{P} + g = \frac{1.00 \cdot (1 + 0.10)}{20.00} + 0.10 = 0.155$$

D.v.s. 15.50 %. Denna kan jämföras med den verkliga avkastningen och på så sätt besluta om aktien är billig eller dyr.

Tre-yield-modellen

Några analytiker bruka förfina modellen ovan genom att lägga till en term för förändringen av PE-talet. Detta ger oss den så kallade tre-yield-modellen:

$$R = \frac{D_1}{P} + g + \Delta PE$$

Där ΔPE är förändringen av PE-talet mellan dagen för beräkningen och en framtida horisont.

CAMP

Denna model togs fram av William Sharpe (1964) and John Lintner (1965). Den beskriver relationen mellan risken och den förväntade avkastningen:

$$R - R_f = \beta \cdot (R_m - R_f)$$

där

R	= förväntad avkastning på aktien
R_f	= möjlig avkastning på ett riskfritt ränteinstrument (riskfria räntan)
R_m	= Beräknad avkastning på ett marknadsindex
$(R_m - R_f)$	= marknadens pris för risk, ”equity risk premium”
β	= aktiens betavärde = % förändring i aktiens avkastning / 1% förändring av marknadens avkastning.

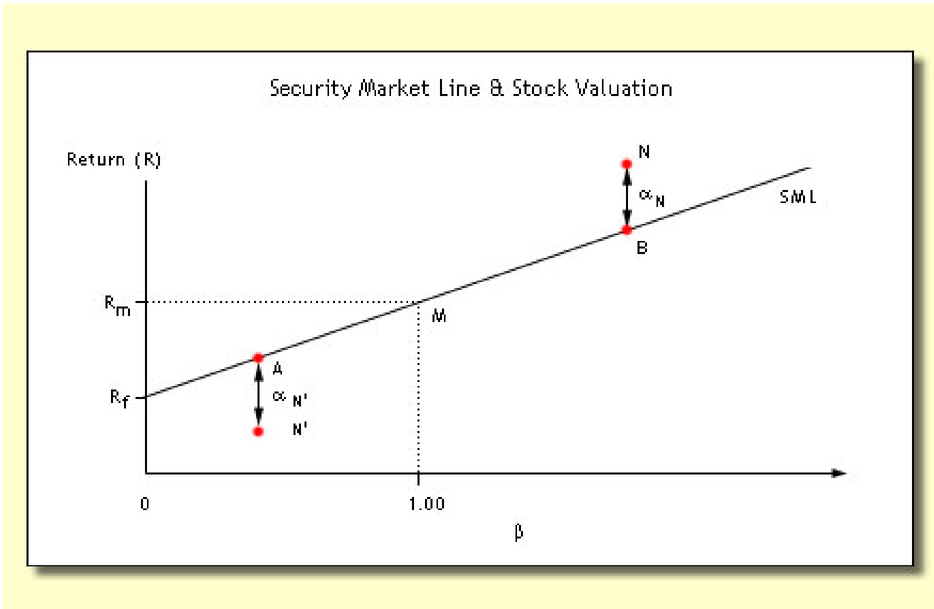
Beta används mycket ofta för att beskriva hur priskänslig en specifik aktie är på förändringar på marknaden. Om hela marknaden går ner med 1 % och även den avsedda aktien är dess beta = 1. Går däremot aktien upp 1 % är dess beta = -1.

Klassisk CAMP

CAMP ger en indikation om en aktie är under- eller övervärderad. Den säger att överskottet i avkastningen på aktien, över eller under den riskfria räntan skall vara proportionellt mot dess betavärde. Alternativt:

$$R = R_f + \beta \cdot (R_m - R_f)$$

Denna relation mellan *R* och *b* visas i figuren nedan och är känd under namnet **Securities Market Line** (SML).



SML ger oss således ett mätvärde (benchmark) för värdering. Om en aktie är ”rätt” prissatt, skall dess värden på *R* och *b* ligga på SML. Exempelvis är aktierna A och B i figuren ”rätt” prissatta men med olika risk (beta).

Antag nu att vi har en aktie N med en högre avkastning än vad dess beta ger. Då har denna aktie ett positivt alfa, eftersom den följer en ekvation på formen:

$$R_N - R_f = \alpha_N + \beta_N \cdot \left(R_m - R_f\right)$$

Positiva alfavärden är en indikation på att aktien är undervärderad.

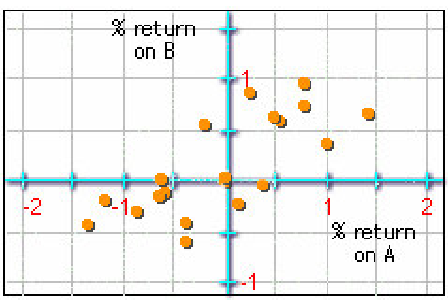
Portföljteori

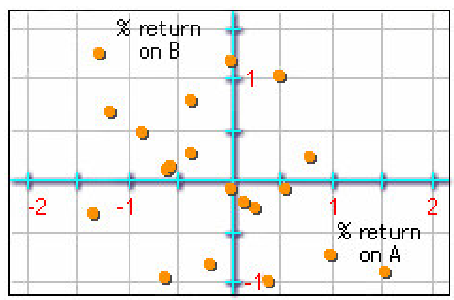
Portföljeffekten

Såvida inte avkastningen av alla instrumenten/kontrakt i en portfölj är perfekt korrelerade, är risken för portföljen mindre än summan av risken för varje individuellt instrument. Idén är att när vissa instrument på marknaden går ner, så finns det andra instrument som går upp. Så genom att inneha en diversifierad (blandad) portfölj minskar investerare den totala risken. Med andra ord gäller det att inte lägga alla ägg i samma korg.

Denna portföljeffekt beror på korrelationen mellan priserna på olika instrument och marknader. D.v.s. hur priserna påverkar varandra och rör sig i förhållande till varandra.

I figuren nedan ser vi två exempel på hur två aktier kan vara korrelerade till varandra.





Ingen korrelation på marknaden är perfekt, utan man får oftast nöja sig med att betrakta tendenser. I den vänstra figuren har vi en positiv korrelation. Där kan vi ana oss till en spridning kring en linje med positiv lutning. Korrelationen är svag och kan beräknas till cirka 0.57. I den högra figuren säger vi att korrelationen är negativ. Huvuddelen av punkterna ligger fördelade kring en linje med negativ lutning. Har man en negativ korrelation mellan två aktier innebär detta att om den ena går upp går i de flesta fall den andra ner.

Korrelation definieras av:

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$$

där

σ_A är standardavvikelsen för prisutvecklingen för aktie A,
σ_B standardavvikelsen för prisutvecklingen för aktie B och
σ_{AB} är kovariansen mellan aktie A och aktie B, definierad av

$$\sigma_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(A_i - \bar{A}\right) \cdot \left(B_i - \bar{B}\right)}{N-1}$$

där

N är antalet mätningar på priserna,
A_i priset på aktie A vid tiden t_i
B_i priset på aktie B vid tiden t_i
$\bar{A}$ medelvärdet av A_i
$\bar{B}$ medelvärdet av B_i

Avkastning på en portfölj

Betrakta följande portfölj bestående av två aktier vilka har korrelationen 0. Detta innebär att de är helt okorrelerade och i ett diagram som det ovan skulle punkterna vara placerade slumpvist med lika sannolikhet överallt.

Aktie	A	B
Total avkastning (% per år)	2.00	6.00
Risk (% per år)	10.00	20.00

Risken mäts i årlig standardavvikelse på respektive akties avkastning. Om man bara hade ett innehav i A skulle avkastningen vara 2.00 % och risken 10.00 %. Har vi i stället ett innehav med lika andelar av A och B får vi en avkastning på: 2.00 % / 2 + 6.00 % / 2 = 4.00 %. För en godtycklig portfölj är avkastningen:

$$R_{tot} = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i$$

där n är antalet ingående aktier, w_i är vikten av aktien i och R_i avkastningen på aktie i. Den totala risken ges av:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(w_i \cdot \sigma_i\right)^2 + \sum_{i=1} \sum_{j=1, i \neq j} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}}$$

Alternativt kan vi skriva detta som:

$$\sigma_p = W \cdot \sigma \cdot W^T$$

där

$$W = [w_1, w_2, ..., w_n]$$

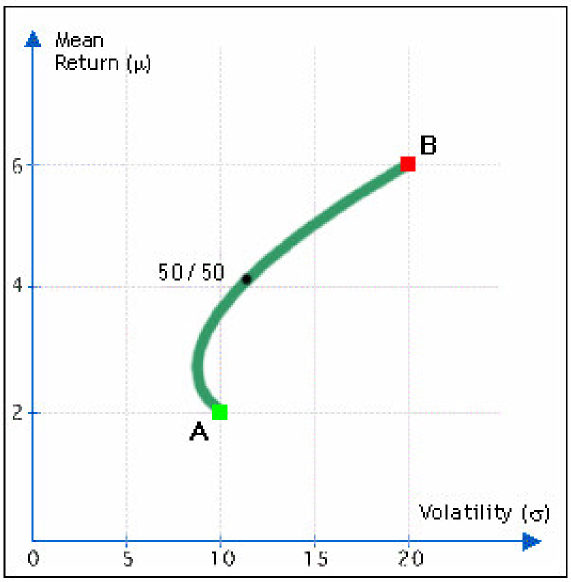
och

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & ... & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

är den så kallade varians-kovarians-matrisen.

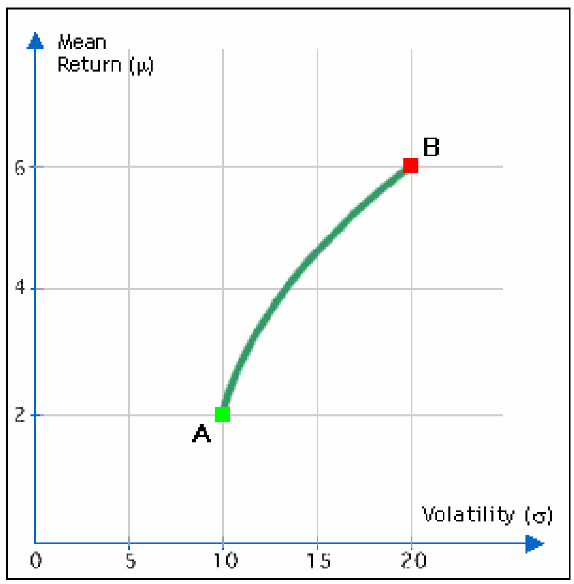
Portföljens front

Både avkastningen och risken för en portfölj är funktioner av kapitalet allokerat för varje aktie (vikten av aktien). I figuren nedan visas risk/avkastnings-karakteristiken för alla möjliga kombinationer av de två aktierna i exemplet ovan:



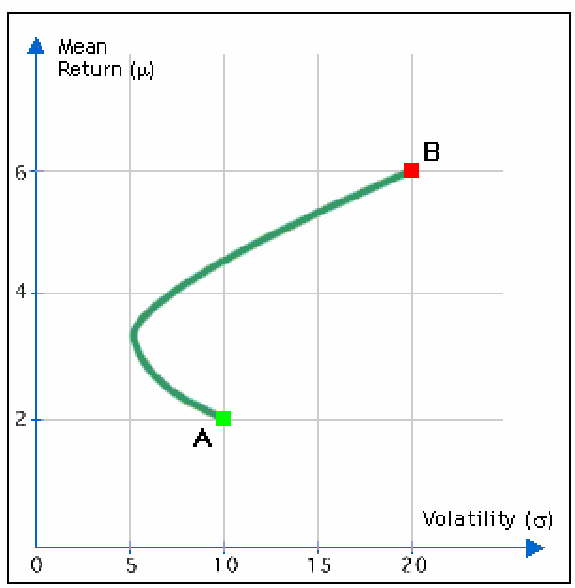
Om vi startar i punkten A har vi investerat 100 % i aktie A. Flyttar vi oss sedan mot punkten B (där vi enbart investerat i aktie B) får vi kurvan ovan. Kurvans form som funktion av korrelationen kan vi se nedan (korrelationen ovan är noll). Hade korrelationen varit lika med ett hade vi fått en rät linje mellan punkten A och punkten B.

Effect of Correlation on Portfolio Frontier

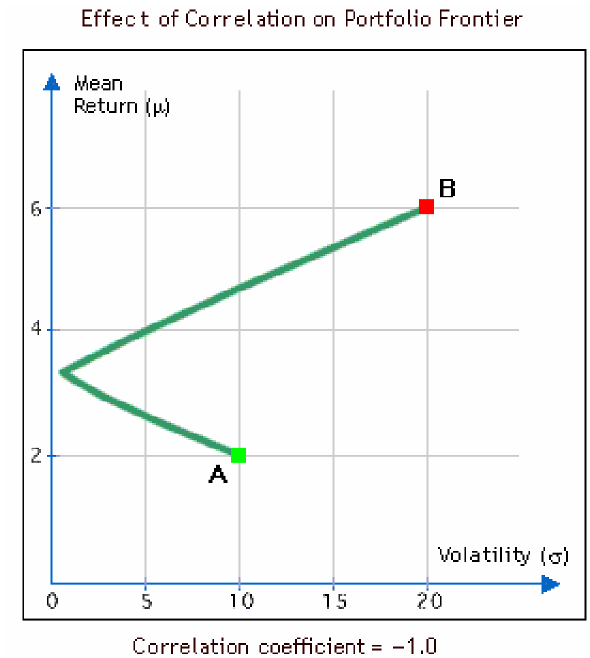


Correlation coefficient = +0.9

Effect of Correlation on Portfolio Frontier



Correlation coefficient = −0.5



Vi ser att med en korrelation på minus ett kan vi eliminera risken helt. Då går den ena aktien upp lika mycket som den andra går ner.

Systematisk- och diversifierbar risk

Det är värt att studera hur nettorisken av en portfölj minskar då vi ökar antalet aktieslag i portföljen. I ett tidigare avsnitt presenterade vi en generell formel för totala portföljens risk, σ_p, som:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (w_i \cdot \sigma_i)^2 + \sum_{i=1} \sum_{j=1, i \neq j} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}}$$

Antag nu att vi investera lika mycket i varje aktie. Då har vi att $w_i = 1/n$. Därför kan vi skriva:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_i}{n} \right)^2 + \sum_{i=1} \sum_{j=1, i \neq j} \frac{\sigma_{ij}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_i^2}{n} \right) + \frac{n-1}{n} \cdot \sum_{i=1} \sum_{j=1, i \neq j} \frac{\sigma_{ij}}{n \cdot (n-1)}}$$

Därmed blir båda termerna som vi summerar medelvärden.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma_i^2}{n}\right)$$

är medelvärdet av variansen på de *n* ingående aktierna. Kalla denna term V^2.

$$\sum_{i=1}\sum_{j=1,i\neq j}\frac{\sigma_{ij}}{n\cdot(n-1)}$$

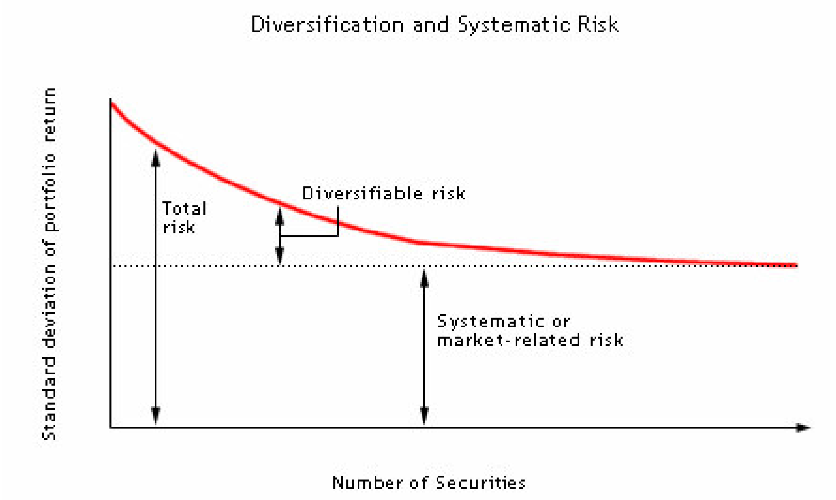
är medelvärdet av kovariansen av de *n* ingående aktierna. Kalla denna term C. (Kom ihåg att vi bara har *n-1* kovarianser eftersom *i* ej kan vara lika med *j*). Vi kan nu skriva portföljrisken som:

$$\sigma_p=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot V^2+\frac{n-1}{n}\cdot C}$$

Betrakta nu vad som händer om *n* blir stort:

1. Om avkastningen av de ingående aktierna är helt okorrelerade, d.v.s. $\sigma_{ij} = 0$. Då har vi att C = 0. Samtidigt går den första termen mot noll vilket resulterar i en portföljrisk som går mot noll.
2. Är avkastningen av de ingående aktierna är helt korrelerade konvergerar portföljrisken mot $\sqrt{C}$.

I figuren nedan ser vi hur den totala portföljrisken avtar och konvergerar mot medelkovariansen då antalet aktier blir stort. Däremot har vi inget skydd mot marknadsrisken, d.v.s. att hela marknaden går ner. Denna risk kallas systematisk risk.



Man kan betrakta portföljrisken ovan som bestående av två element:

1. Den första representerar den delen av risken som kan elimineras genom innehav av en väldiversifierad portfölj.
2. Den andra delen representerar marknadsrisken, den systematiska risken som inte kan elimineras.

Den effektiva fronten

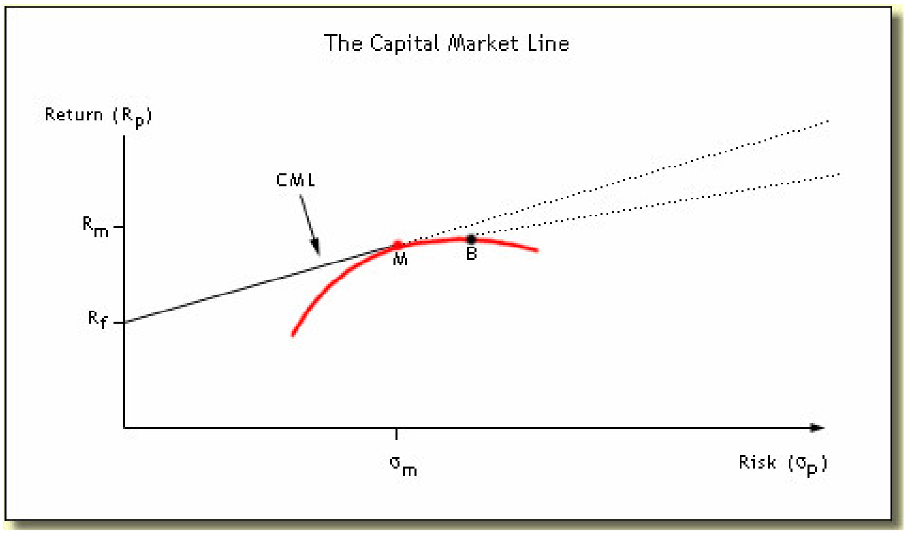
Tidigare har vi plottat den effektiva fronten för två aktier. I praktiken, då man har många aktier får man ett effektivt område i ett n-dimensionellt rum, där n är antalet ingående instrument. Därför kan vi konstruera ett helt universum av alternativa portföljer, varje med unik risk och unik avkastning. Dessutom kanske vi har innehav i olika räntebärande instrument. Detta gör vår front än mer komplext.

Separationsteoremet

Införandet av ett riskfritt instrument i vårt portföljuniversum förenklar valet av portfölj enormt.

När det är möjligt att låna till en riskfri ränta existerar bara en portfölj av icke riskfria instrument som är optimal. Denna portfölj kan bestämmas utan hänsyn tagen till investerarens personliga risk – avkastnings preferenser.

Denna kraftfulla sats demonstreras bäst i figuren nedan. I figuren ser vi R_f, som är räntan på det riskfria instrumentet, den riskfria räntan. Vi antar att dess standardavvikelse är noll. Vidare definierar vi M som den optimala portföljen av icke riskfria instrument. Denna portfölj ligger på en rät linje: $R_f M$ känd under namnet CML (Capital Market Line) vilken är tangent till det effektiva området i punkten M.



Vi kan bevisa att M är den optimala portföljen genom att visa följande:

1. CLM är en rät linje.
2. Investerare kan placera sin portfölj var som helst längs denna linje genom att variera portföljens vikter mot det riskfria instrumentet.
3. Därför blir CML det nya effektiva området.

Vi kan visa att CML är en rät linje genom att studera formeln för portföljens risk och avkastning.

<u>Portföljens avkastning</u>

Avkastningen på en portfölj M i kombination med det riskfria instrumentet ges av:

$$R_p = (1 - w) \cdot R_f + w \cdot R_m$$

där

R_p = den kombinerade avkastningen
R_f = avkastningen på det riskfria instrumentet
R_m = avkastningen på portföljen *M*
w = delen av vår investering i *M*

Portföljens risk

Risken för portföljen kan vi skriva som:

$$\sigma_p = \sqrt{\left((1-w)\cdot\sigma_f\right)^2 + \left(w\cdot\sigma_m\right)^2 + 2\cdot(1-w)\cdot w\cdot\sigma_f\cdot\sigma_m\cdot\rho_{fm}}$$

där

σ_p = den kombinerade risken
σ_f = risken på det riskfria instrumentet
σ_m = risken på portföljen *M*
ρ_{fm} = korrelationen på avkastningen mellan portföljen *M* och det riskfria instrumentet.
w = delen av vår investering i *M*

Med antagandet att $\sigma_f = 0$ och $\rho_{fm} = 0$ förenklas detta till:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(w\cdot\sigma_m\right)^2} = w\cdot\sigma_m$$

Strukturen på CML

Från den sista ekvationen har vi att

$$w = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$$

Substituerar vi detta i den ekvationen för avkastningen har vi:

$$R_p = R_f + \frac{R_m - R_f}{\sigma_m}\cdot\sigma_p$$

Alltså ser vi att CML-ekvationen kombinerar en mix av den optimala portföljen och det riskfria instrumentet. Därmed är avkastningen en funktion av två variabler: R_f och σ_p. Överskottet i avkastning är därmed: (R_p - R_f) = marknadspriset för risk (risk premium). CML-ekvationens lutning är $(R_p - R_f)/\sigma_m$. Den optimala portföljen får vi då denna lutning är som störst.

Enfaktormodellen

Det stora problemet med portföljoptimering är mängden data som krävs för att finna den optimala portföljen.

För en portfölj med 2 instrument behöver vi:

2	avkastningsmått.
2	standardavvikelser
1	korrelation

För en portfölj med 20 instrument behöver vi:

20	avkastningsmått.
20	standardavvikelser
190	korrelationer

För en portfölj med 200 instrument behöver vi:

200	avkastningsmått.
200	standardavvikelser
19.900	korrelationer

En lösning är att gruppera portföljen i delportföljer och sedan definiera varianser och korrelationer mellan dessa. En annan lösning är att anta att variansen på avkastningen av varje instrument är en funktion av tre komponenter:

1. Variationer som är specifika för aktien själv.
2. Variationer relaterade till rörelse på ett bredare marknadsindex eller portfölj-
3. Slumpvisa variationer

Formellt:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_m + e_i$$

där

α_i	= En för aktiens unik och oberoende avkastning.
R_m	= Avkastningen på ett marknadsindex.
β_i	= En konstant som mäter förväntad avkastning R_i i termer av R_m.
e_i	= En slumpvis felfaktor.

Om:

$\beta = 1$ matchar aktiens avkastning marknadens variationer.
$\beta > 1$ är aktiens avkastning mer volatil än marknadens.
$\beta < 1$ är aktiens avkastning mindre volatil än marknadens.

Beta är ett känslighetsmått som mäter en akties priskänslighet med marknadens.

Antaganden

Ett viktigt antagande i enfaktormodellen är att felfaktorerna, e_i för samtliga värdepapper är okorrelerade med varandra. Med andra ord är enda anledningen till att aktiepriser varierar tillsammans rörelser på marknaden. Givet detta antagande kan man visa följande:

1. Den totala risken σ_i, för ett givet värdepapper ges av:

$$\sigma_i = \sqrt{(\beta \cdot \sigma_m)^2 + \sigma_{ei}^2}$$

där

σ_m = risken på marknaden (marknads index)
σ_{eu} = standardavvikelsen på e_i

2. Kovariansen på avkastningen mellan två värdepapper i och j ges av

$$\sigma_{ij} = (\beta_i \cdot \sigma_m) \cdot (\beta_j \cdot \sigma_m) = \beta_i \beta_j \cdot \sigma_m^2$$

Därmed kan vi nu bestämma kovariansmatrisen via aktiernas betavärden. Eftersom vi därmed kräver en mindre uppsättning data kan man vid första betraktandet tro att detta är en dålig approximation av kovariansmatrisen. Men, en av de mest slående empiriska resultaten är att aktiernas betavärden verkar ge bättre förutsägelse av kovarianser än en direkt mätning. Notera också att per definition är $\beta_m = 1$.

Därför gäller:

$$\sigma_{im} = \beta_i \cdot \sigma_m^2$$

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

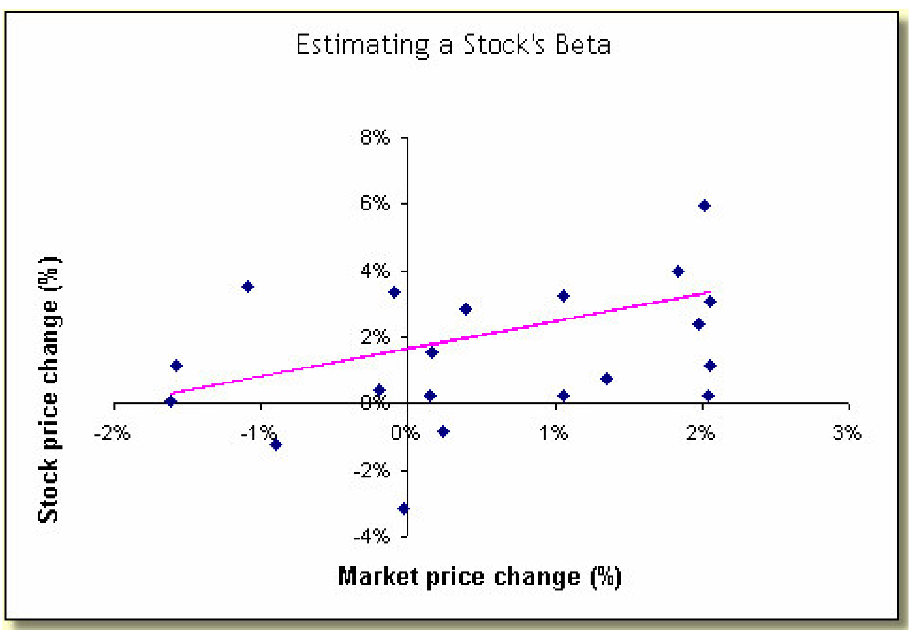
För en portfölj med 200 instrument behöver vi nu endast:

200 mätningar av α_i,
200 betavärden, β_i,
200 standardavvikelser σ_{ei},
medelavkastningen och standardavvikelsen på marknadsindex.

Totalt har vi därmed 602 indata, att jämföra med 20.300.

Uppskattning av α och β

För att använda vår modell måste vi bestämma α och β. Vi gör detta genom regression månadsvis med observationer över en femårsperiod.



Den i figuren anpassade linjen har följande regressionsstatistik.

- Aktiens betavärde är 0.83. Med detta menas, i genomsnitt under en period då marknaden går upp med 1 % går aktien upp med 0.83 %.

- Standardavvikelsen på beta (standardfelet) uppmäts till 0.47. Detta innebär att vi har ett konfidensintervall på hela 95 % på beta, vilket är ett tämligen stabilt mått.

- Felfaktorn R^2 är endast 0.15. Detta innebär att endast 15 % av aktiens avkastning kommer från rörelser på hela marknaden.

- Aktiens alfavärde (även kallat **Jensens index**) var 0.02 %.Detta indikerar att aktien genererar en marginell positiv avkastning även om marknaden är neutral.

<u>Beräkning av portföljens avkastning</u>

När vi känner betavärdet för alla i portföljen ingående aktier, kan vi beräkna dess avkastning och dess risk. Vi har sedan tidigare

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i \cdot R_i \right)$$

Sätter vi nu in resultatet från enfaktormodellen (och kommer ihåg att $e_i = 0$) får vi portföljens avkastning

$$\begin{aligned} R_p &= \sum_{i=1}^{n} \left[w_i \cdot \left(\alpha_i + \beta_i \cdot R_m \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i \cdot \alpha_i \right) + R_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(w_i \cdot \beta_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(w_i \cdot \alpha_i \right) + \beta_p \cdot R_m \end{aligned}$$

där β_p är portföljens beta, d.v.s. det viktade medelvärdet av portfölens individuella beta:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i \cdot \beta_i \right)$$

Beräkning av portföljens risk

Vi kan nu även beräkna portföljens risk. Vi utgår från:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot \sigma_i)^2 + \sum_{i=1}\sum_{j=1, i\neq j} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}}$$

Sätter vi in σ_i och σ_{ij} från enfaktormkodellen får vi:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \left(\beta_i^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2\right) + \sum_{i=1}\sum_{j=1, i\neq j} w_i \cdot w_j \cdot \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_m^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}\sum_{j=1} w_i \cdot w_j \cdot \beta_i \cdot \beta_j \cdot \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \cdot \sigma_{ei}^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot \beta_i) \cdot \sum_{j=1}^{n}(w_j \cdot \beta_j) \cdot \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot \sigma_{ei})^2}$$

$$= \sqrt{(\beta_p \cdot \sigma_m)^2 + \sum_{i=1}^{n}(w_i \cdot \sigma_{ei})^2}$$

Systematisk och Diversifierad risk

Det är värt att notera hur den systematiska och den diversifierade risken vi introducerade tidigare uttrycks i enfaktormodellen. Antag att vi konstruerar en portfölj genom att investera lika mycket i n olika värdepapper. Andelen av varje värdepapper w_i är därför $1/n$. Då har vi:

$$\sigma_p = \sqrt{(\beta_p \cdot \sigma_m)^2 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} \cdot \sigma_{ei}^2\right)} = \sqrt{(\beta_p \cdot \sigma_m)^2 + \frac{1}{n} \cdot \sigma_e^2}$$

där vi definierat σ_e. Vi har då en risk bestående av två komponenter, systematisk plus diversifierad. Om n blir stor reduceras detta till:

$$\sigma_p = \beta_p \cdot \sigma_m$$

Som vi kan se, har en full diversifierad portfölj endast en systematisk risk.

Capital Asset Pricing Model, CAMP

Vi ska här fördjupa oss lite i CAMP. Tidigare har vi visat att, om en investerare kan låna till en riskfri ränta kan vi härleda en effektiv front kallad Capital Market Line (CML). CML beskriver avkastningen på en portfölj bestående av en kombination av en optimal portfölj (M) och ett riskfritt värdepapper. Vi visade följande:

$$R_p = R_f + \frac{R_m - R_f}{\sigma_m \cdot \sigma_p}$$

där

R_p	= avkastning på hela portföljen
R_f	= avkastningen på det riskfria värdepapperet
R_m	= avkastningen på den riskfyllda portföljen M
m	= den optimala portföljen av riskfyllda värdepapper
σ_p	= risken för det totala portföljen
σ_m	= risken för portföljen, M

Kasta vi om termerna kan vi skriva:

$$R_p - R_f = \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \cdot \left(R_m - R_f\right)$$

Vi kan utveckla denna ytterligare genom följande antagande:

På en ”effektiv marknad” har alla investerare tillgång till exakt samma information om risker och avkastningar för samtliga värdepapper och korrelationerna dem emellan.

Därför ser samtliga investerare samma effektiva front och innehar därmed samma portföljfördelning. Därför refererar CML den optimala portföljen som en **marknadsportfölj**.

Då har alla investerare samma risk. Nämligen den given av enfaktormodellen ovan:

$$\sigma_p = \beta_p \cdot \sigma_m$$

Alltså har vi:

$$R_p - R_f = \beta_p \cdot \left(R_m - R_f\right)$$

Vi kan därmed formulera detta i ord:

På en effektiv marknad är överskottet i avkastning på ett givet värdepapper proportionellt mot dess systematiska risk i mått av dess betavärde.

Detta är känt som ArbitragePrisTeorin (APT). Den hävdar att:

- Endast den systematiska risken belönas på marknaden.
- Det enda relevanta måttet på (systematisk) risk är beta.
- Skillnaden i avkastning mellan värdepapper ges enbart av skillnaden i deras betavärde.

Detta är ett av de mest kraftfulla påståenden i modern finansteori.

Relationen mellan aktiers beta och deras avkastning kallas **Security Market Line** (SML). I den punkt där SML korsar marknadsportföljen är beta lika med ett (definition).

Antag nu att finner en portfölj N med en avkastning som verkar vara större än dess beta kan rättfärdiga. Då säger man att portföljen har ett positiv alfa eftersom man då har:

$$R_N - R_f = \alpha_N + \beta_N \cdot \left(R_m - R_f\right) + e_N$$

Ett positivt värde på alfa innebär att portföljen är undervärderad. I CAMP-världen kan inte en sådan situation hålla i sig eftersom investerare på lång sikt skulle skaffa sig en position med arbitragemöjligheter. Arbitragemöjligheten kvarstår tills dess att priset på portföljen sjunker till den nivå då den är arbitragefri, d.v.s. man åter hamnat på SML.

Hur man finner den optimala portföljen.

I CAMP-världen är alla portföljer optimala. I verkligheten däremot är så inte fallet. Då ger CAMP-modellen möjligheten att beräkna risk och avkastning på olika portföljer. Då gäller det att finna den optimala portföljen. Denna definieras av den portfölj med den största Treynorkvoten T_r:

$$T_r = \frac{R_p - R_f}{\beta_p}$$

Denna kvot används ofta för studera hur effektiv en portfölj är-

Det faktum att CAMP-modellen gör vissa orealistiska antaganden angående nödvändig information en investerare behöver är i sig inget skäl att förkasta den. Alla modeller försöker på något sätt att reducera nödvändig information till en hanterbar mängd. Den verkliga testen av modellen är att se om den kan förutse verkligheten.

Det har förekommit flera studier av CAMP. Fastän det finns många konceptuella problem med att definiera vad som ska utgöra en marknadsportfölj har CAMP många anhängare som hävdar följande resultat:

- På lång sikt verkar både enskilda aktiers och portföljers avkastning vara proportionellt mot deras värde på beta.
- På lång sikt belönas inte investerare som bär på en icke-systematisk risk. Temporära undantag sker då och då, men de verkar förekomma slumpvis och kan inte på ett systematiskt vis användas för att göra arbitrage.

Motståndare till CAMP argumenterar för modellen bara gäller under mycket långa tidsperioder och att aktier som handlas med positiva (eller negativa) värden på alfa existerar under relativt långa tidsperioder. I praktiken har inte CAMP visat sig vara pålitlig för att välja aktier till någon optimal portfölj.

Flerfaktormodeller

I CAMP förekommer bara en faktor som påverkar avkastningen för en enskild aktie, faktorn för systematisk kovarians. All annan påverkan på avkastningen betraktas som slumpvis. Flerfaktormodeller gör ett försök fånga upp kända faktorer som påverkar enskilda aktier att ge bättre avkastning an andra. I en flerfaktormodell representeras avkastningen på en aktie av:

$$R_i = \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \cdot F_j + e_i$$

där

R_i = överskottet i avkastning på värdepapper i (eller portfölj i), över den riskfria räntan
α_i = en för aktiens (portföljen) unik och oberoende avkastning.
F_j = en gemensam faktor som påverkar avkastningen på denna och andra värdepapper.
β_{ij} = känsligheten i avkastning avseende förändringar i F_j.
e_i = ett slumpvist resterande fel med väntevärdet noll.

Flerfaktormodeller utökar alltså enfaktormodellens antagande att enbart avkastningen på marknaden förklarar aktiens kovarians med antagandet att det existerar faktorer som påverkar vissa eller samtliga aktier. Signifikanta faktorer man funnit är:

Generella faktorer:

- Inflation
- Växelkurser
- Lutningen på yieldkurvan, mätt med ett spread mellan yielden på en långvarig statsobligation och yielden på en statsskuldväxel.
- Spreaden mellan yielden på företagsobligationer med olika rang.
- Produktions och vinstindex på olika marknadssektorer.

Specifika faktorer:

- P/E-tal
- Vinst- och försäljningstillväxt.

Som vi kan förvänta oss kommer vissa aktier eller portföljer att vara mer känsliga än andra. Hur bra flerfaktormodellen är beror på vilka faktorer man tar hänsyn till. Där för är det viktigt att göra en analys på de faktorer man tar med i en sådan modell.

Något om nationalekonomi

Innan vi avslutar skall vi nämna något mycket kort om nationalekonomi. Detta är bara några minnesregler för vad och hur man kan styra ekonomin.

Konsumtion
Om konsumtionen går upp går sysselsättningen upp. Därmed stiger köpkraften och arbetslösheten minskar och konsumtionen ökar ännu mer.

Marknadsräntan
Om marknadsräntan går upp, går investeringarna ner (sparandet ökar), produktionen går ner och arbetslösheten upp. Därmed sänks efterfrågan och konsumtionen minskar. Således bromsar en höjd marknadsränta ekonomin, medan en sänkt marknadsränta stimulerar ekonomin.

Kronan
Om kronan går ner ökar exporten. Detta leder till ökad sysselsättning och ökad köpkraft.

Inflation
Om inflationen ökar, stiger marknadsräntorna och ...(läs under Marknadsräntan ovan.)

Finanspolitik
Staten kan stimulera efterfrågan och utbudet på marknaden. Genom att höja skatten minskas efterfrågan. Därmed minskar produktionen och budgetunderskottet ökar.

Investeringarna minskar och likaså utgifterna. Budgetunderskottet minskar därmed och arbetslösheten ökar.

Penningpolitik
För att stabilisera inflationen kan staten höja räntan. Detta leder dock till att investeringarna sjunker och likaså konsumtionen. Därmed går sysselsättningen ner och köpkraften sjunker.

Riksbanken kan påverka penningmängden genom:
1. Sedelutgivning.
2. Köpa och sälja värdepapper.
3. Sätta krav på bankerna och räntan.
4. Påverka valutaflödet till utlandet.

Lassiez-faire – Marknaden släpps fri.
Detta leder till att inflationen ökar som gör att penningvärdet sjunker. Löner går upp och sparandet minskar. Inflationen går upp vid högkonjunktur och vid lågkonjunktur går räntan ner.

Sammanfattning av Finansmarknaden

	Termin		Option		Swap	
Avista	Forward	Future	OTC	Exchange	OTC	Exchange
Deposit Call money T-bill Repo	FRA -- VX6 --	STIR fut, -- T-bill fut --	IRG, cap&floor -- -- --	STIR opt. Fed fund opt. T-bill opt --	IRS OIS -- --	Swap fut Fed fund fut. -- --
Bond	R, ST, SB osv Synthetic Forward	Bond futures	OTC Bond options	Bond options	Asset/Issuer swap	--
Share EFT Securities Lending	Short selling	Stock&Index futures	OTC options	Stock&Index options	Equity swap	--
FX spot	FX outright FX Swap NDF	Currency futures	FX options	Currency options		--
Commodity spot market		Commodity futures		Commodity options	Commodity swap	--
Strukturerade produkter		Exotiska produkter		Kreditderivat		

Referenser

[1] *Options, Futures and Other Derivative Securities,* John C. Hull, Prentice Hall, 2000
[2] *Numerical Recipes in C,* Press, Flannery, Teukolsky, Vetterling, Cambridge University Press, 1996
[3] *Black-Scholes and Beyond,* Neil A. Chriss, Irwin, 1997
[4] *Implementing Derivatives Models,* L. Clewlow and C. Strickland, John Wiley & Sons Ltd., 1998
[5] *Quantitative Risk Analysis. A Guide to Monte Carlo Simulation Modelling,* David Vose, Wiley 1997
[6] *Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Derivative Risk,* Philippe Jorion, Mc Graw Hill, 1997
[7] *The Complete Guide To Option Pricing Formlas,* Espen Gaarder Haug, Mc Graw Hill, 1997
[8] *Black-Scholes and Beyond. Option Pricing Models,* Neil A. Chriss, Irwin, 1997
[9] *Exotic Options. A Guide to Second Generation Options,* Peter G. Zhang, World Scientific, 1997
[10] *Pricing Derivative Securities,* Eliezer Z. Prisman, Academic Press, 2000
[11] *The Research & Trade. Quantitative Guide to NxOrc,* Orc Software AB
[12] *Mark-to-Future: a framework for measuring risk and reward*, Dembo, R., Aziz, A., Rosen, D., Zerbs, M., Algorithmics Publications, 2000.
[13] Faster valuation of financial derivatives, S. Paskov and J. Traub, *The Journal of Portfolio Management***,** **22** (1995), 113–120.
[14] *Guide to using @RISK: risk analysis and simulation add-in for Microsoft Excel,* Palisade Corporation, February 2002.

INDEX till finansiell teori